Jordi Castro Pérez

Col·lecció de problemes resolts d'Optimització

Universitat Rovira i Virgili

Col·lecció de problemes resolts d'Optimització

Jordi Castro Pérez

Estadística i Investigació Operativa
Dept. d'Enginyeria Química
Universitat Rovira i Virgili

Introducció

El camp de l'Optimització ha experimentat un gran desenvolupament durant les darreres dècades, el qual ha estat especialment lligat amb l'evolució tecnològica dels ordinadors. Això fa que avui en dia ja pugui considerar-se com un camp plenament "madur". I bona mostra d'això és l'extensa bibliografia sobre el tema, on es descriu la gran varietat d'algorismes i mètodes d'Optimització avui existents. Tanmateix, existeix un buit pel que fa a textes que presentin una col·lecció de problemes resolts, de nivell bàsic, i especialment orientada a cursos introductoris d'Optimització.

Aquest ha estat el principal motiu que ha impulsat la realització d'aquesta col·lecció de problemes d'Optimització, la qual forma part del material docent de l'assignatura de Simulació i Optimització de Processos Químics impartida al tercer curs de l'E.T.S.E.Q. de la Universitat Rovira i Virgili. La col·lecció es troba constituïda per problemes inèdits, problemes clàssics d'Optimització, i variants de casos extrets de l'extensa bibliografia existent sobre aquest matèria.

La col·lecció s'ha dividit en tres grans blocs: modelització de problemes, programació lineal, i programació no lineal. Tenint en compte el marc de l'assignatura, molts dels problemes de la part de modelització representen situacions extretes del camp de l'Enginyeria Química. La resta d'exercicis de la part de modelització són problemes clàssics que val la pena que tot futur enginyer conegui. Pel que fa a les dues unitats de programació lineal i programació no lineal, els problemes presentats tenen l'objectiu de fixar i reforçar les nocions que els alumnes reben a les classes de teoria. La major part dels problemes d'aquestes unitats són de caràcter pràctic, tot i que també hi ha alguns teòrics de dificultat mitjana.

Al final de la llista de problemes es poden trobar els capítols on apareixen les solucions comentades de la majoria de problemes. Únicament s'ha obviat la resolució d'aquells exercicis que, o bé no eren d'una excessiva dificultat, o bé feien referència a situacions ja presentades i solucionades en problemes anteriors. A més, en tot moment s'ha adjuntat la solució d'aquells problemes tipus que permeten a l'alumne adquirir una destresa que pot ser aplicada en altres situacions. Els problemes que es troben solucionats es marquen amb un * en enunciar-los. En la mesura que ha estat possible, per aquells problemes la solució comentada dels quals no s'adjunta, s'ha procurat donar, al menys, el resultat final. Aquests problemes es marquen amb un †.

El fet d'acompanyar la solució dels exercicis és especialment útil per als problemes de modelització, els quals sovint presenten diferents interpretacions i múltiples solucions. En aquest sentit, val a dir que en alguns casos el model aquí presentat com a solució no és únic i pot haver d'alternatius.

Tarragona, febrer de 1998.

Índex

1 Problemes de modelització.

1. La refineria *

Una refineria compra dos tipus de crus C1 i C2. El preu de C1 és de c_{c1} pts/barril i el de C2 és de c_{c2} pts/barril. A més, cada dia com a molt pot disposar d'un total de M_{c1} i M_{c2} barrils per C1 i C2 respectivament. Amb aquests dos crus es fabriquen 3 tipus de productes: gasolina, querosè i fuel. La gasolina que fabrica està composta en un 80% pel cru C1 i en un 20% pel cru C2. Aquestes proporcions són de 65% i 35% per al querosè, i de 60% i 40% per al fuel. El preu de venda de cada producte és de p_g pts/barril per a la gasolina, de p_q pts/barril per al querosè i de p_f pts/barril per al fuel. A més, processar un barril de cru li suposa a la refineria un cost de cp_{c1} i cp_{c2} pts/barril per C1 i C2 respectivament. Sabent que per restriccions tècniques no es poden produir més de M_g barrils de gasolina, M_q de querosè i M_f de fuel, formular el problema que s'ha de solucionar per obtenir la política òptima de producció diària de la refineria.

2. Assignació de personal *

Una determinada planta química disposa d'un total de n tasques que poden ser realitzades per n operaris diferents indistintament. L'empresa, en funció del coneixement que té de cada operari, calcula uns coeficients $t_{ij}, i, j = 1, ..., n$ que representen el temps que es creu que l'operari i tardarà en fer la feina j. Es demana formular el problema que permet fer l'assignació òptima (entenent per òptima, la que representa un temps total mínim) d'operaris a tasques.

3. Planificació simple d'un reactor *

Un determinat producte químic és fabricat mitjançant un reactor que opera a través d'una producció per lots (batch). El temps requerit pel reactor per finalitzar cada un dels lots depèn de la quantitat de producte processada, i bé regit per la relació $t = 2P^{0.4}$, on t s'expressa en hores i P representa el total de producte en kg. Després de finalitzar un lot, cal tenir aturat el reactor unes 14 hores per fer les tasques de descàrrega, manteniment i nova càrrega. S'ha estimat que cada hora de funcionament del reactor té un cost de 6000 pts. També hi ha uns costos fixes (que inclouen l'emmagatzemament de la càrrega del reactor per al següent lot) de $100000P^{0.8}$ pts l'any (per tant, els costos fixes depenen del producte processat pel reactor). Sabent que el total de producte a obtenir en un any és de 150000 kg, i que el reactor pot estar en funcionament 24 hores al dia durant 320 dies l'any, es demana formular el problema per trobar la quantitat P que satisfà la demanda anual i minimitza els costos de producció. Plantegeu el problema només en funció de P.

4. Plantes de producció (I) *

Hem construït N plantes de fabricació d'un cert producte, l'esperança de vida de les quals serà de I anys. A cada planta disposem de dos mètodes de fabricació diferents. Els costos de fabricació d'una unitat de producte dins la planta j són de v_{j1} i v_{j2} amb el primer i segon mètode respectivament. Durant els anys que mantindrem les plantes en funcionament, hem de garantir una producció de D_i unitats de producte per al i-èssim any. A més, cada planta té al llarg de la seva vida un límit tècnic sobre el nombre total d'unitats de producte fabricades amb cada mètode. Aquest límit ve donat pels valors M_{1j} (mètode 1, planta j) i M_{2j} (mètode 2, planta j). Realitzeu la formulació del problema anterior de forma que minimitzem els costos de producció totals durant la vida efectiva de les plantes.

5. Balanç de masses *

Tenim un procés alimentat amb dos productes d'entrada A i B que donen lloc a un producte de sortida C. El procés es modelitza mitjançant l'equació $M_A + M_B = M_C$ (balanç de masses). Les masses dels fluxos dels productes B i C poden ser determinats mitjançant uns sensors. Per determinar la massa del flux de A, però, no disposem de cap sensor (ens hem volgut estalviar la seva instal·lació), i volem determinar-lo a partir dels valors mesurats per B i C en n instants de temps diferents $M_{B_i}, M_{C_i}, i = 1, ..., n$. Com obtindríem el millor valor de M_A? (entenent per millor, aquell que ens minimitza els errors totals en les n mesures segons l'equació del procés).

6. La mina *

En una mina de coure es disposa de quatre túnels d'excavació. Per cada tona mètrica de material extret a cada túnel, la proporció de residus i coure, i el cost d'extracció ve donat per la Taula 1.

Taula 1. Percentatge de residus, de coure, i cost d'extracció de cada tona de material segons el túnel.

	% residus	% coure	cost (pts)
Túnel 1	30	20	7000
Túnel 2	40	22	6500
Túnel 3	20	10	6000
Túnel 4	35	18	6300

La companyia que explota la mina vol determinar el tant per cent que ha d'extreure de cada túnel, de forma que minimitzi el cost d'extracció, i que es satisfaci que el percentatge de residus i de coure de cada tona mètrica extreta sigui en promig inferior al 29% i superior al 17% respectivament.

7. Transport d'un producte *

Disposem de n plantes productores d'un cert producte, cada una de les quals té emmagatzemades $a_i, i = 1, ..., n$ unitats del mateix. Aquestes unitats han de ser transportades fins m centres consumidors. Cada centre consumidor requereix $b_i, i = 1, ..., m$ unitats del producte.

Sabent que el cost de transport d'una unitat de producte del centre productor i al centre consumidor j és de c_{ij}, formuleu el problema per tal de transportar les unitats de producte amb un cost mínim (suposarem que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, és a dir, tot el producte emmagatzemat és requerit). Penseu com podríem solucionar aquest problema si no es verifiqués la igualtat anterior (és a dir, en els casos $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ i $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$).

8. Inversió d'un capital *

Una planta química ha de fer una inversió per adquisició i renovació de material valorada en 100 milions, per la qual cosa haurà de demanar un préstec a un banc. Les condicions del banc són que el préstec es pot amortitzar (s'han de tornar els diners deixats amb els interessos corresponents) en n anys, on n és enter i varia entre 10 i 20 anys, i el tipus d'interès depèn dels anys d'amortització i ve donat segons una fórmula $r(n)$. La companyia química tornarà el préstec en pagaments anuals p durant els n anys d'amortització, de forma que es trobi entre uns límits de $p_{min} \leq p \leq p_{max}$. L'empresa vol maximitzar els beneficis que obtindrà gràcies a la inversió en nou material, els quals avalua segons una fórmula $b(p, n)$, funció dels pagaments anuals i els anys d'amortització. Formuleu el problema de maximització deixant com a única incògnita els anys d'amortització del préstec n (cal escriure, doncs, els pagaments anuals p en funció de n).

9. Planificació dels dies de producció *

Una companyia disposa de dues plantes de producció A i B. Cada planta pot fabricar dos tipus de productes indistintament. La Taula 2 mostra la quantitat de cada producte que pot processar diàriament cada planta i el benefici que extreu de la seva venda.

Taula 2. Producte processat i benefici obtingut segons planta i producte.

	Producte (kg/dia)		Benefici (pts/kg)	
	1	2	1	2
Planta A	M_{A1}	M_{A2}	B_{A1}	B_{A2}
Planta B	M_{B1}	M_{B2}	B_{A1}	B_{A2}

A més, la companyia sap que, per les pròpies condicions del mercat d'aquests dos productes, no és possible vendre més de L_1 i L_2 kg. respectivament. Es demana relitzar la planificació conjunta de les dues plantes per a un any determinat (és a dir, determinar quants dies hauran de funcionar fabricant un o l'altre producte) de forma que es maximitzi el benefici de la companyia.

10. Plantes de producció (II) *

Volem construir N plantes de fabricació d'un cert producte, l'esperança de vida de les quals serà de I anys. Disposem de dos mètodes de fabricació diferents, els quals poden ser implantats indistintament a cada una de les plantes. El cost fixe d'implantació del primer mètode a la planta j és de f_{j1}, mentre que el d'implantació del segon mètode ve donat per f_{j2}. Per la seva banda, els costos de fabricació d'una unitat de producte dins la planta j són de v_{j1} i v_{j2} amb el primer i segon mètode respectivament. Durant els anys que mantindrem les plantes en funcionament, hem de garantir una producció de D_i unitats de producte per al i-èssim any.

Realitzeu la formulació del problema anterior de forma que minimitzem els costos de producció totals durant la vida efectiva de les plantes, considerant que podem instal·lar el primer mètode de fabricació fins a un màxim de M_1 vegades, i sota els dos supòsits següents:
a) Cada planta només pot tenir un sol mètode de fabricació.
b) Els dos mètodes poden ser implantats dins una mateixa planta.

11. El gasoducte *

Considerem un gasoducte de transport d'un determinat gas des d'uns centres de produccció fins a uns centres de demanda.

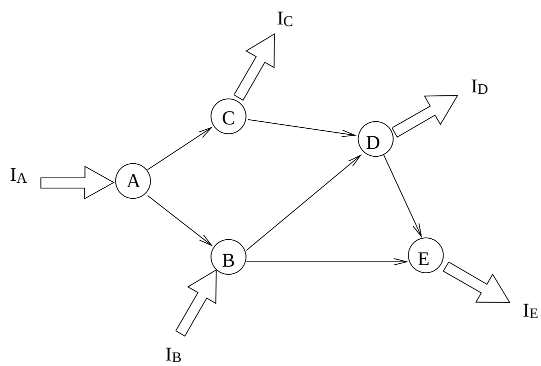

Figura 1. Topologia del gasoducte.

La topologia del gasoducte ve donada segons la Fig. 1. Tal i com s'observa, disposem de dos centres (o nodes) de producció (A i B) i de tres centres (o nodes) de demanda (C, D i E). La quantitat de gas produïda als centres A i B és respecivament de I_A i I_B unitats en un període de temps determinat, mentre que el consum a C, D i E és de I_C, I_D i I_E unitats durant el mateix període (suposarem que la xarxa es troba "balancejada", és a dir, que $I_A + I_B = I_C + I_D + I_E$). Sabent que cada una de les 6 canonades (associades als arcs de la xarxa de la Fig. 1) del gasoducte té un límit de u_{VW} unitats (on V representa el node origen i W representa el node destí de l'arc), i que el cost de transport d'una unitat de gas suposa un cost de c_{VW}, formuleu el problema que cal solucionar per tal de realitzar el transport del gas amb un cost total mínim.

12. Localització de plantes de producció *

Una companyia vol proveir mensualment un total de m centres de consum d'un determinat producte, i es planteja la possibilitat de construir fins a n plantes productores (en n localitzacions estratègiques diferents) per satisfer la demanda d'aquest producte. La companyia ha fet un estudi previ i disposa dels costos c_{ij} que li suposaria transportar una unitat de producte (aquesta unitat pot ser qualsevol, p. ex., un kg, una tona...) des de cada possible planta i fins al centre de consum j. Aquests costos c_{ij} la companyia els ha calculat en funció de la distància de cada planta als centres de producció. D'igual forma, la companyia sap el cost fixe f_i que li suposarà construir cada planta (els costos fixes depenen de la localització de cada planta, per això s'ha afegit el subíndex $_i$). Es demana:
a) Formular el problema que permeti a la companyia decidir quines plantes ha de construir, i com farà el proveïment mensual de b_j unitats del producte des de les plantes fins a cada centre de consum j, suposant que les plantes no tenen cap limitació de producció.

b) El mateix que en el cas anterior, però suposant ara que cada planta té un límit mensual de producció de a_i unitats de producte.

13. Aïllament tèrmic *

Una companyia vol recobrir una canonada cilíndrica que transporta un fluid calent amb un aïllant tèrmic. Se sap que la pèrdua de calor Q del fluid transportat per la canonada es regeix per la següent equació:

$$Q = \frac{A\Delta T}{x/k + 1/h_c}$$

on

$$\begin{aligned} A &= \text{Àrea de la canonada } (\text{m}^2) \\ \Delta T &= \text{diferència de temperatura promig entre el fluid i l'exterior de la canonada } (^\circ\text{C}) \\ x &= \text{gruix de l'aïllant tèrmic (m)} \\ h_c &= \text{coeficient de transferència de calor } (\text{Btu}/(\text{h}\cdot \text{m}^2\cdot{}^\circ\text{C})) \\ k &= \text{conductivitat tèrmica de l'aïllant } (\text{Btu }/(\text{h}\cdot \text{m}\cdot{}^\circ\text{C})) \\ Q &= \text{calor perdut (Btu/h)} \end{aligned}$$

El cost d'instal·lació de l'aïllant és de $c_0 + c_1 x$ pts/m^2, on c_0 i c_1 són valors coneguts. D'igual forma, sabem que els guanys que suposarà a l'empresa l'aïllant són de G pts/Btu (cada Btu no perdut li suposa un guany de G pts). A més, la canonada es troba transportant el fluid durant H hores cada any.

El temps de vida de l'aïllant és de 5 anys. La companyia demanarà un préstec a un banc per realitzar la seva instal·lació, préstec que serà amortitzat durant els 5 anys següents. El tipus d'interès que li carregarà el banc és del r%.

Es demana formular el problema per calcular el valor òptim de x (gruix de l'aïllant) per tal de maximitzar els guanys de la companyia durant cada un dels cinc anys de vida de l'aïllant. (Nota: per saber el que ha de pagar al banc cada any per amortitzar el préstec, podeu usar el mètode aplicat al problema 8).

14. Camions de transport *

En una determinada regió hi ha quatre plantes de producció i/o consum de dos productes diferents. Es disposa d'un total de 5 camions que fan el transport dels productes entre les plantes. El trajecte que fa cada camió ve donat per la Taula 3.

Taula 3. Plantes origen i destí del trajectes realitzats per cada camió.

	DE la planta	A la planta
Camió 1	1	2
Camió 2	1	3
Camió 3	2	3
Camió 4	3	4
Camió 5	4	2

Cada camió i pot transportar fins un màxim de M_i $i = 1, ..., 5$ kg de càrrega. Transportar un kg de cada producte $k = 1, 2$ té un cost de c_i^k pts per a cada camió i. Per la seva banda, cada planta i té un consum/producció de P_i^1 $i = 1, ..., 4$ kg del producte 1 i de P_i^2 $i = 1, ..., 4$ kg del segon producte. En el cas de que $P_i^k > 0$, això voldrà dir que la planta i produeix P_i^k kg del producte k, mentre que si $P_i^k < 0$ significarà que la planta consumeix P_i^k kg (si $P_i^k = 0$ la planta i ni consumeix ni produeix el producte k).

Es demana formular el problema que permeti fer el repartiment dels productes a cada planta, de forma que es minimitzin els costos de transport, tenint en compte que cada camió pot transportar, o bé només un dels dos productes, o bé els dos alhora (sempre i quan no es superi la seva capacitat màxima). (Nota: Aquest problema és una extensió del problema 11 del gasoducte. En aquell cas només calia transportar un producte —el gas—, mentre que ara hem de fer el repartiment de dos productes. Caldrà de nou usar en aquest cas una estructura de xarxa, amb certes modificacions per considerar els dos productes i la limitació dels camions).

15. Composició d'un pinso per animals *

Disposem d'una sèrie d'ingredients que volem mesclar per fabricar un pinso per animals. Aquests ingredients els podem classificar en dos tipus. Els del primer tipus es troben disponibles en quantitats contínues (podem agafar la quantitat —en kg— necessària). En tenim 10 d'aquests ingredients. Dels del segon tipus, però, no podem decidir la quantitat que en volem, ja que els tenim empaquetats i si obrim el paquet ens veiem obligats a usar-lo tot. Per tant l'únic que podem fer es dir si intervindran o no a la mescla. D'aquest segon tipus tenim 5 ingredients, i cada paquet té un pes de p_i $i = 1, ..., 5$ kg.

Sabem que el cost per kg per a cada un dels 10 ingredients del primer tipus és de c_i^1 $i = 1, ..., 10$ pts, mentre que el cost d'incloure o no a la mescla cada un dels 5 ingredients del segon tipus ens suposa un cost de c_i^2 $i = 1, ..., 5$ pts. També sabem que la proporció de greixos a cada ingredient és de a_i^1 $i = 1, ..., 10$ per als del primer tipus, i de a_i^2 $i = 1, ..., 5$ per als del segon tipus.

Sen's demana que determinem la composició de la mescla, de forma que obtinguem una quantitat de pinso entre P_l i P_u kg (on $P_l < P_u$), tot satisfent que la quantitat total de greix al pinso fabricat es trobi entre G_l i G_u kg (on $G_l < G_u$). Quin problema hauríem de formular?

16. Planificació de la producció d'un producte de demanda estacional *

Una companyia té una planta on es fabriquen dos productes diferents. Aquests productes tenen una demanda trimestral, i la companyia disposa d'un magatzem de capacitat M kg on emmagatzemar el material fabricat durant un trimestre. La quantitat demandada per al producte i i trimestre j és de D_j^i, $i = 1, 2$ $j = 1, ..., 4$ kg.

La companyia ha determinat que el cost de mantenir un kg de material (tant sigui d'un producte o de l'altre) li suposa un cost de T pts. A més, degut a les variacions del preu de mercat de les matèries primeres necessàries per fabricar ambdós productes, sap que el cost de producció d'un kg de cada producte varia segons el trimestre, i és de C_j^i pts/kg per al producte i i trimestre j. D'igual forma, degut a les limitacions de la planta, cada trimestre j no pot produir més de U_j^i kg del producte i.

Es demana plantejar el problema per tal de determinar la quantitat a produir i emmagatzemar cada trimestre d'un any determinat (suposarem i) que tot el producte venut passa abans pel magatzem, i no pot ser venut directament des de la planta de producció, i ii) que al principi (i final) de l'any el magatzem es troba (i s'ha de deixar) completament buit).

17. Planificació setmanal d'uns reactors *

Una companyia química disposa de r reactors, cadascun dels quals pot estar diàriament, o bé aturat, o bé operant a un règim de producció baix, mig o alt (mai en un dia estarà en dos règims diferents). El seu estat pot ser modificat cada dia. La quantitat de producte obtinguda de cada reactor j segons el règim de producció és de p_{B_j}, p_{M_j} i p_{A_j} unitats per dia, i el cost associat a cada règim és de c_{B_j}, c_{M_j} i c_{A_j} pts/dia. La companyia vol planificar la seva producció setmanal (7 dies), de forma que cada dia es garanteixi una producció de D unitats, i que, com a mínim, cada reactor estigui aturat un dia a la setmana per fer-li un manteniment. Formuleu el problema que haurà de solucionar la companyia per tal d'obtenir la política de producció de cost mínim.

2 Problemes de programació lineal.

18. Transformació a la forma estàndard *

Transformeu a la forma estàndard el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2,x_3} & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{ccccccc} 4 & \leq & 2x_1 & +x_2 & +\ x_3 & \leq & 20 \\ & & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 6 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 3 \quad x_3 \text{ lliure} \end{array}$$

19. Més problemes de transformació a la forma estàndard

Transformeu a la forma estàndard els següents problema de programació lineal (i si és possible, intenteu-los simplificar eliminant variables i/o restriccions).

a)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1 + 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{cccc} 2x_1 & +x_2 & \geq & 4 \\ 3x_1 & & \geq & 6 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{cccccc} 2 & \leq & 2x_1 & +3x_2 & \leq & 4 \\ 5 & \leq & 4x_1 & +6x_2 & \leq & 6 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 4 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & \dfrac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{x_3} \geq 10 \\ & 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + x_4 >= 10 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \text{ lliure} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{cccc} 3x_1 & +2x_2 & \leq & 5 \\ 2x_1 & -\ x_2 & \geq & 10 \end{array} \\ & -5 \leq x_1 \leq 5 \\ & -10 \leq x_2 \leq 10 \end{array}$$

20. Un problema de programació lineal "disfressat" *

Formular com a problema de programació lineal (i simplificar-lo tot el possible):

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \ln x_1 \\
\text{subj. a} & \\
 & x_1 x_2 x_3 \geq e^5 \\
 & \dfrac{x_1}{x_2} = x_3 \\
 & 0 < x_1 \leq e^2 \quad x_2 \geq e^4 \quad x_3 > 0
\end{array}
$$

Per què creus que els límits de les variables x_1 i x_3 s'han definit com $x_1 > 0$ i $x_3 > 0$, en comptes de $x_1 \geq 0$ i $x_3 \geq 0$?

21. Valor absolut a les restriccions *

Escriure com a problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
\text{subj. a} & \\
 & \begin{array}{cccccc} x_1 & +4x_2 & +x_3 & \geq & 5 \\ |3x_1 & -2x_2| & & \leq & 3 \end{array} \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Podríem tranformar-lo en un problema de programació lineal si la segona restricció fos $|3x_1 + 2x_2| \geq 3$?

22. Valor absolut a la funció objectiu*

Formular com a problema de programació lineal

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} & c^T|x| \\
\text{subj. a} & Ax = b
\end{array}
$$

sabent que totes les components c_i del vector de costos c verifiquen $c_i \geq 0$. (Nota: aquest problema és d'una certa dificultat).

23. Funció objectiu igual al màxim d'una sèrie de valors *

Una companyia vol minimitzar els costos de producció en una determinada planta. Té perfectament determinades les restriccions del problema, i sap que la funció objectiu és lineal. Ha encarregat a tres enginyers de la planta que determinin el vector de costos de la funció objectiu, i ha observat que tots ells han proporcionat tres vectors c_A, c_B i c_C semblants, però no iguals.

Per curar-se en salut, la companyia decideix optimitzar el següent problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{c_A^T x, c_B^T x, c_C^T x\} \\ \text{subj. a} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

D'aquesta forma, donat un punt x qualsevol, el seu valor de funció objectiu serà el que té un cost més elevat segons les estimacions del vector de costos dels tres enginyers.

La companyia, però, només disposa d'eines informàtiques per solucionar problemes de programació lineal. Aleshores, pot solucionar el problema anterior amb els paquets de programació lineal que té? Com hauria de transformar el problema?

24. Solució de problemes pel mètode gràfic †

Determinar de forma gràfica la solució dels següents problemes de programació lineal:

a)
$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure} \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure} \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3/2 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

25. El coeficient de la funció objectiu *

Determineu per a quin rang de valors del coeficient p té un únic punt òptim, té òptims alternatius, o es il·limitat el següent problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & px_1 - x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Feu el mateix estudi que abans considerant ara la funció objectiu $px_1 + x_2$.

26. Minimització d'una folga *

Solucioneu de forma gràfica el següent problema de programació lineal:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

I si la funció objectiu fos $\max x_4$?

27. Transformació en restriccions de desigualtat *

Sovint interessa considerar la regió factible d'un problema de programació lineal com el conjunt de punt formats per la intersecció d'un nombre finit de semiespais tancats, és a dir, com el conjunt de punts definit per $\{a_1^T x \leq b_1, \ldots, a_m^T x \leq b_m\}$. No sempre, però, trobem la nostra regió factible expressada de la forma anterior, ja que podem tenir restriccions d'igualtat i de $\geq$. Penseu com es pot transformar el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subj. a} \quad & \\ & a_1^T x = b_1 \\ & a_2^T x \geq b_2 \\ & a_3^T x \leq b_3 \end{aligned}$$

en un d'equivalent de forma que totes les restriccions siguin de $\leq$. Feu-ho sense afegir variables artificials.

28. Aplicació del mètode del símplex *

Solucioneu aplicant el mètode del símplex el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{x_1,x_2,x_3,x_4} & x_1 - x_3 + x_4 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -3 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & 6 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 5 \end{array} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,...,4 \end{array}$$

29. Un altre problema per aplicar el mètode del símplex *

Solucioneu aplicant el mètode del símplex el problema:

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\min_{x_1,x_2,x_3,x_4} & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & & & \leq & 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = & 3 \end{array} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,...,4 \end{array}$$

30. Més problemes per practicar amb el mètode del símplex †

Solucioneu aplicant el mètode del símplex els següents problemes de programació lineal.

a)

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_3 - x_4 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,...,4 \end{array}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 + x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& x_1 + x_2 \geq 5 \\
& -x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
& 4 \geq x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

31. I encara més problemes per usar l'algorisme del símplex

Mireu de solucionar els problemes de l'exercici 24, aplicant ara l'algorisme del símplex en comptes del mètode gràfic. Caldrà que transformeu prèviament els problemes a la forma estàndard. Comproveu com obteniu els mateixos resultats que amb el mètode gràfic.

32. El mètode Big-M*

Hi ha una tècnica per combinar les fases I i II del mètode del símplex anomenada Big-M. Aquesta tècnica consisteix en afegir uns costos elevats M a les variables artificials que s'afegeixen a la fase I, i iterar fins a obtenir l'òptim. Si M és prou gran, l'òptim que obtindrem directament a la fase I ja serà l'òptim del problema original. És a dir, donat el problema

$$
\begin{aligned}
\min_x \quad & c^T x \\
\text{subj. a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

afegim unes variables artificials y i solucionem

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x + M(\sum_{i=1}^{m} y_i) \\ \text{subj. a} \quad & Ax + y = b \\ & x \geq 0 \;\; y \geq 0 \end{aligned}$$

Aplicant aquesta tècnica solucioneu de nou el problema de programació lineal de l'exercici 28, usant un valor de $M = 5$, i observeu com el resultat obtingut és el mateix en ambdós casos.

33. Aplicació del símplex en forma matricial *

En un problema de 4 variables (totes elles afitades inferiorment per 0) i 3 restriccions d'igualtat sabem que la base òptima ve donada per la matriu:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

corresponent a les tres primeres variables, i que els costos de les variables bàsiques són de $c_B^T = (1 \;\; 1 \;\; 1)$, i el vector de termes independents és $b^T = (5 \;\; 4 \;\; 4)$.

Es demana:

a) Calculeu la solució òptima del problema.

b) Calculeu la solució òptima del problema dual.

c) Determineu el rang de valors que pot tenir el cost c_4 de la quarta variable per garantir que realment sigui una variable no bàsica, considerant que la columna de la quarta variable és $A_4^T = (1 \;\; 0 \;\; 1)^T$.

d) Suposem que s'introdueix una perturbació en el vector de termes independentes de forma que el nou vector és $\tilde{b}^T = (6 \;\; 4 \;\; 4)$. Continua essent òptima la base que ara tenim? En cas afirmatiu, comproveu que l'augment del valor de la funció objectiu en modificar el vector de termes independents correspon al producte de la perturbació del terme de la dreta per la solució òptima dual. Comproveu com aquest efecte també es verifica si considerem el vector de termes independents $\hat{b}^T = (7 \;\; 4 \;\; 4)$ (en general es verifica sempres aquest efecte).

34. Obtenció del dual *

Obtingueu el dual del problema de programació lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subj. a} \quad & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

i comproveu que el punt $y^T = c_B^T B^{-1}$ (on c_B i B corresponen als costos bàsics i matriu bàsica òptims) és un punt factible dual.

35. El dual del dual és igual al primal *

Comproveu que el dual del dual del problema de programació lineal:

$$(P)\qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

és igual al problema original (P). És a dir, que si donat (P), trobem el seu dual (D), i tot seguit trobem el dual de (D), que podem anomenar (DD), doncs aleshores tenim que $(DD) \equiv (P)$.

36. Solució del primal i del seu dual *

Solucioneu el següent problema de programació en la forma primal que es presenta:

$$(P)\qquad \begin{array}{lrrcr} \min & \multicolumn{4}{l}{4x_1 - 8x_2} \\ \text{subj. a} & & & & \\ & -2x_1 & -2x_2 & \geq & -1 \\ & -x_1 & +4x_2 & \geq & -1 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Després de transformar-lo convenientment, solucioneu també el seu dual. Comproveu que s'obté en amdbós casos el mateix valor de funció objectiu, i adoneu-vos de la simetria que presenten les taules òptimes primal i dual.

37. Un paràmetre a la funció objectiu *

Donat el problema de programació lineal següent:

$$\begin{array}{lrrrrrcr} \min\limits_{x_1,x_2} & \multicolumn{7}{l}{-\,px_1 - x_2} \\ \text{subj. a} & & & & & & & \\ & -x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 6 \\ & 4x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = & 20 \\ & 2x_1 & -x_2 & & & +x_5 & = & 6 \\ & \multicolumn{7}{l}{x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 5} \end{array}$$

on $p \in \mathbb{R}$, se sap que a l'òptim les variables bàsiques són x_1, x_2 i x_5. Contesteu el següent:

a) Trobar la solució òptima del problema i el valor de la funció objectiu en aquest punt òptim usant les taules del símplex (cal obtenir la taula del símplex al punt òptim).

b) Com al cas anterior, trobar la solució òptima del problema i el valor de la funció objectiu en aquest punt òptim, però sense fer ús de les taules del símplex.

c) Formuleu el problema dual associat al problema anterior. Trobeu la solució òptima dual, i el valor de la funció objectiu dual en aquest punt òptim de les dues formes següents: en primer lloc, usant la informació de la taula del símplex òptima, i a continuació de nou sense fer ús de les taules del símplex. Quina relació hi ha entre els valors òptims de les funcions objectius primal i dual calculades?

d) Dins de quin interval podem bellugar p de forma que la solució actual continua essent òptima? Que ocorre quan p assoleix un valor que es troba just en un extrem d'aquest interval?

e) Representeu gràficament el problema primal tot detallant la solució òptima quan $p = 1$. Interpreteu ara geomètricament que ocorre quan p assoleix un valor que es troba en un extrem de l'interval calculat a l'apartat anterior.

f) Suposem que ens hem equivocat en introduir el terme de la dreta del problema, i en comptes de ser $\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$, resulta que era $\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$. Solucioneu el problema de minimització amb aquest nou vector.

38. Anàlisi de sensibilitat *

Donat el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + cx_2 + x_3 \\ \text{subjecte a} & \\ & \begin{array}{cccccc} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 8 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 3 \end{array} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1 \dots 3 \end{array}$$

se'ns diu que la solució òptima és $x_1^* = 3$, $x_2^* = x_3^* = 0$.

a) Sense usar les taules del símplex, indiqueu quin és el rang de valors de c per tal que la solució anterior continui essent òptima.

b) Com es veuria afectat el valor de la funció objectiu si el vector de termes independents fos $\begin{pmatrix} 7.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$?

39. Classes d'Optimització *

Dues companyies químiques C1 i C2 us ofereixen la possibilitat d'impartir-los un curs d'optimització d'una setmana, amb tan mala sort que les dates en que hauríeu d'impartir el cursos són les mateixes. Per tant heu de decidir quantes hores impartireu a cada companyia (siguin x_1 i x_2 el nombre d'hores impartit a C1 i C2 respectivament). La companyia C1 paga l'hora a 5 mil pts, mentre que la companyia C2 us ofereix P mil pts/hora (on P és un valor indeterminat). Cada hora de curs per a C1 us suposa 4 hores d'estudi previ, mentre que per a cada hora de C2 us calen 2 de preparació. D'aquí a que comencin els cursos disposeu d'unes 120 hores per a preparar-vos-els. A més, el nombre d'hores total que podreu impartir (x_1 més x_2) és com a molt de 40 hores (una setmana laboral). Considerarem que podeu impartir un nombre qualsevol d'hores x_1 i x_2, sempre que siguin valors positius (no importa, doncs, que siguin valors fraccionaris, o molt propers a 0).

a) Plantegeu el problema de programació lineal que heu de solucionar per tal de saber quantes hores heu d'impartir a cada empresa de forma que maximitzeu el vostre benefici, tot tenint en compte les restriccions de nombre d'hores de preparació i nombre d'hores d'impartició.

Transformeu-lo a la forma estàndard, com a problema de minimització.

b) Determineu quin serà el repartiment òptim d'hores x_1 i x_2 en funció del paràmetre P (el que us pagui la companyia C2 en mils pts/hora). Feu-ho usant les taules del símplex.

c) Comproveu els resultats obtinguts a l'apartat b, usant ara el mètode gràfic de resolució.

d) En el cas de que el preu de curs de la companyia C2 sigui de $P = 3$ mils pts/hora, determineu què és més rentable per a vosaltres: que s'incrementi en una hora la setmana laboral (nou límit de 41 hores) o que s'incrementi en una hora el nombre d'hores que podeu dedicar a preparar els cursos (nou límit de 121 hores)? Raoneu la vostra resposta.

40. Aplicació del mètode de l'escalat afí primal *

Realitzeu dues iteracions del mètode de l'escalat afí primal considerant els dos problemes presentats al final d'aquest enunciat i els punts inicials factibles i interiors indicats (cal que convertiu abans els problemes a la forma estàndard). Useu un valor de $\rho = 0.95$ per escurçar la longitud de pas α. Mostreu també en $\mathbb{R}^2$ la regió factible del problema i observeu com el mètode ens proporciona punts cada cop més propers a la solució òptima (la qual va ser obtinguda pel mètode gràfic al problema 24). Per realitzar aquest exercici és convenient usar algun programa (tipus Matlab, Octave ...) o calculadora que ens permeti fer operacions matricials per estalviar temps de càlcul.

$$a)\quad \begin{array}{ll} \min & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 4x_1 - 2x_2 \le 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \ge 1 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{ll} \min & 3x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ & x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{array}$$

Al problema a) preneu com punt inicial $x_0 = (1/2 \;\; 1/2 \;\; 4 \;\; 5/2 \;\; 1)^T$, i al problema b) preneu $x_0 = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 5)^T$ (les components de més corresponen a les folgues que heu d'afegir per transformar els problemes a la forma estàndard).

41. $Pc = 0$ al mètode de l'escalat afí primal *

(Nota: aquest problema comporta una certa dificultat. En cas de dubte, consulteu la solució proposada).

En desenvolupar el mètode de l'escalat afí primal (considerant el problema en forma estàndard $\min\ c^Tx$ subj. a $Ax = b,\ x \ge 0$) s'utilitza una matriu de projecció $P = \mathbb{1} - A^T(AA^T)^{-1}A$. Aquesta matriu serveix per projectar qualsevol vector sobre el subespai nul de la matriu de restriccions del problema A (això vol dir que el vector projectat v verifica que $Av = 0$). Aquesta matriu P és usada per trobar una direcció d_x que sigui factible i de descens (és a dir, que garanteixi que $Ad_x = 0$ i $c^Td_x < 0$, millorant el valor de la funció objectiu al nou punt tot preservant la factibilitat). A l'algorisme de l'escalat afí primal es pren $d_x = -Pc$, i d'aquesta forma garantim que $c^Td_x < 0$, excepte, però, en el cas "estrany" on $Pc = 0$ (en aquest cas $c^Td_x = 0$). Que Pc sigui igual a 0 significa que la projecció de c sobre el subespai nul de A és 0. O el que és el mateix, que c pertany a l'espai de rang o imatge de A, i per tant existeix un vector $\lambda \in \mathbb{R}^m$ (considerant que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) tal que $\lambda^TA = c^T$ (és a dir, el vector de costos c és combinació lineal de les files de la matriu de restriccions). Es demana que mostreu que un problema on succeeix el comentat anteriorment verifica que qualsevol punt factible és òptim.

A més, mireu de comprovar com el dit anteriorment és cert estudiant el problema

$$\begin{array}{rl} \min & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

3 Problemes de programació no lineal.

42. Conjunts convexos *

Raoneu si els següents conjunts són o no convexos:
a) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}\quad b \in \mathbb{R}^m\}$
b) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}\quad b \in \mathbb{R}^m\}$
c) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
d) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| \leq 1\}$
e) $C = C_1 \cup C_2$, on C_1 i C_2 són conjunts convexos.
f) $C = C_1 \cap C_2$, on C_1 i C_2 són conjunts convexos.

43. Funcions convexes *

Aplicant la definició de funció convexa, comproveu que:
a) Si f_1 i f_2 són funcions convexes, $f_1 + f_2$ és també una funció convexa.
b) Si f és una funció convexa, af és convexa $\forall a \geq 0$.

44. Restriccions no lineals d'igualtat

Sabem que si $g(x)$ és una funció convexa, aleshores $g(x) \leq c$ defineix un conjunt de punts convex per a tot $c \in \mathbb{R}$. Creieu que això també és cert si la restricció fos $g(x) = c$. Raoneu-ho trobant algun contraexemple.

45. Terme diagonal negatiu *

Mostreu que si una matriu quadrada H té un terme diagonal negatiu aleshores no pot ser semidefinida positiva. Recordeu que una matriu H és semidefinida positiva si $\forall x\ x^T Hx \geq 0$.

46. Determinació d'uns paràmetres per garantir la convexitat *

Determineu quins valors poden prendre els paràmetres p i q de la següent funció:

$$f(x, y) = q \ln(x^2) + \sin(py)$$

per tal que garantim que sigui convexa en algun subconjunt de $\mathbb{R}^2$.

47. El mínim global *

Si apliquéssim un determinat algorisme d'optimització al problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^4 + 3y^2 - 2xy - 4x + 2y \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \ln(x+y) \geq 0 \\ & x^2 + y^2 \leq 20 \\ & x \geq 1/2 \quad y \geq 1/2 \end{aligned}$$

i aquest ens donés un determinat punt solució, podríem garantir que aquest correspon a un mínim global?

48. Punts estacionaris *

Estudieu els següents problemes de minimització sense restriccions: trobeu els punts estacionaris i comproveu si són o no mínims locals fent ús de les condicions suficients i necessàries d'optimalitat.

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \min\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + xy \\ &\text{b)} \quad \min\ x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 \\ &\text{c)} \quad \min\ -e^{-(x^4+y^4)} \\ &\text{d)} \quad \min\ x^2 - y^4 \end{aligned}$$

49. Resolució del problema de balanç de masses

Solucioneu el problema d'optimització d'una variable que obtinguéreu en formular el problema 5 (podeu usar la solució proposada, si voleu). Observeu com la massa òptima M_A obtinguda correspon a la mitjana dels termes $M_{B_i} - M_{C_i}$ (és a dir, $\sum_{i=1}^{n}(M_{B_i}/n - M_{C_i}/n)$).

50. Cerca lineal usant el mètode de Fibonacci *

Donada la funció

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 + \ln(\frac{1}{x+1})$$

comproveu que aquesta té un únic mínim a l'interval [0,5]. Un cop comprovat això, apliqueu el mètode de Fibonacci per tal de donar un interval de longitud igual o menor a 1.0 dins el qual es trobi aquest valor mínim.

51. I ara usant el mètode de la secció àuria *

Considereu de nou la funció del problema 50 anterior, i el mateix interval inicial [0,5]. Doneu un interval d'incertesa de longitud menor o igual a 1, usant ara el mètode de la secció àuria.

52. I com que no pot haver dos sense tres... *

Considereu de nou la funció del problema 50. Trobeu, usant el mètode de Newton primer i el de la secant després, una aproximació (de 6 xifres decimals correctes) del punt òptim. Per al mètode de Newton podeu usar com a punt inicial $x_0 = 4$, mentre que per al de la secant podeu provar amb $x_0 = 4$, $x_1 = 3$.

53. El mètode de Newton no té convergència global *

Un dels desavantatges del mètode de Newton és que no té convergència global (és a dir, podem generar una seqüència de punts que no arribi mai al punt òptim). Comproveu com això succeeix realment amb la funció $f(x) = 2/3\ |x|^{3/2}$, prenent com punt inicial $x_0 = 1$ (aquesta funció te el punt mínim global a $x^* = 0$).

54. Direccions perpendiculars al mètode del gradient *

El mètode del gradient genera una seqüència de punts $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)^T$ per tal de minimitzar la funció $f(x)$. En el cas que la funció a minimitzar sigui quadràtica (és a dir, $f(x) = 1/2\ x^T Q x - b^T x$) es pot calcular anàliticament la longitud de pas α, i aquesta ve determinada per $\alpha = (\nabla f(x_k) \nabla f(x_k)^T)/(\nabla f(x_k) Q \nabla f(x_k)^T)$. Per a aquest cas particular, comproveu com dues direccions successives són perpendiculars (és a dir, comproveu que $\nabla f(x_k)$ i $\nabla f(x_{k+1})$ són perpendiculars).

55. Aplicació del mètode del gradient *

Donades les dues funcions següents:

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1 - 2x_2 \qquad\qquad f_2(x) = 5x_1^2 + x_2^2 - 2x_2$$

i) Comproveu que les dues tenen el mateix punt mínim.
ii) Digueu quina funció tindrà una convergència més lenta si apliquem el mètode del gradient. Raoneu la resposta.
iii) Realitzeu dues iteracions del mètode del gradient amb cada funció, prenent en ambdós casos com punt inicial $x_0 = (2\ \ 2)^T$.
iv) Comproveu que les direccions que heu obtingut (per a cada problema) són perpendiculars.

56. El mètode de Newton aplicat a funcions quadràtiques *

Una de les propietats del mètode de Newton per minimitzar funcions és que, quan s'aplica a funcions quadràtiques, troba el punt òptim en una iteració. Això és degut a que el mètode de Newton es basa en fer una aproximació quadràtica de la funció a minimitzar a cada iteració, trobant aleshores el punt que anul·la el gradient d'aquesta aproximació (és a dir, trobant el punt òptim exacte de l'aproximació). Quan la funció original ja és quadràtica, l'"aproximació" ja no és tal, ja que coincideix amb la funció original. En aquest cas és clar que, quan trobem el punt que anul·la el gradient, estem calculant el punt òptim. Per comprovar experimentalment aquest fet, apliqueu el mètode de Newton a les dues funcions del problema 55 anterior, i observeu com trobeu l'òptim en una iteració.

57. El mètode SUMT, funcions convexes, i el mètode de Newton *

Existeix un mètode de programació no lineal anomenat SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique, popularitzat per Fiacco i McCormick) consistent en substituir un problema de programació no lineal amb restriccions per la resolució successiva de problemes sense restriccions. Així, donat el problema general;

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{subj. a} & \\ & h_i(x) = 0 \quad i = 1, ..., m \\ & g_j(x) \geq 0 \quad j = m+1, ..., p \end{array}$$

construim el següent problema sense restriccions (anomenat funció de penalització):

$$P(x, \rho) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x) + \rho \sum_{j=m+1}^{p} \frac{1}{g_j(x)}$$

on $\rho \in \mathbb{R}$. La idea del mètode és inicialment considerar un valor de ρ gran i minimitzar la funció $P(x, \rho)$. Després es disminueix ρ i es torna a solucionar el nou problema, prenent com punt inicial el punt solució del problema anterior, i així fins a arribar a un valor de ρ molt proper a 0. Fixem-nos que en el nou problema sense restriccions, un punt que no verifiqui que $h_i(x) = 0$ penalitzarà molt el valor de $P(x, \rho)$ quan $\rho \to 0$. Igualment, el terme $\frac{1}{g_j(x)}$ de $P(x, \rho)$ evita que ens atansem a $g_j(x) = 0$, i així garantim que sempre tindrem punts que satisfaran que $g_j(x) \geq 0$. Això fa que, en el límit, les solucions dels successius problemes sense restriccions satisfacin les restriccions del problema original, i siguin, doncs, factibles. Aquests termes $h_i^2(x)$ i $\frac{1}{g_j(x)}$ en que es transformen les restriccions originals s'anomenen penalitzacions.

Tenint en compte l'exposat anteriorment, i donat el problema de programació no lineal

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x_1, x_2} & \frac{x_1^2}{10} - \ln(x_1 + x_2 + 2) \\ \text{subj. a} & \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

contesteu a les següents qüestions:

a) Comproveu si la funció objectiu és o no convexa?

b) Formuleu la funció de penalització corresponent a la primera iteració del mètode SUMT de Fiacco i McCormick, amb $\rho = 1$ i penalitzacions inversament proporcionals ($\frac{1}{g_j(x)}$).

c) Considereu ara una nova penalització (anomenada *logarísmica*) que s'aplica a restriccions del tipus $g(x) \geq 0$, l'expressió de la qual és $-\ln g(x)$. A l'igual que a l'apartat anterior, escriviu la nova funció de penalització del mètode SUMT usant la nova penalització logarísmica que acabem de definir per a totes les restriccions de desigualtat. Raoneu també per què creieu que aquesta funció $-\ln g(x)$ es comporta com una penalització, i compareu-la amb la penalització inversament proporcional $\frac{1}{g_j(x)}$.

d) Comproveu que la funció de penalització del mètode SUMT formulada a l'apartat c) és una funció convexa **dins de la regió factible**. Donada la seva convexitat, quin mètode diferencial de minimització sense restriccions creieu convenient usar, i per què? (NOTA: per comprovar la convexitat de la funció de penalització us pot ser útil tenir en compte que si tenim una funció f tal que $f = f_1 + f_2$, aleshores $\nabla^2 f = \nabla^2 f_1 + \nabla^2 f_2$, on ∇^2 denota la matriu hessiana, i que si H_1 i H_2 són matrius (semi)definides positives aleshores $H_1 + H_2$

és també (semi)definida positiva).

e) Realitzeu una iteració del mètode de Newton amb la funció de penalització del SUMT de l'apartat c), prenent com punt inicial $x_1 = 2$ i $x_2 = 1$. Comproveu que el nou punt millora el valor de funció objectiu.

58. Àrea de dos quadrats *

Volem determinar l'àrea mínima de dos quadrats, els costats dels quals tenen una longitud de x_1 i x_2 respectivament, de forma que la suma d'aquestes longituds $(x_1 + x_2)$ sigui igual a un determinat valor a. Trobeu els valors x_1 i x_2 que minimitzen l'àrea que ocuparan els dos quadrats. Feu-ho de dues formes: i) primer considerant un problema sense restriccions (fent el canvi de variable $x_2 = a - x_1$); ii) en segon lloc, aplicant el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Observeu com en ambdós casos s'obté el mateix resultat. (Nota: no cal afegir les restriccions de no-negativitat $x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$, ja que, com s'observarà, són inactives al punt òptim, i d'aquesta forma simplifiquem el problema).

59. Volum màxim d'un cilindre *

Volem construir un cilindre metàl·lic de volum màxim, de forma que la seva superfície sigui igual a 6π. Contesteu el següent:

i) Plantegeu el problema amb restriccions que cal solucionar.
ii) Solucioneu el problema usant el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Podeu eliminar les restriccions de no-negativitat sobre les dimensions del cilindre, ja que a l'òptim no són actives, com podreu observar. D'aquesta forma evitem treballar amb restriccions de desigualtat, tot simplificant el problema.
iii) Solucioneu el problema amb l'ajut del paquet Lingo (o un altre d'equivalent), considerant ara les restriccions de no-negativitat de les variables. Comenteu el que observeu (Nota: la sortida de Lingo —i de la majoria de paquets d'optimització— a part del valor de les variables i restriccions, dóna també els valors dels multiplicadors λ de les restriccions d'igualtat i μ de les de desigualtat. Lingo anomena als multiplicadors "dual price", i es troben a la vora del valor de cada restricció).

60. Obtenció de les condicions d'òptim al mètode del símplex *

(Nota: aquest problema comporta una certa dificultat. Si teniu dubtes, consulteu la solució proposada).

El problema de programació lineal $\{\min \; c^T x \;\; \text{subj. a } Ax = b, \; x \geq 0\}$ (suposarem que A és de rang complet, és a dir, les restriccions són linealment independents) pot ser solucionat mitjançant l'algorisme del símplex, el qual es basa en l'obtenció de successives solucions bàsiques $x^T = (x_B^T \;\; x_N^T), \; x_B \in \mathbb{R}^m, x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ fins a obtenir una d'òptima. Considerant una solució bàsica qualsevol no degenerada (és a dir, $x_B > 0$ i $x_N = 0$), deduiu, usant les condicions de Kuhn-Tucker, les condicions necessàries que hauria de satisfer si fos un punt òptim, i comproveu que equivalen a les ja conegudes del mètode del símplex.

61. La funció de cost d'un reactor *

S'ha estimat que el cost diari (comptabilitzant amortització, manteniment, etc.) d'un tipus de reactor és funció d'un grau de conversió que oscil·la entre 0 i 1 (com més proper a 1, millor és la qualitat del reactor) i del seu volum (en unes unitats qualsevols). Aquesta funció de cost és $cost(x, y) = e^x y^4$, on x és el grau de conversió i y és el volum. Per altra banda, el benefici del producte obtingut diàriament també és funció d'aquests dos paràmetres i ve donat per $guanys(x, y) = 100y^2(1 + x)$. Plantegem el següent problema per obtenir els valors de x i y (qualitat i volum del reactor) que ens permeten obtenir el màxim benefici amb el mínim cost:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & e^x y^4 - 100y^2(1 + x) \\ & 0 \le x \le 1 \\ & 0 \le y \end{aligned}$$

Responeu les següents qüestions:

a) És convexa la funció objectiu del problema? Podem, doncs, garantir que l'òptim trobat és un òptim global?

b) Considerant que estem al punt $(x, y) = (0, 1)$, comproveu que la direcció de moviment $(d_x, d_y) = (1, -0.5)$ és de descens (és a dir, que verifica la condició de descens).

c) Podem escriure el problema de la següent forma equivalent

$$\min_{x,y} \quad e^x y^4 - 100y^2(1 + x) \quad \text{subjecte a} \quad x \le 1, \quad -x \le 0, \quad -y \le 0$$

tenint ara tres restriccions de desigualtat. Sabent que a l'òptim $x > 0$ i $y > 0$ (és a dir, la 2a i 3a restriccions són inactives), trobeu quin punt és candidat a ser solució del problema (qualitat i volums òptims). **Nota:** com que únicament heu d'indicar quin punt és candidat, només heu d'utilitzar les condicions necessàries. I d'aquestes, considereu només les de 1r ordre per simplificar la resolució.

62. Aplicació del mètode del gradient reduït *

Donat el problema de programació no lineal (amb funció quadràtica i restriccions lineals)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_3 - 3x_1 + 2x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_i \ge 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

realitzeu els següents apartats:

i) Comproveu que el punt $x^* = (3\ 0\ 2\ 5)^T$ i els multiplicadors $\lambda^* = (-1\ 0)^T$ i $\mu = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ (per a les restriccions d'igualtat i desigualtat respectivament), satisfan les condicions necessàries i suficients d'optimalitat del problema, amb el qual podem concloure que $x^* = (3\ 0\ 2\ 5)^T$ és l'òptim del nostre problema.

ii) Feu dues iteracions del mètode del gradient reduït començant a iterar des del punt $x^0 = (0\ 2\ 3\ 1)^T$.

iii) Feu una iteració del mètode del gradient reduït començant a iterar des del punt $x^0 = (1\ 1\ 3\ 2)^T$, i considerant que x_1 i x_2 són les variables bàsiques (o dependents).

63. Transport d'un fluid *

Disposem d'una xarxa de transport d'un fluid tal i com mostra la Fig. 2.

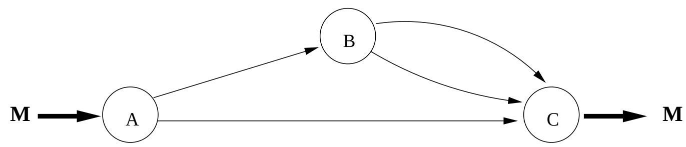

Figura 2. Xarxa de transport d'un fluid

Al node A s'injecta un flux de M $\mathrm{lb_m/s}$, el qual ha de sortir pel node C. Suposem que el cost de transport de x $\mathrm{lb_m/s}$ per una canonada és de x^2 mils de pts, i que la capacitat de cada canonada és de M $\mathrm{lb_m/s}$. Contesteu les següents qüestions

a) Plantegeu el problema que cal solucionar per trobar la política de distribució òptima per les quatre canonades.
b) Raoneu per què podem eliminar una restricció i els límits de les variables. Escriviu la nova formulació havent eliminat la restricció associada al node C, i sense límits a les variables.
c) Solucioneu el problema obtingut a l'apartat b).
d) Podem garantir que l'òptim trobat és un mínim global? Raoneu-ho.
e) Realitzeu dues iteracions del mètode del gradient reduït amb el problema formulat a l'apartat b), considerant ara els límits inferiors de les variables $x \geq 0$, i que $M = 10$ $\mathrm{lb_m/s}$. Preneu al punt inicial els fluxos entre els nodes (A,C) i (A,B) com variables dependents (o bàsiques). Considereu que en aquest punt inicial els fluxos actuals factibles són de 10 per a la canonada que comunica A i C, i de 0 per a la resta (obvieu el fet que la base inicial és degenerada).

4 Solucions dels problemes de modelització.

Solució del problema 1.

En aquest problema volem maximitzar els beneficis de la refineria. Aquests beneficis vénen donats pel guany obtingut en la compra de gasolina, querosè i fuel, menys els costos de compra i processat dels crus. Així, si denotem per

$$\begin{aligned} x_{c1} &= \text{barrils/dia comprats de cru C1} \\ x_{c2} &= \text{barrils/dia comprats de cru C2} \\ x_g &= \text{barrils/dia fabricats de gasolina} \\ x_q &= \text{barrils/dia fabricats de querosè} \\ x_f &= \text{barrils/dia fabricats de fuel} \end{aligned}$$

la funció objectiu a maximitzar pot ser escrita com:

$$f_{obj} = (p_g x_g + p_q x_q + p_f x_f) - \big((c_{c1} + cp_{c1})x_{c1} + (c_{c2} + cp_{c2})x_{c2}\big)$$

Les restriccions del problema ens han de relacionar el nombre de barrils de cada producte amb el de crus. La quantitat total de cru C1 requerida ve donada per:

$$x_{c1} = 0.80x_g + 0.65x_q + 0.60x_f$$

Anàlogament escriuríem l'equació per al cru C2.

Imposant els límits sobre el màxim que podem comprar i produir, el problema a solucionar pot ser formulat com:

$$\begin{aligned} \max \quad & (p_g x_g + p_q x_q + p_f x_f) - \big(c_{c1} + cp_{c1})x_{c1} + (c_{c2} + cp_{c2})x_{c2}\big) \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_{c1} = 0.80x_g + 0.65x_q + 0.60x_f \\ & x_{c2} = 0.20x_g + 0.35x_q + 0.40x_f \\ & 0 \le x_{c1} \le M_{c1} \le , \quad 0 \le x_{c2} \le M_{c2} \\ & 0 \le x_g \le M_g \ , \quad 0 \le x_q \le M_q \ , \quad 0 \le x_f \le M_f \end{aligned}$$

La formulació anterior podria ser simplificada eliminant les variables x_{c1} i x_{c2}, substituint-les per $0.80x_g + 0.65x_q + 0.60x_f$ i $0.20x_g + 0.35x_q + 0.40x_f$ respectivament. El nou problema tindria ara només 3 variables.

Cal fer notar que en aquest problema pot donar-se el cas que el nombre de barrils comprats/fabricats no sigui un nombre enter. En aquest cas això no és un problema. De fet podem pensar que és factible produir o comprar una fracció de barril. Fins i tot si aquesta suposició no pot ser feta, podríem arrodonir la solució fraccionària fins obtenir una entera. En aquest cas la solució entera no podríem assegurar que és òptima, però donat que el nombre de barrils comprats/fabricats és elevat, segur que ens donaria un valor de funció objectiu molt proper a l'òptim.

Solució del problema 2.

Considerem les n^2 variables x_{ij}, que podran prendre els valors 0 si la persona i no està assignada a la tasca j, o 1 en cas contrari. Ara directment podem formular el problema com:

$$\begin{aligned}
\min_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \\
\text{subj. a} \quad & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, ..., n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

En aquest cas les equacions $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ forcen a que cada una de les tasques només pugui ser realitzada per una persona. Per la seva banda, les equacions $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ ens obliguen a que una persona només pugui fer una tasca. Cal afegir que les restriccions $x_{ij} \in \{0, 1\}$ poden ser substituïdes en aquest cas per $x_{ij} \geq 0$, donada l'estructura de la matriu de restriccions del problema (aquesta verifica que el determinant de qualsevol base sempre val +1 o -1, amb el qual les solucions que troben sempre seran enteres, i per tant $x_{ij} \in \{0, 1\}$)

Solució del problema 3.

En aquest cas hem de minimitzar els costos fixes c_F i els de funcionament c_f durant un any:

$$\begin{aligned}
f_{obj} &= c_F + c_f \\
&= 100000P^{0.8} + n_l 6000t \\
&= 100000P^{0.8} + n_l 12000P^{0.4} \quad [\text{usant que } t = 2P^{0.4}]
\end{aligned}$$

A l'expressió anterior el terme n_l representa el nombre de lots que es fa anualment.

Hem de garantir, a més, la restricció de que no superarem entre tots els lots el màxim d'hores de funcionament en un any (considerant hores de funcionament i aturades entre lots). Això ho podem expressar com

$$\begin{aligned}
(t + 14)n_l &\leq 320 \cdot 24 \\
(2P^{0.4} + 14)n_l &\leq 7680
\end{aligned}$$

Ara tenim plantejat el problema en les variables P i n_l. L'enunciat ens demanava, però, usar només la variable P. Podem relacionar n_l i P sabent que el total de producte que hem de fabricar a l'any és de 150000 kg, i per tant, el nombre de lots processats en un any ha de ser de:

$$n_l = 150000/P$$

Llavors, el problema a solucionar pot ser finalment formulat com

$$\begin{aligned} \min_{P} \quad & 10^5 P^{0.8} + \frac{18 \cdot 10^8}{P} P^{0.4} \\ \text{subj. a} \quad & \\ & (2P^{0.4} + 14)\frac{15 \cdot 10^4}{P} \leq 7680 \\ & P \geq 0 \end{aligned}$$

Solució del problema 4.

Considerem el següent conjunt de variables:

x_{jki} representarà les unitats de producte fabricades per la planta $j = 1, ..., N$, amb el mètode $k = 1, 2$, i durant l'any $i = 1, ..., I$.

La funció objectiu ha de considerar els costos de producció, per a cada planta, mètode i any. La funció objectiu queda com:

$$f(x_{jki}) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} v_{jk} \left(\sum_{i=1}^{I} x_{jki} \right)$$

A continuació cal formular les restriccions del problema. El primer grup de restriccions ve donat pel fet que cal satisfer cada any la demanda D_i. Això simplement s'escriu:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} x_{jki} = D_i \qquad \forall\ i = 1, ..., I$$

El segon grup de restriccions ens representa el límit tècnic de producció de cada planta amb cada mètode. Això s'escriu directament com:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{jki} \leq M_{kj} \qquad \forall\ k = 1, 2 \quad j = 1, ..., N$$

Pel que fa a les variables, directament indiquem que la producció de cada planta amb cada mètode ha de ser no negativa:

$$x_{jki} \geq 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \quad i = 1, ..., I$$

La formulació final del problema pot ser escrita com:

$$\min_{x_{jki}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} v_{jk} \left(\sum_{i=1}^{I} x_{jki} \right)$$

subj. a

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} x_{jki} = D_i \qquad \forall\ i = 1, ..., I$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{jki} \leq M_{kj} \qquad \forall\ k = 1, 2 \quad j = 1, ..., N$$

$$x_{jki} \geq 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \quad i = 1, ..., I$$

Solució del problema 5.

Aquest és un problema on es pot aplicar la tècnica general dels mínims quadrats. Denotant per M_A la massa del flux del producte A, l'error que fem en un dels n instants de temps és $e_i = M_A + M_{B_i} - M_{C_i}$. Com que volem minimitzar la suma dels errors per als n intervals, només hem de sumar els valors de e_i, però elevant-los al quadrat (si no, podrien produir-se cancelacions per canvis de signe, les quals són eliminades en elevar al quadrat). El problema que haurem de solucionar finalment serà:

$$\min_{M_A} \sum_{i=1}^{n} (M_A + M_{B_i} - M_{C_i})^2$$

Solució del problema 6.

Denotarem per $x_i, i = 1, ..., 4$ el tant per u que s'ha d'extreure de cada túnel i (treballem en tant per u en comptes de tant per cent per comoditat). Llavors, el cost total a minimitzar d'extracció d'una tona ve determinat per:

$$f_{obj} = 7000x_1 + 6500x_2 + 6000x_3 + 6300x_4$$

Per la seva banda, el tant per cent de residus i de coure vindrà determinat per les equacions

$$0.30x_1 + 0.40x_2 + 0.20x_3 + 0.35x_4$$

i

$$0.20x_1 + 0.22x_2 + 0.10x_3 + 0.18x_4$$

respectivament.

També haurem d'incorporar la restricció:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

que garanteix que la suma de tot l'extret de cada túnel correspon a la producció total.

El problema finalment formulat queda com:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_i} \quad & 7000x_1 + 6500x_2 + 6000x_3 + 6300x_4 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& 0.30x_1 + 0.40x_2 + 0.20x_3 + 0.35x_4 \leq 0.29 \\
& 0.20x_1 + 0.22x_2 + 0.10x_3 + 0.18x_4 \geq 0.19 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4
\end{aligned}
$$

Solució del problema 7.

Aquest problema no és més que una generalització del problema de l'assignació de personal. Considerant les $m \cdot n$ variables x_{ij}, que ens indicaran la quantitat de producte transportada des de la planta productora i fins al centre consumidor j, el problema el podem formular com:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\
\text{subj. a} \quad & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, ..., m \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, ..., n \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

La funció objectiu ens minimitza el cost total de transport del producte. Les equacions $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ impliquen que tot el que surt de les plantes productores fins al centre consumidor j ha de ser igual a la quantitat de producte requerit b_j. Anàlogament, les equacions $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$ ens indiquen que tot el que arriba als centres consumidors des de la planta productora i ha de ser igual a la quantitat de producte a_i emmagatzemada en aquesta planta.

En el cas que $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ (tenim més producte emmagatzemat del que els centres de consum requereixen) podríem considerar un nou centre de consum fictici (el $m + 1$), amb un consum $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$, i ara ja tenim un problema balancejat on podríem aplicar la formulació anterior.

En el cas que $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$ clarament no podríem satisfer la demanda dels centres consumidors. Podríem, però, considerar com en el cas anterior una planta de producció fictícia (la $n + 1$) considerant que emmagatzema un total de $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$ unitats, i intentar de satisfer ara la demanda possible amb cost mínim.

Solució del problema 8.

El problema que hem de solucionar en aquest cas és:

$$\begin{aligned} \max_{n} \quad & b(p,n) \\ \text{subj. a} \quad & \\ & p_{min} \leq p \leq p_{max} \\ & 10 \leq n \leq 20 \\ & n \text{ enter} \end{aligned}$$

La única dificultat que té el problema anterior rau en el càlcul del pagament p que s'ha de satisfer al banc cada any en funció del nombre d'anys n que es farà el pagament, sabent que l'interès és de r. Aquest és un problema típic que cal ser solucionat sempre que es demana un préstec.

Sabem que hem de tornar el préstec en n anys. Inicialment la quantitat que es deu al banc és de

$$D_0 = 100 \text{ milions}$$

Passat el primer any, la quantitat que es deurà serà de

$$D_1 = D_0(1+r) - p$$

és a dir, el que devíem més els interessos generats, menys el pagament del primer any. Anàlogament, definiríem el que deurem al segon i successius anys, fins arribar al darrer any n, on la quantitat que es deurà al banc serà de

$$D_n = D_{n-1}(1+r) - p$$

Clarament, el que nosaltres volem és que passats els n anys s'hagi pagat tot el que es devia al banc, és a dir, que $D_n = 0$. Substituint l'expressió de D_1 dins D_2, la de D_2 dins D_3, i així successivament fins arribar a la substitució de D_{n-1} dins D_n, arribem a que podem expressar la condició $D_n = 0$ com

$$\begin{aligned} D_0(1+r)^n - p\sum_{i=0}^{n-1}(1+r)^i &= 0 \\ D_0 &= p\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^i} \\ D_0 &= p\frac{\frac{1}{(1+r)^{n+1}} - \frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r} - 1} \\ D_0 &= \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}p \end{aligned}$$

Entre el segon i tercer pas de les igualtats anteriors ha calgut realitzar la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica de raó $a = \frac{1}{1+r}$. La suma dels n primers termes de la progressió de raó a ve donada per $S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{a-1}$.

Ara, sabent que $D_0 = 100$ milions, i aillant de l'expressió anterior, directament podem escriure p en funció de n:

$$p = 100\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

i substituir aquest valor al problema de maximització formulat originalment.

Solució del problema 9.

Les variables que cal determinar són:

$$\begin{aligned}
t_{A1} &= \text{dies de fabricació del producte 1 a la planta A}\\
t_{A2} &= \text{dies de fabricació del producte 2 a la planta A}\\
t_{B1} &= \text{dies de fabricació del producte 1 a la planta B}\\
t_{B2} &= \text{dies de fabricació del producte 2 a la planta B}
\end{aligned}$$

La funció objectiu a maximitzar és el rendiment que obtindrà la companyia de la venda de les quantitats de cada un dels productes fabricats a les dues plantes. La quantitat de producte que fabrica és el producte dels dies de fabricació per la quantitat produïda diàriament. Per tant podem escriure:

$$f_{obj} = \sum_{i=1}^{2} t_{Ai}M_{Ai}B_{Ai} + t_{Bi}M_{Bi}B_{Bi}$$

Les úniques restriccions que tenim són que no superem el límit de cada un dels productes L_1 i L_2:

$$t_{Ai}M_{Ai} + t_{Bi}M_{Bi} \leq L_i \qquad i = 1, 2$$

i que el nombre de dies de fabricació a cada planta correspongui a un any:

$$\begin{aligned}
t_{A1} + t_{A2} &= 365\\
t_{B1} + t_{B2} &= 365
\end{aligned}$$

Finalment, el problema a solucionar queda com:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{2} t_{Ai}M_{Ai}B_{Ai} + t_{Bi}M_{Bi}B_{Bi}\\
\text{subj. a} \quad &\\
& t_{Ai}M_{Ai} + t_{Bi}M_{Bi} \leq L_i \qquad i = 1, 2\\
& t_{A1} + t_{A2} = 365\\
& t_{B1} + t_{B2} = 365\\
& t_{A1} \geq 0 \quad t_{A2} \geq 0 \quad t_{B1} \geq 0 \quad t_{AB2} \geq 0
\end{aligned}$$

Es podria considerar que en un mateix dia no volem produir els dos tipus de producte, per problemes de gestió interna de cada planta. Això es podria indicar obligant a que les variables t_{Ai} i t_{Bi} fossin enteres (si no hi ha valors fraccionaris, podem evitar canviar la producció a la meitat d'una jornada laboral).

Solució del problema 10.

Considerem dos grups de variables:

i) x_{jki} representarà les unitats de producte fabricades per la planta $j = 1, ..., N$, amb el mètode $k = 1, 2$ i durant l'any $i = 1, ..., I$.

ii) y_{jk} serà una variable binària (prendrà només valors 0 o 1) i ens indicarà si la planta $j = 1, ..., N$ utilitza o no el mètode $k = 1, 2$ (valdrà 0 si no l'utilitza, 1 si l'utilitza).

La funció objectiu ha de considerar els costos fixes d'implantació de cada mètode de fabricació, i els variables de producció, per a cada planta (els costos fixes només es comptabilitzen un cop, els costos de producció s'han de sumar per a cada any). A més, els costos fixes han de venir afectats per les variables y_{jk} que ens indiquen si s'ha implantat o no aquell mètode en aquella planta. La funció objectiu finalment queda com:

$$f(y_{jk}, x_{jki}) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \left[y_{jk} f_{jk} + \sum_{i=1}^{I} v_{jk} x_{jki} \right] \right\}$$

A continuació cal formular les restriccions del problema. La primera d'elles és que cal satisfer cada any la demanda D_i. Això simplement s'escriu:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} x_{jki} = D_i \qquad \forall\ i = 1, ..., I$$

La següent restricció que cal garantir és que no podem implantar el primer mètode més de M_1 vegades. Això simplement s'escriu:

$$\sum_{j=1}^{N} y_{j1} \leq M_1$$

Pel que fa a les variables, directament indiquem que y_{jk} són variables de decisió binàries, i que la producció x_{jki} ha de ser positiva:

$$\begin{aligned} y_{jk} &\in \{0, 1\} \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \\ x_{jki} &\geq 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \quad i = 1, ..., I \end{aligned}$$

Amb la formulació anterior, però, pot ocórrer que tinguem valors de x_{jki} positius quan $y_{jk} = 0$ (fabriquem unitats de producte amb un mètode que no hem instal·lat). Hem de garantir, llavors, que $y_{jk} = 0 \Rightarrow x_{jki} = 0 \ \ \forall\ i = 1, ..., I$. Aquesta implicació pot ser formulada com:

$$(1 - y_{jk}) x_{jki} = 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \quad i = 1, ..., I$$

Podem sumar les I restriccions anteriors de cada parell jk, i obtenim les noves restriccions equivalents (equivalents ja que $x_{jki} \geq 0$):

$$(1 - y_{jk}) \sum_{i=1}^{I} x_{jki} = 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2$$

Finalment, només ens cal veure quina implicació tenen els dos supòsits a) i b). El cas a) (només un mètode a cada planta) es formula simplement indicant:

$$y_{j1} + y_{j2} = 1 \quad \forall\, j = 1, ..., N$$

El cas b), donat que podem tenir els dos mètodes dins d'una planta, es formula com:

$$y_{j1} + y_{j2} \geq 1 \quad \forall\, j = 1, ..., N$$

Per tant la formulació final pot ser escrita com:

$$\begin{aligned}
\min_{x_{jki}, y_{jk}} \quad & \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \left[y_{jk} f_{jk} + \sum_{i=1}^{I} v_{jk} x_{jki} \right] \right\} \\
\text{subj. a} \quad & \\
& \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} x_{jki} = D_i \qquad \forall\, i = 1, ..., I \\
& \sum_{j=1}^{N} y_{j1} \leq M_1 \\
& (1 - y_{jk}) \sum_{i=1}^{I} x_{jki} = 0 \quad \forall\, j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \\
& y_{j1} + y_{j2} = 1 \text{ (si a)} \quad / \quad y_{j1} + y_{j2} \geq 1 \text{ (si b)} \quad \forall\, j = 1, ..., N \\
& y_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall\, j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \\
& x_{jki} \geq 0 \quad \forall\, j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \quad i = 1, ..., I
\end{aligned}$$

Solució del problema 11.

Les variables d'aquest problema són les unitats de gas que circulen per cada una de les 6 canonades del gasoducte. Aquestes variables seran denotades per x_{AB}, x_{AC}, x_{BD}, x_{BE}, x_{CD} i x_{DE}. La funció objectiu que hem de minimitzar clarament ve donada per la suma total de transport de gas a totes les canonades:

$$f_{obj} = c_{AB} x_{AB} + c_{AC} x_{AC} + c_{BD} x_{BD} + c_{BE} x_{BE} + c_{CD} x_{CD} + c_{DE} x_{DE}$$

Les restriccions del problema han de reflectir l'estructura de la xarxa. Llavors tindrem per a cada node una equació que expressi el següent:

$$\text{flux de sortida} - \text{flux d'entrada} = \text{injecció al node}$$

on la injecció al node serà positiva si és un centre de producció de gas, o negativa si és un centre de consum. Per exemple, per al node C tindrem l'equació:

$$x_{CD} - x_{AC} = -I_C$$

Cal fer notar que podem escollir un altre criteri de signes, és a dir, podem considerar els fluxos de sortida com negatius i els d'entrada com positius. En aquest cas, però, caldria també modificar el criteri de signes de les injeccions a cada node, i ara tindríem que als centres de producció la injecció seria negativa i als de consum positiva. Com que això darrer no sembla gaire lògic, per això usarem aquí el criteri de signes abans comentat.

Finalment, i considerant els límits de transport a cada canonada, el problema pot ser formulat com:

$$\begin{aligned}
\min\quad & c_{AB}x_{AB} + c_{AC}x_{AC} + c_{BD}x_{BD} + c_{BE}x_{BE} + c_{CD}x_{CD} + c_{DE}x_{DE} \\
\text{subj. a}\quad & \\
& x_{AB} + x_{AC} = I_A \\
& x_{BD} + x_{BE} - x_{AB} = I_B \\
& x_{CD} - x_{AC} = -I_C \\
& x_{DE} - x_{BD} - x_{CD} = -I_D \\
& - x_{BE} - x_{DE} = -I_E \\
& 0 \le x_{AB} \le u_{AB} \quad 0 \le x_{AC} \le u_{AC} \quad 0 \le x_{BD} \le u_{BD} \\
& 0 \le x_{BE} \le u_{BE} \quad 0 \le x_{CD} \le u_{CD} \quad 0 \le x_{DE} \le u_{DE}
\end{aligned}$$

Si escrivim les restriccions del problema anterior de forma matricial podem adonar-nos de la estructura tan particular que té la matriu de restriccions del problema (la qual és comuna a tots els problemes amb estructura de xarxa):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{AB} \\ x_{AC} \\ x_{BD} \\ x_{BE} \\ x_{CD} \\ x_{DE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ -I_C \\ -I_D \\ -I_E \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu de restriccions s'anomena "matriu de xarxa", o "matriu d'incidències nodes-arcs". Podem veure que per cada columna (arc de la xarxa) tenim només dues posicions diferents de zero: una amb un 1 a la fila corresponent al seu node origen, i una altra amb un -1 a la fila associada amb el node destí. Aquesta estructura tan especial fa que hi hagi especialitzacions del mètode del símplex per a la resolució de problemes de fluxos en xarxes. Aquestes especialitzacions són molt més eficients que l'algorisme general del símplex.

Solució del problema 12.

Per formular els dos apartats usarem dos tipus de variables:

- $y_i \;\; i = 1, ..., n$, indicarà si la companyia construeix o no la planta i, i podrà prendre els valors 0 (no es construeix) o 1 (es construeix).
- x_{ij} indicarà el nombre d'unitats que seran subministrades al centre j des de la planta i.

Passem ara a solucionar els dos apartats de l'enunciat del problema:

a)

La companyia vol minimitzar el cost total de transport del producte i de construcció de les plantes. Aquesta funció de cost no és més que:

$$f_{obj} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i$$

Pel que fa a les restriccions, s'ha de garantir en primer lloc el proveïment de cada centre de consum:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad j = 1, ..., m$$

El següent que cal imposar és que només hi hagi subministrament des d'aquelles plantes que s'hagin construït. Una possible forma d'imposar aquestes restriccions seria:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \big(\sum_{j=1}^{m} b_j \big) \quad i = 1, ..., n$$

A l'equació anterior el terme $\sum_{j=1}^{m} b_j$ és constant, i podria ser substituït per qualsevol valor M sempre que $M \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$. Si fos menor no deixaríem que una planta subministrés la totalitat del producte (quan l'enunciat del problema no ens ha eliminat pas aquesta possibilitat).

La formulació definitiva del problema seria:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_{ij}, y_i} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i \\
&\text{subj. a} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, ..., m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \big(\sum_{j=1}^{m} b_j \big) \qquad i = 1, ..., n \\
&\qquad x_{ij} \geq 0 \quad y_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., n \;\; j = 1, ..., m
\end{aligned}$$

b)

Si existeix un límit a_i sobre el que cada planta pot produir, només hem de substituir a la formulació anterior les restriccions

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \big(\sum_{j=1}^{m} b_j \big) \qquad i = 1, ..., n$$

per les noves

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i a_i \qquad i = 1, ..., n$$

Solució del problema 13.

Ens cal maximitzar els beneficis nets de la companyia durant cada un dels 5 anys de vida de l'aïllant. La funció objectiu a maximitzar pot ser formulada com:

$$f_{obj} = \text{Beneficis} - \text{Despeses}$$

Els beneficis que obté la companyia provenen de l'estalvi d'energia deguts a l'aïllament durant una hora, multiplicat per les hores de funcionament a l'any i per G (pts de guany per cada Btu estalviat). Per saber quants Btus ens estalviem en una hora cal calcular $Q_0 - Q$ (Q_0 representa les pèrdues de calor quan $x = 0$):

$$Q_0 - Q = h_c A \Delta T - \frac{A \Delta T}{x/k + 1/h_c}$$

La companyia demanarà al banc un préstec de $(c_0 + c_1 x)A$ pts (cost del m^2 per àrea total de la canonada). Usant el resultat obtingut al problema 8, tenim que el pagament P que ha de fer durant cada any el banc (amb un tipus d'interés del $r\%$) ve donat per:

$$P = A(c_0 + c_1 x) \frac{r/100(1 + r/100)^n}{(1 + r/100)^n - 1}$$

La única restricció del problema és que el gruix de l'aïllant no pot ser negatiu ($x \geq 0$). Llavors, el problema a solucionar serà:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \left(h_c A \Delta T - \dfrac{A \Delta T}{x/k + 1/h_c}\right) \cdot H \cdot G \; - \; A \cdot (c_0 + c_1 x) \cdot \dfrac{r/100(1 + r/100)^n}{(1 + r/100)^n - 1} \\ \text{subj. a} & x \geq 0 \end{array}$$

En aquest cas, la solució anàlitica del problema anterior pot ser calculada diferenciant la funció objectiu respecte x i igualant a 0, obtenint que x és igual a una expressió on apareix una arrel quadrada. Donat que x no pot ser negativa, directament prendríem la solució positiva de l'arrel quadrada (és la única que té un sentit físic).

Solució del problema 14.

Segons la Taula 3 de l'enunciat del problema, la xarxa de distribució pot ser representada segons la Fig. 3. En aquest cas els camions es troben associats a arcs i les plantes a nodes.

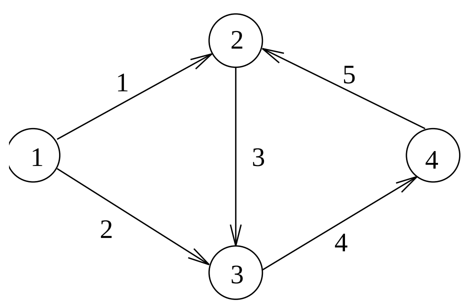

Figura 3. Topologia de la xarxa de distribució.

Denotarem per x_i^k, $i = 1, ..., 5$, $k = 1, 2$ els kg de producte k que transporta el camió i. Donat que la funció objectiu que hem de minimitzar correspon al cost de transport dels dos productes dins els cinc camions, la podem escriure com:

$$f_{obj} = \sum_{i=1}^{5} \sum_{k=1}^{2} c_i^k x_i^k$$

A continuació, a l'igual que es va fer al problema 11, cal que tot el que surt d'una planta menys tot el que hi arriba sigui igual al que consumeix o produeix, i això per a cada un dels dos productes. La diferència que hi ara respecte el problema del gasoducte és que allà només teníem un producte (el gas), mentre que aquí en tenim dos. Llavors caldrà escriure el balanç de fluxos de la xarxa separadament per a cada producte. La xarxa, però, sobre la que circulen els productes és la mateixa, i per això l'estructura de les restriccions serà també la mateixa per a cada producte. Així, per al producte 1 tindrem les restriccions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \\ x_5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \\ P_4^1 \end{pmatrix}$$

les quals poden també ser escrites en forma matricial com $Ax^1 = P^1$ (on $x^1 = (x_1^1\ x_2^1\ x_3^1\ x_4^1\ x_5^1)^T$ i $P^1 = (P_1^1\ \ P_2^1\ \ P_3^1\ \ P_4^1)^T$). Per la seva banda, per al segon producte tindrem les restriccions següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{pmatrix}$$

que en forma matricial poden ser escrites com $Ax^2 = P^2$, on x^2 i P^2 es defineixen de forma anàloga a com abans s'ha fet amb x^1 i P_1.

Només ens cal imposar ara les restriccions per evitar que superem les capacitats de cada camió. Llavors crearem una nova restricció per a cada camió del tipus:

$$x_i^1 + x_i^2 \leq M_i \quad i = 1, ..., 5$$

Tenint en compte que totes les variables x_i^k han de ser no negatives (ja que representen kg de producte transportat), la formulació final del problema queda com:

$$\begin{aligned} &\min_{x_i^k} \quad \sum_{i=1}^{5} \sum_{k=1}^{2} c_i^k x_i^k \\ &\text{subj. a} \\ &\qquad Ax^k = P^k \quad k = 1, 2 \\ &\qquad x_i^1 + x_i^2 \leq M_i \quad i = 1, ..., 5 \\ &\qquad x_i^k \geq 0 \quad i = 1, ..., 5 \;\; k = 1, 2 \end{aligned}$$

Solució del problema 15.

Denotarem per x_i, $i = 1, ..., 10$, els kg que usarem per a cada un dels 10 ingredients del primer tipus, i per y_i $i = 1, ..., 5$ (on $y_i \in \{0, 1\}$) si usarem o no cada un dels ingredients del segon tipus. Hem de determinar quins són els valors de x_i i y_i que minimitzen el cost i satisfan les restriccions de pinso fabricat i greix total. Aquest problema pot ser formulat tal i com segueix:

$$\min_{x_i, y_i} \quad \sum_{i=1}^{10} c_i^1 x_i + \sum_{i=1}^{5} c_i^2 y_i$$

subj. a

$$P_l \leq \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{5} p_i y_i \leq P_u$$

$$G_l \leq \sum_{i=1}^{10} a_i^1 x_i + \sum_{i=1}^{5} a_i^2 p_i y_i \leq G_u$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 10 \qquad y_j \in \{0,1\} \quad j = 1, ..., 5$$

Solució del problema 16.

A l'igual que en casos anteriors, podem formular aquest problema fent ús d'una xarxa. En aquest cas, i a diferència dels exercicis previs, el nusos i arcs de la xarxa no es troben associats a punts geogràfics i trajectes entre punts, sinó que corresponen a instants temporals i transicions entre un instant i un altre. Així, podem plantejar el problema a través de la xarxa de la Fig. 4.

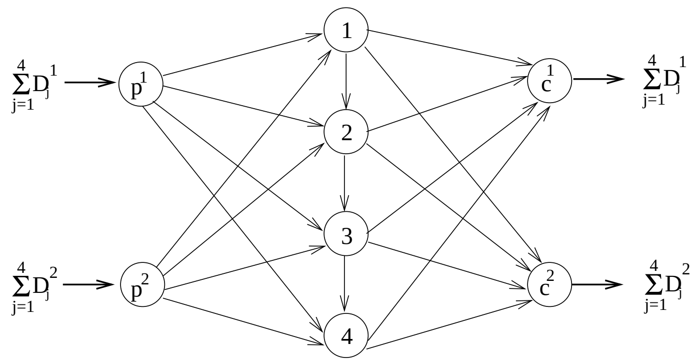

Figura 4. Xarxa associada amb la demanda estacional de productes.

Els dos nodes p^i són els nodes productors, mentre que c^i són els nodes de consum. Els nodes centrals $j, j = 1, ..., 4$, representen el magatzem al llarg dels quatre trimestres del nostre període d'estudi (un any en aquest cas). El flux que circula pels arcs (p^i, j) representa unitats de producte fabricats per la planta i al trimestre j. Els arcs (p^1, j) només poden transportar quantitats del producte 1, i tenen una capacitat de U_j^1 kg, i un cost de C_j^1 pts/kg. Els arcs (p^2, j) transporten unitats de producte 2 (amb costos C_j^2 pts/kg i capacitats U_j^2). Per satisfer la demanda tenim els arcs (j, p^i), que només només poden subministrar unitats del producte i, amb un cost 0 i capacitat D_j^i. Finalment, els arcs $(j, j+1)$ comparteixen els dos productes, i representen la quantitat total conjunta que s'emmagatzema d'un trimestre per a l'altre. El cost de cada unitat "transportada" per aquests arcs és de T pts/kg, i la seva capacitat màxima és de M kg (la capacitat del magatzem). El problema podria ser ara formulat com als exercicis previs on apareixia una estructura de xarxa. Es deixa al lector la formulació final del problema.

Solució del problema 17.

Per comoditat considerem que un reactor aturat es troba al règim de producció 0, i per a la resta de règims codifiquem amb un 1 el règim baix, amb un 2 el règim mig, i amb un 3 el règim alt. La producció i cost de funcionament de cada reactor j amb cada règim i es denoten per p_{ij} i c_{ij} respectivament (on $p_{0j} = c_{0j} = 0$). Definint les variables $x_{ijl} \in \{0,1\}$ que indiquen si el dia $l = 1, ..., 7$ el reactor $j = 1, ..., r$ està al nivell $i = 0, ..., 3$ (0 si no està, 1 si està), tenim la següent possible formulació:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{l=1}^{7}\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{r} c_{ij}x_{ijl} \\
\text{subj. a} \quad & \\
& \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{r} p_{ij}x_{ijl} \geq D \qquad \forall l = 1, ..., 7 \quad \text{(per a tot dia de la setmana)} \\
& \sum_{i=0}^{3} x_{ijl} = 1 \qquad \forall j = 1, ..., r,\ \forall l = 1, ..., 7 \quad \text{(per a tot reactor i dia de la setmana)} \\
& \sum_{l=1}^{7} x_{0jl} \geq 1 \qquad \forall j = 1, ..., r \quad \text{(per a tot reactor)} \\
& x_{ijl} \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

El primer grup de restriccions garanteixen la satisfacció de la demanda diària. El segon grup de restriccions asseguren que cada reactor es trobarà cada dia en un i només un règim de funcionament. Finalment, el tercer grup de restriccions obliguen a que cada reactor es trobi aturat, com a mínim, un dia a la setmana.

5 Solucions dels problemes de programació lineal.

Solució del problema 18.

Fent els següents canvis de variable:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_3^+ - x_3^- \\ \tilde{x}_2 &= x_2 - 3 \end{aligned}$$

(on $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$, i $x_2 \geq 3 \Rightarrow \tilde{x}_2 \geq 0$) i afegint les variables (folgues) f_1 i f_2 a la primera i segona restriccions, el problema pot ser escrit de la següent forma:

$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 2(\tilde{x}_2 + 3) + 3(x_3^+ - x_3^-) \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +(\tilde{x}_2+3) & + \ (x_3^+ - x_3^-) & +f_1 & & = & 20 \\ 3x_1 & -(\tilde{x}_2+3) & +2(x_3^+ - x_3^-) & & +f_2 & = & 6 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad \tilde{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad 16 \geq f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 2\tilde{x}_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + 6 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{cccccccc} 2x_1 & +\tilde{x}_2 & + \ x_3^+ & - \ x_3^- & +f_1 & & = & 17 \\ 3x_1 & -\tilde{x}_2 & +2x_3^+ & -2x_3^- & & +f_2 & = & 9 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad \tilde{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad 16 \geq f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0 \end{array}$$

Cal adonar-se que la folga f_1 té una fita superior de 16. Això és degut a que la primera restricció està limitada superior i inferiorment. Quan les restriccions es troben limitades per dalt i per baix, no hi ha prou amb afegir una folga $f \geq 0$. En aquests casos cal imposar una fita superior sobre aquesta folga, i aquesta serà sempre igual a la diferència entre els termes independents de la restricció (al nostre cas: $20 - 4 = 16$, que serà la fita superior de f_1). Si no imposem aquesta fita superior sobre f_1 el problema obtingut no seria equivalent a l'original, ja que permetriem situacions on $2x_1 + x_2 + x_3 < 4$. Una forma alternativa de solucionar el problema, sense haver de crear una folga amb una fita superior, hagués estat dividir la restricció en dues ($l \leq c^T x \leq u \equiv \{c^T x \leq u \ , \ c^T x \geq l\}$) i afegir a cada una de les dues restriccions una folga i un escreix respectivament. En aquest cas, però, afegim una restricció més al problema, i també una nova variable, complicant-lo innecessàriament.

Encara no tenim el problema en la forma estàndard, ja que la folga f_1 té una fita superior. Per eliminar-la afegim una nova folga $f_3 \geq 0$ i una nova restricció $f_1 + f_3 = 16$:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2\tilde{x}_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + 6 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & +\tilde{x}_2 & +\ x_3^+ & -\ x_3^- & +f_1 & & & = & 17 \\ 3x_1 & -\tilde{x}_2 & +2x_3^+ & -2x_3^- & & +f_2 & & = & 9 \\ & & & & f_1 & & +f3 & = & 16 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad \tilde{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0 \quad f_3 \geq 0 \end{array}$$

Cal fer notar que en comptes de considerar $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, es podria haver eliminat x_3 d'una restricció (després de transformar-la en restricció d'igualtat) i sustituir el seu valor a l'altra equació (tot reduint el nombre de files del problema). Es deixa al lector l'aplicació d'aquesta altra tècnica.

Solució del problema 20.

El fet de que a la funció objectiu aparegui la funció logarisme, que a les fites de variables intervingui la funció exponencial, i que les restriccions no siguin més que productes i quocients de variables, ens donen suficients arguments per considerar un canvi de variable com ara:

$$\tilde{x}_i = \ln x_i \quad i = 1, 2, 3$$

És important fer notar que la funció ln té la propietat de mantenir les desigualtats. És a dir:

$$a \geq b \Leftrightarrow \ln a \geq \ln b$$

Això és degut a que la funció ln és monòtona creixent (sempre creix). Per tant, podem aplicar la funció logarisme neperià a les restriccions de desigualtat i fites de les variables sense variar la naturalesa del problema. Per tant, el problema original pot ser escrit com:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \ln x_1 \\ \text{subj. a} & \\ & \ln(x_1 x_2 x_3) \geq \ln(e^5) \\ & \ln\big(\dfrac{x_1}{x_2}\big) = \ln x_3 \\ & \ln x_1 \leq \ln(e^2) \quad \ln x_2 \geq \ln(e^4) \\ & \ln x_3 > -\infty \end{array} \iff \begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \tilde{x}_1 \\ \text{subj. a} & \\ & \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \geq 5 \\ & \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = 0 \\ & \tilde{x}_1 \leq 2 \quad \tilde{x}_2 \geq 4 \quad \tilde{x}_3 \text{ lliure} \end{array}$$

Adonem-nos que el canvi de variable $\tilde{x}_i = \ln x_i$ està ben definit per a tots el valors possibles de x_i gràcies a que $x_1 > 0$ i $x_3 > 0$. Si x_1 o x_3 poguessin prendre el valor 0, no podríem definir la funció ln en aquests punts. Aquest és el motiu pel qual s'han definit les variables x_1 i x_3 com estrictament positives.

Podem simplificar el problema anterior aïllant $\tilde{x}_3$ de la segona equació (la d'igualtat), ja que $\tilde{x}_3$ és una variable lliure, obtenint:

$$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

Substituint el valor anterior de $\tilde{x}_3$ a la primera equació (la de desigualtat) obtenim:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &\geq 5 \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) &\geq 5 \\ 2\tilde{x}_1 &\geq 5 \\ \tilde{x}_1 &\geq 5/2 \end{aligned}$$

Hem obtingut un límit inferior de $\tilde{x}_1$, per tant. Observem, però, que $\tilde{x}_1$ tenia ja una fita superior de 2. Com que no es pot garantir alhora que $\tilde{x}_1 \geq 5/2$ i $\tilde{x}_1 \leq 2$, directament podem concloure que el nostre problema és infactible.

Solució del problema 21.

L'equació $|3x_1 - 2x_2| \leq 3$ ens està dient que $3x_1 - 2x_2$ ha de prendre valors entre -3 i 3. Per tant podem escriure aquesta restricció com:

$$-3 \leq 3x_1 - 2x_2 \leq 3$$

i ja tindríem un problema de programació lineal.

En el cas que la restricció fos $|3x_1 - 2x_2| \geq 3$, això voldria dir que $3x_1 - 2x_2$ ha de prendre valors ≥ 3 **o** ≤ -3. En el cas anterior, però, havia de prendre valors ≥ -3 **i** ≤ 3. La diferència està en que abans havíem de satisfer dues condicions alhora (per això tenim "**i**"), i ara tenim que només cal satisfer una o l'altra ("**o**"). Les condicions "**i**" són molt fàcils de tractar en programació lineal, només cal anar afegint una nova equació per a cada condició (ja que el punt solució ha de satisfer totes les restriccions del nostre problema). Les condicions "**o**" no poden ser tractades de forma tan simple. Caldria afegir variables enteres i, en aquest cas, no seria ja un problema de programació lineal.

Solució del problema 22.

El problema original

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T|x| \\ \text{subj. a} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

pot ser transformat en un d'equivalent dividint les variables x de forma

$$x = x^+ - x^- \quad x^+ \geq 0 \quad x^- \geq 0$$

En aquest cas estem considerant que els x_i^+ seran la part positiva de x_i, mentre que els x_i^- seran la part negativa de x_i (x_i^+, x_i^- i x_i fan referència a la component i-èssima del vector x^+, x^- i x respectivament). El nou problema equivalent és:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T(x^+ - x^-) \\ \text{subj. a} \quad & A(x^+ - x^-) = b \\ & x_i^+ \cdot x_i^- = 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

La darrera restricció ens obliga a que es verifiqui sempre que $x_i^+ = 0$ o $x_i^- = 0$ (o les dues condicions alhora). Si $x_i^+ > 0$, llavors x_i és positiu. Si $x_i^- > 0$, x_i serà negatiu. Aleshores, la funció objectiu $c^T(x^+ - x^-)$ equival a $c^T|x|$.

El nou problema equivalent té l'inconvenient de que no és un problema de programació lineal (degut a les restriccions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$). Tanmateix, podem mirar de solucionar aquest problema sense aquestes restriccions. Si les eliminem, el problema resultant sí que és de programació lineal. El nou problema sense les restriccions no lineals s'anomena problema "relaxat" (rep aquest nom perque és un problema menys restrictiu, més "laxe", degut a que hem eliminat unes determinades restriccions). El que farem és, a partir de la solució òptima del problema relaxat lineal, trobar una d'alternativa que satisfaci les restriccions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$ i que sigui igualment òptima. Aleshores, ja haurem vist com solucionar el problema original a través de la solució d'un problema de programació no lineal.

Considerem que x_i^{*+}, x_i^{*-} és la solucó del nostre problema relaxat

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T(x^+ - x^-) \\ \text{subj. a} \quad & A(x^+ - x^-) = b \end{aligned}$$

Podem definir una solució alternativa que satisfaci $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$ de forma

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^+ &= x_i^{*+} - m_i \\ \tilde{x}_i^- &= x_i^{*-} - m_i \end{aligned} \qquad \text{on } m_i = \min\{x_i^{*+}, x_i^{*-}\}$$

Ara comprovem que el nou punt $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ és factible i òptim per al problema relaxat:

$$\text{(Factible)} \quad A(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-) = A(x^{*+} - m - (x^{*-} - m)) = A(x^{*+} - x^{*-}) = b$$

$$\text{(Òptim)} \quad c^T(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-) = c^T(x^{*+} - m - (x^{*-} - m) = c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^T m \leq c^T(x^{*+} - x^{*-})$$

En el darrer pas, podem garantir que $c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^T m \leq c^T(x^{*+} - x^{*-})$ gràcies a que tots el valors m_i calculats són positius (ja que són el mínim de dues quantitats positives), i a que l'enunciat del problema ens diu que el vector de costos c té totes les components positives. Per tant el terme $-2c^T m$ és sempre ≤ 0.

Donat que x_i^{*+}, x_i^{*-} era l'òptim del problema relaxat, això vol dir que cap altre punt factible pot tenir un valor més petit de funció objectiu. Això vol dir que el punt alternatiu $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ té el mateix valor de funció objectiu que x_i^{*+}, x_i^{*-} (és a dir, que la desigualtat abans obtinguda $c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^T m \leq c^T(x^{*+} - x^{*-})$ és de fet una igualtat). El nou punt $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ és doncs òptim del problema relaxat, i satisfà les equacions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$. Per tant és òptim del problema no lineal, i també del problema original amb el valor absolut a la funció objectiu. Cal notar que hem solucionat el problema original mitjançant la resolució d'un problema de programació lineal, i una traslació a posteriori del punt solució d'aquest darrer.

Solució del problema 23.

La resposta és que la companyia sí podrà solucionar el problema amb els paquets de programació lineal de que disposa. El problema, però, ha de ser transformat prèviament. Una possible forma seria crear una nova variable $y \in \mathbb{R}$, que representarà el cost de producció i serà la variable a minimitzar. Donat que es vol que en un punt x el cost de producció sigui el màxim de $c_A^T x$, $c_B^T x$, i $c_C^T x$, només hem d'imposar que y sigui més gran que els tres termes anteriors.

Llavors podem escriure el problema original com:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{subj. a} \quad & \\ & Ax = b \\ & y \geq c_A^T x \\ & y \geq c_B^T x \\ & y \geq c_C^T x \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

amb el qual queda transformat en un problema de programació lineal que ara sí pot ser solucionat per la companyia.

Solució del problema 24.

Els punts solució (x_1^*, x_2^*)de cada cas son els següents:

a) (0,2)
b) (1.5,0.5)
c) (0.8,0.6)
d) (0,2)
e) Problema il·limitat.
f) Problema infactible.

Solució del problema 25.

La Fig. 5 mostra la regió factible del problema (àrea ombrejada) delimitada per les tres restriccions r1, r2 i r3. Aquesta és clarament il·limitada. També es mostren les corbes de nivell de la funció objectiu (junt amb el vector de costos negat $-c = (-p, 1)$), en quatre situacions diferents (corresponents a diferents valors de p). Recordem que el vector de costos negat ens indica la direcció en que hem de fer avançar les corbes de nivell per minimitzar la funció objectiu.

En la situació A (funció objectiu paral·lela a $x_1 - x_2 = -1$) tenim que $p = 1$. En aquest cas qualsevol punt de $x_1 - x_2 = -1$ sobre el quadrant positiu és un òptim alternatiu, de valor de funció objectiu -1.

Per valors $p > 1$ (situació B) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen cap a l'eix $x_1 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap a l'esquerra. En aquest cas només hi ha un òptim alternatiu, que correspon amb el punt $(0, 1)$, però amb el mateix valor de funció objectiu que abans: -1.

Per valors $0 \leq p < 1$ (situació C) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen cap a l'eix $x_2 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap amunt. En aquest cas, podem fer disminuir tant com volem el valor de la funció objectiu. Ens trobem davant una situació de problema il·limitat.

Per valors $p < 0$ (situació D) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen de nou cap a l'eix $x_1 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap a la dreta. En aquest cas, una altra vegada ens trobem devant un problema il·limitat.

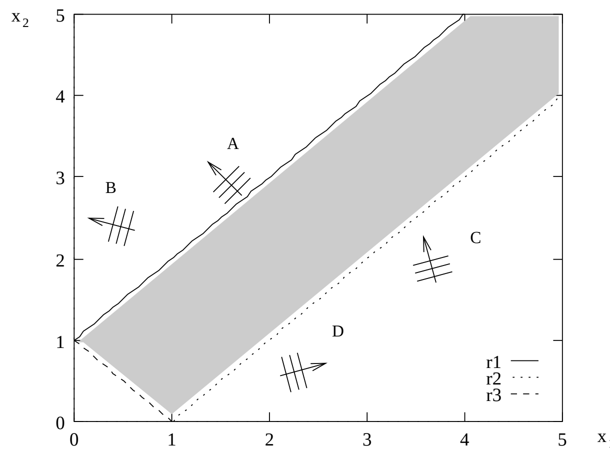

Figura 5. Regió factible i situacions segons el valor del paràmetre p.

Per tant tenim:

$$\begin{cases} \text{Problema il·limitat} & \text{si } p < 1 \\ \text{Òptims alternatius} & \text{si } p = 1 \\ \text{Òptim únic} & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

Si la funció objectiu fos $px_1 + x_2$ es faria un estudi equivalent (es deixa al lector la seva resolució).

Solució del problema 26.

El problema tal i com es presenta té més de dues variables, i això dificulta molt la seva representació. Podem veure, però, que x_3 i x_4 de fet actuen com a folgues, i podem considerar que el nostre problema és en realitat:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_3 \text{ és la folga de la primera restricció} \\ & x_4 \text{ és la folga de la segona restricció} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

Les folgues de fet únicament ens indiquen quant allunyats estem de la frontera de la nostra regió factible (x_3 ens diu quant lluny estem de $x_1 + 3x_2 = 6$ i x_4 la distància a $3x_1 + x_2 = 6$. La Fig. 6 ens mostra precisament la regió factible (la part interior més propera a la frontera es troba ombrejada) i el significat de x_3 i x_4 (les distàncies a r1 i r2 respectivament) Observant la Fig. 6 podem comprovar que el punt més allunyat de la recta r1 és clarament el punt $(x_1, x_2) = (1, 0)$. Aquest serà doncs el que proporcionarà el valor màxim per x_3 (concretament $x_3 = 5$).

En el cas que la funció objectiu fos $\max x_4$ s'hauria de maximitzar l'altra folga. S'observa

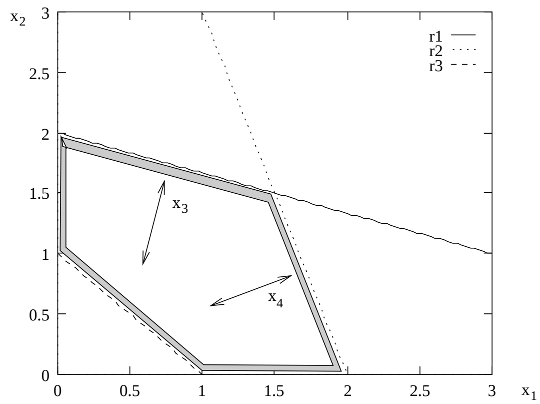

Figura 6. Regió factible i significat de les folgues x_3 i x_4

com el punt més allunyat de r2 és $(x_1, x_2) = (0, 1)$, el qual proporciona el valor màxim de la funció objectiu $x_4 = 5$.

Solució del problema 27.

La tercera restricció ja té la desigualtat escrita de forma $\leq$. La segona desigualtat pot ser escrita com

$$a_2^T x \geq b_2 \quad \Leftrightarrow \quad -a_2^T x \leq -b_2$$

La primera restricció és d'igualtat. El conjunt de punts que satisfan $a_1^T x = b_1$ podem considerar-los com aquells que pertanyen a la intersecció dels dos semiespais:

$$\begin{aligned} a_1^T x &\leq b_1 \\ a_1^T x &\geq b_1 \end{aligned}$$

Llavors el problema original pot ser escrit amb totes les restriccions $\leq$ com:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subj. a} \quad & \\ & a_1^T x \leq b_1 \\ & -a_1^T x \leq -b_1 \\ & -a_2^T x \leq -b_2 \\ & a_3^T x \leq b_3 \end{aligned}$$

Solució del problema 28.

Primer hem d'aplicar la fase I per trobar un punt inicial factible, a partir del qual iterarem. Afegint les variables artificials x_5, x_6 i x_7, de costos 1, i multiplicant per -1 a ambdós costats de la primera restricció (per tal de tenir el terme de la dreta positiu), el problema a solucionar a la fase I és:

$$\begin{array}{lllllllll}
\displaystyle\min_{x_1,\ldots,x_7} & x_5+x_6+x_7 \\
\text{subj. a} \\
& 2x_1 & 2x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & & & = & 3 \\
& x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & +x_6 & & = & 6 \\
& 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & = & 5 \\
& x_i \geq 0 \quad i=1,...,7
\end{array}$$

Directament obtenim la solució (bàsica): $x_i = 0,\ i = 1,...,4,\ x_5 = 3,\ x_6 = 6,\ x_7 = 5$. A partir d'aquest punt inicial factible, les taules del símplex que anem obtenint successivament són (es marca amb un requadre el pivot a cada iteració):

Iteracions de la Fase I

Iteració 0

$\boxed{2}$	2	-1	-1	1	0	0	3
1	2	3	0	0	1	0	6
2	2	1	1	0	0	1	5
-5	-6	-3	0	0	0	0	-14

Iteració 1

1	$\boxed{1}$	-0.5	-0.5	0.5	0	0	1.5
0	1	3.5	0.5	-0.5	1	0	4.5
0	0	2	2	-1	0	1	2
0	-1	-5.5	-2.5	2.5	0	0	-6.5

Iteració 2

1	1	-0.5	-0.5	0.5	0	0	1.5
-1	0	$\boxed{4}$	1	-1	1	0	3
0	0	2	2	-1	0	1	2
1	0	-6	-3	3	0	0	-5

Iteració 3

0.875	1	0	-0.375	0.375	0.125	0	1.875
-0.25	0	1	0.25	-0.25	0.25	0	0.75
$\boxed{0.5}$	0	0	1.5	-0.5	-0.5	1	0.5
-0.5	0	0	-1.5	1.5	1.5	0	-0.5

Iteració 4

0	1	0	-3	1.25	1	-1.75	1
0	0	1	1	-0.5	0	0.5	1
1	0	0	3	-1	-1	2	1
0	0	0	0	1	1	1	0

Hem obtingut una solució factible del problema original on els valors de les variables artificials són 0. Ara podem iniciar la fase II a partir de la base òptima obtinguda a la fase I.

Iteracions de la Fase II

Iteració 0

1	0	0	$\boxed{3}$	1
0	1	0	-3	1
0	0	1	1	1
0	0	0	-1	0

Iteració 1

1/3	0	0	1	1/3
1	1	0	0	2
-1/3	0	1	0	2/3
1/3	0	0	0	1/3

Hem arribat a un punt on el cost reduït de la variable no bàsica és positiu. El valor mínim de la funció objectiu és de $-1/3$ i l'òptim assolit és:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2/3 \quad x_4 = 1/3$$

Solució del problema 29.

Donat que hi ha una restricció de desigualtat, abans de res afegim una folga x_5 per tenir el problema en forma estàndard:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5} & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 4 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & & = 5 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 & & = 3 \end{array} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 5 \end{array}$$

Ara ens hem d'adonar que directament ja podem obtenir una solució bàsica i factible:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 3 \quad x_5 = 4$$

Per tant ens podem estalviar la fase I i les taules que obtenim són (es marca el pivot usat a cada iteració amb un requadre):

Iteració 0

1	1	0	0	1	4
$\boxed{2}$	-1	1	0	0	5
1	-2	0	1	0	3
-1	0	0	0	0	-5

Iteració 1

0	$\boxed{1.5}$	-0.5	0	1	1.5
1	-0.5	0.5	0	0	2.5
0	-1.5	-0.5	1	0	0.5
0	-0.5	0.5	0	0	-2.5

Iteració 2

0	1	-1/3	0	2/3	1
1	0	1/3	0	1/3	3
0	0	-1	1	1	2
0	0	1/3	0	1/3	-2

L'òptim del nostre problema és doncs:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 0$$

Solució del problema 30.

Les solucions de cada problema són:

a)

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0.5 \quad x_4 = 0$$

b) Problema infactible.
c) Problema il·limitat.
d)

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 1/3 \quad x_3 = 1/3$$

Solució del problema 32.

Afegint les variables artificials x_5, x_6 i x_7, de costos $M = 5$, i multiplicant per -1 a ambdós costats de la primera restricció (per tal de tenir el terme de la dreta positiu), el problema a solucionar és:

$$\min_{x_1,\dots,x_7} \quad x_1 - x_3 + x_4 + 5(x_5 + x_6 + x_7)$$

$$\text{subj. a}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
2x_1 & 2x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & & & = & 3 \\
x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & +x_6 & & = & 6 \\
2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & = & 5 \\
\multicolumn{9}{l}{x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7}
\end{array}$$

Directament obtenim la solució (bàsica): $x_i = 0,\ i = 1, \dots, 4,\ x_5 = 3,\ x_6 = 6,\ x_7 = 5$. A partir d'aquest punt inicial factible, les taules del símplex que anem obtenint són:

Iteració 0

$\boxed{2}$	2	-1	-1	1	0	0	3
1	2	3	0	0	1	0	6
2	2	1	1	0	0	1	5
-24	-30	-16	1	0	0	0	-70

Iteració 1

1	$\boxed{1}$	-0.5	-0.5	0.5	0	0	1.5
0	1	3.5	0.5	-0.5	1	0	4.5
0	0	2	2	-1	0	1	2
0	-6	-28	-11	12	0	0	-34

Iteració 2

1	1	-0.5	-0.5	0.5	0	0	1.5
-1	0	$\boxed{4}$	1	-1	1	0	3
0	0	2	2	-1	0	1	2
6	0	-31	-14	15	0	0	-25

Iteració 3

0.875	1	0	-0.375	0.375	0.125	0	1.875
-0.25	0	1	0.25	-0.25	0.25	0	0.75
$\boxed{0.5}$	0	0	1.5	-0.5	-0.5	1	0.5
-1.75	0	0	-6.25	7.25	7.75	0	-1.75

Iteració 4

0	1	0	-3	1.25	1	-1.75	1
0	0	1	1	-0.5	0	0.5	1
1	0	0	$\boxed{3}$	-1	-1	2	1
0	0	0	-1	5.5	6	3.5	0

Iteració 5

1	1	0	0	0.25	0	0.25	2
-1/3	0	1	0	-1/6	1/3	-1/6	2/3
1/3	0	0	1	-1/3	-1/3	2/3	1/3
1/3	0	0	0	5 1/6	5 2/3	4 1/6	1/3

L'òptim assolit és el mateix que l'obtingut al problema 28:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2/3 \quad x_4 = 1/3$$

i els valors de la funció objectiu també coincideixen: $-1/3$.

Solució del problema 33.

Solucionem cada un dels apartats. Ens caldrà conèixer la inversa de la matriu B:

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) El valor de les variables bàsiques a l'òptim és de

$$x_B^* = B^{-1}b = (\,4 \quad 1/3 \quad 1/3\,)^T$$

La quarta variable no bàsica té un valor de 0.

b) La solució dual y pot ser calculada com

$$y^{*T} = c_B^T B^{-1} = (\,2/3 \quad -1/3 \quad 2/3\,)$$

c) Si x_4 ha de ser no bàsica s'ha de garantir que el seu cost reduït ρ_4 no sigui positiu. Per tant tenim:

$$0 \leq \rho_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = c_4 - (\,2/3 \quad -1/3 \quad 2/3\,)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_4 - 4/3$$

Llavors $c_4 \geq 4/3$ per garantir que x_4 és no bàsica.

d) Per veure si continua essent òptima només hem de veure si $\tilde{x}_B = B^{-1}\tilde{b} \geq 0$, ja que el vector de termes independents no intervé en la determinació dels costos reduïts i només ens pot afectar fent-nos perdre la no-negativitat de les variables. Observem que

$$\tilde{x}_B = B^{-1}\tilde{b} = (\,4 \quad 2/3 \quad 2/3\,)^T \geq 0$$

i per tant la base continua essent òptima. La diferència entre la funció objectiu amb b i amb $\tilde{b}$ és de

$$c_B^T \tilde{x}_B - c_B^T x_B^* = 4 + 4/3 - (4 + 2/3) = 2/3$$

que correspon exactament amb l'increment del vector b

$$\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

multiplicat per la solució dual ($y^{*T} = (\,2/3 \quad -1/3 \quad 2/3\,)$):

$$y^{*T}\Delta b = 2/3 = c_B^T \tilde{x}_B - c_B^T x_B^*$$

Es deixa al lector que comprovi com aquest efecte es manté per al nou vector de termes independents perturbat $\hat{b}$.

Solució del problema 34.

En aquest cas tenim un problem amb restriccions de $\leq$. Suposem que sabem com transformar problemes amb restriccions de $=$ i de $\geq$. Mirem com, a partir d'aquests dos casos, com podem obtenir el dual d'un problema amb restriccions de $\leq$.

i) Sabent que el dual d'un problema lineal amb restriccions d'igualtat ve donat per:

$$(P)\quad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad (D)\quad \begin{array}{rl} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & A^T y \leq c \\ & y \text{ lliure} \end{array}$$

Llavors podem convertir el problema original en un d'igualtat afegint les folgues s, que tindran un cost 0, tal i com segueix:

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x + 0s \\ \text{subj. a} & \\ & Ax + s = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Ara, el dual del problema anterior és directament:

$$\begin{array}{rl} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{pmatrix} A^T \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ & y \text{ lliure} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rl} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & A^T y \leq c \\ & y \leq 0 \end{array}$$

ii) En aquest segon cas en basarem en el fet que el primal d'un problema amb restriccions de $\geq$ ve donat per:

$$(P)\quad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad (D)\quad \begin{array}{rl} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Aleshores podem transformar el nostre problema original a la forma amb $\geq$:

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

I ara el seu dual serà:

$$\begin{aligned} \max \quad & -b^T\tilde{y} \\ \text{subj. a} \quad & \\ & -A^T\tilde{y} \leq c \\ & \tilde{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Ara fent el canvi de variable $y = -\tilde{y}$, podem escriure finalment el dual del nostre problema original com:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{subj. a} \quad & \\ & A^T y \leq c \\ & y \leq 0 \end{aligned}$$

que correspon amb la formulació de l'apartat i).

Ara cal comprovar que $y^T = c_B^T B^{-1}$ és un punt factible dual, on c_B i B són respectivament els costos i matriu bàsica al punt òptim del problema primal original. Només hem de veure si el vector y^T abans definit satisfà que $y^T A \leq c^T$ i $y \leq 0$. Si considerem A dividida en $A = (B \;\; N)$ (B és la matriu bàsica i N la matriu no bàsica) aleshores:

$$y^T A = c_B^T B^{-1}(B \;\; N) = (c_B^T \;\; c_B^T B^{-1} N) \leq (c_B^T \;\; c_N^T)$$

A l'expressió anterior queda garantit que $c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T$ degut a que els costos reduïts del problema primal ρ han de garantir a l'òptim que $\rho \geq 0$. Recordem que $\rho^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$. Aleshores tenim que

$$0 \leq \rho^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \quad \Longrightarrow \quad c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T$$

Ja hem vist una de les dues condicions que ha de satisfer y per ser factible dual. Ara ens falta la segona: $y \leq 0$. Suposem que, per exemple, la component i-èssima de y (y_i) és positiva, i arribarem a una contradicció. Per tant, garantirem que $y \leq 0$. Per veure això hem de tenir present que la columna de $Ax + s = b$ associada amb la i-èssima folga no és més que la i-èssima columna de la matriu identitat (que denotarem per e_i). A més el cost d'aquesta folga és 0. Aleshores, donat que $y_i > 0$, el cost reduït ρ_i de la i-èssima folga és:

$$\rho_i = 0 - y^T e_i = -y_i < 0$$

Però aleshores, la solució actual no pot ser òptima, donat que tenim una $\rho_i < 0$. Això contradiu el que havíem considerat sobre l'optimalitat dels vectors c_B i B. Per tant, no pot ser que cap $y_i > 0$.

Solució del problema 35.

El dual (D) del problema original (P) sabem que ve donat per (és el dual en forma asimètrica):

$$(D) \quad \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{subj. a} \quad & \\ & A^T y \leq c \\ & y \text{ lliure} \end{aligned}$$

Ara hem d'escriure (D) d'alguna forma que ens permeti obtenir el seu dual de forma directa. Introduint el canvi de variable $y = u - v,\ u \geq 0\ \ v \geq 0$, i sabent que el max $b^T y \equiv -\min -b^T y$, podem escriure (D) de forma:

$$(D)\quad \begin{array}{ll} -\min & -b^T(u-v) \\ \text{subj. a} & \\ & A^T(u-v) \leq c \\ & u \geq 0 \ \ v \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad (D)\quad \begin{array}{ll} -\min & \begin{pmatrix} -b^T & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{pmatrix} -A^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq -c \\ & u \geq 0 \ \ v \geq 0 \end{array}$$

El dual de (D), que anomenarem (DD), és conegut i ve donat per (usant el dual en forma simètrica):

$$(DD)\quad \begin{array}{ll} -\max & -c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{pmatrix} (-A^T)^T \\ (A^T)^T \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b^T \\ b^T \end{pmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad (DD)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rcl} -Ax & \leq & -b^T \\ Ax & \leq & b^T \end{array} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Ara només cal adonar-se que les restriccions $-Ax \leq -b^T$ i $Ax \leq b^T$ equivalen de fet a $Ax = b$, amb el qual garantim que $(DD) \equiv (P)$.

Solució del problema 36.

Abans de res escriurem el dual del problema presentat a l'enunciat (usem el dual en forma simètrica, ja que el problema primal té restriccions de $\geq$), i el transformem de forma que la funció objectiu s'hagi de minimitzar:

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \max & -y_1 - y_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrcr} -2y_1 & -y_2 & \leq & 4 \\ -2y_1 & +4y_2 & \leq & -8 \end{array} \\ & y_1 \geq 0 \ \ y_2 \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad (D)\quad \begin{array}{ll} -\min & y_1 + y_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrcr} -2y_1 & -y_2 & \leq & 4 \\ -2y_1 & +4y_2 & \leq & -8 \end{array} \\ & y_1 \geq 0 \ \ y_2 \geq 0 \end{array}$$

Ara mirem de solucionar el problema primal. Convertint les restriccions en restriccions de $\leq$, i afegint les folgues primals x_3 i x_4, el problema primal queda com:

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & 4x_1 - 8x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = & 1 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Tenim una base factible incial directament fent que $x_3 = 1$ i $x_4 = 1$. Iterant a partir d'aquest punt, les taules del símplex que obtenim són (es marca el pivot amb un requadre):

Iteració 0

2	$\boxed{2}$	1	0	1
1	-4	0	1	1
4	-8	0	0	0

Iteració 1

1	1	0.5	0	0.5
5	0	2	1	3
12	0	4	0	4

El valor òptim de funció objectiu que hem obtingut és de -4.

Ara mirem de solucionar el problema dual (D). Primer de tot afegirem les folgues duals y_3 i y_4, convertint les restriccions en restriccions de =. Ara, però, no sembla immediat trobat una solució factible inicial (podem fer que $y_3 = 4$, però no que $y_4 = -8$). Per tant, multiplicarem la segona restricció per -1, afegirem una variable artificial y_5, i realitzarem una fase I amb el problema:

$$
\begin{array}{lllllll}
\min & y_5 & & & & & \\
\text{subj. a} & & & & & & \\
& -2y_1 & -y_2 & +y_3 & & & = 4 \\
& 2y_1 & -4y_2 & & -y_4 & +y_5 & = 8 \\
& y_i \geq 0 & i = 1, ..., 5 & & & &
\end{array}
$$

Les taules de la fase I són:

Iteracions de la Fase I del problema dual

Iteració 0

-2	-1	1	0	0	4
$\boxed{2}$	-4	0	-1	1	8
-2	4	0	1	0	-8

Iteració 1

0	-5	1	-1	1	12
1	-2	0	-0.5	0.5	4
0	0	0	0	1	0

Hem obtingut un put factible per al problema dual: $y_1 = 4,\ y_2 = 0,\ y_3 = 12, y_4 = 0$. Ara iterem a partir d'aquest punt amb el problema dual original, eliminant la variable artificial y_5 (fase II):

Iteracions de la Fase II del problema dual

Iteració 0

1	-2	0	-0.5	4
0	-5	1	-1	12
0	3	0	0.5	-4

Observem com la solució factible inicial ja és òptima. El valor de la funció objectiu dual és de 4. Recordem però, que hem de negar aquest valor, ja que vàrem transformar el problema dual de $\max b^T y$ a $-\min -b^T y$. Per tant la solució del dual és de -4. Aquest valor correspon amb el del problema primal, tal i com s'ha de garantir sempre. A més, observant les taules òptimes primals i duals, podem adonar-nos d'una una clara simetria: els valors de les variables primals bàsiques apareixen com a costos reduïts de les variables duals no bàsiques (i viceversa), els costos reduïts de les variables primals no bàsiques corresponen als valors de les variables duals bàsiques (i viceversa), i els termes no bàsics de la taula primal òptima apareixen transposats i negats com a termes no bàsics a la taula dual òptima.

Solució del problema 37.

a) Abans de res cal que obtinguem la taula del símplex associada amb el punt òptim. Inicialment podem considerar la solució inicial factible formada per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 6, 20, 6)$, amb la base formada per $\{x_3, x_4, x_5\}$. Despres només cal realitzar dues iteracions per fer entrar $\{x_1, x_2\}$ a la base, fent sortir $\{x_3, x_4\}$. Les taules que obtenim en aquest procés són:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 20 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
-p & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \begin{array}{c}\text{entra } x_1\\ \text{surt } x_3\end{array} \longrightarrow \quad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -6 \\
0 & 11 & 4 & 1 & 0 & 44 \\
0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 18 \\
\hline
0 & -1-2p & -p & 0 & 0 & -6p
\end{array}
\quad \longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{c}\text{entra } x_2\\ \text{surt } x_4\end{array} \longrightarrow \quad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -3/11 & 2/11 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 4/11 & 1/11 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 10/11 & -3/11 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & (4-3p)/11 & (1+2p)/11 & 0 & 4+2p
\end{array}
$$

Per tant $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, i $x_5^* = 6$.

El valor de la funció objectiu és directament:

$$c^T x^* = -px_1^* - x_2^* = -2p - 4$$

b) Les variables bàsiques a l'òptim són x_1,x_2 i x_5. Per tant, la base B i la seva inversa B^{-1} són:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

El valor òptim de les variables no-bàsiques es 0 directament: $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$. El valor x_B^* de les variables bàsiques es troba solucionant:

$$x_B^* = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Per tant $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, i $x_5^* = 6$.

El valor de la funció objectiu és directament:

$$c^T x^* = -px_1^* - x_2^* = -2p - 4$$

c) Sabem que un problema primal (P) $\{\min c^T x \text{ s.a. } Ax = b \;\; x \geq 0\}$ té associat el problema dual (D) $\{\max b^T y$ s.a. $A^T y \leq c \;\; y$ lliure$\}$. Per tant, el dual del problema original és:

$$
(P) \quad \begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2} & -\, px_1 - x_2 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{rrrcl}
-x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 6 \\
4x_1 & +3x_2 & +x_4 & = & 20 \\
2x_1 & -x_2 & +x_5 & = & 6
\end{array} \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1,...,5
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad (D) \quad \begin{array}{ll}
\max\limits_{y_1,y_2,y_3} & 6y_1 + 20y_2 + 6y_3 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{rrrcl}
-y_1 & +4y_2 & +2y_3 & \leq & -p \\
2y_1 & +3y_2 & -y_3 & \leq & -1
\end{array} \\
& y_i \leq 0 \quad i = 1,2,3
\end{array}
$$

Ara hem de trobar la solució òptima dual, de dues formes diferents: primer, usant la taula òptima calculada a l'apartat a), i, en segon lloc, sense tenir en compte aquesta informació.
1) Tenim en compte la taula òptima.
Les variables duals y_1, y_2 i y_3 estan associades amb les folgues x_3, x_4 i x_5 (ja que aquestes tenen costos 0 i les seves columnes són columnes de la matriu identitat), i els seus valors al punt òptim s'obtenen prenent, amb signe contrari, els costos reduïts ρ de x_3, x_4 i x_5 de la taula òptima. Per tant tenim directament que $y_1^* = -(4-3p)/11$, $y_2^* = -(1+2p)/11$ i $y_3^* = 0$.
2) No tenim en compte la taula òptima.
Les variables duals poden ser calculades directament a partir de la base òptima del problema primal i dels costos de les variables bàsiques fent:

$$y^T = c_B^T B^{-1} = (\,-p \quad -1 \quad 0\,)\, B^{-1} = (\,(3p-4)/11 \quad (-1-2p)/11 \quad 0\,)$$

Observem com coincideix amb la solució obtinguda directament de la taula del símplex.

Ara podem calcular el valor de la funció objectiu dual $b^T y$:

$$b^T y = 6y_1 + 20y_2 + 6y_3 = 6(3p-4)/11 + 20(-1-2p)/11 + 6 \cdot 0 = (-44-22p)/11 = -4-2p$$

S'observa com coincideix amb el valor de la funció objectiu primal a l'òptim, ja que sempre es verifica que $c^T x^* = b^T y^*$.

d) La solució primal actual continuarà essent òptima sempre que es verifiqui que els costos reduïts ρ de x_3 i x_4 continuen essent no negatius (el vector ρ ha estat calculat a l'apartat a) anterior). És a dir, s'ha de satisfer que:

$$\left.\begin{array}{l}
\rho_{x_3} = (4-3p)/11 \geq 0 \Rightarrow p \leq 4/3 \\
\rho_{x_4} = (1+2p)/11 \geq 0 \Rightarrow p \geq -1/2
\end{array}\right. \Rightarrow p \in [-1/2, 4/3]$$

Si $p = -1/2$ o $p = 4/3$ aleshores podríem realitzar una pivotació, però no milloraríem el valor de la funció objectiu. Ens trobaríem davant un cas d'òptims alternatius.

e) Per poder representar gràficament el problema en $\mathbb{R}^2$ cal eliminar primer les variables de folga x_3, x_4 i x_5, obtenint aleshores un problema amb només les variables x_1 i x_2 i 3 restriccions de desigualtat. La Fig. 7 mostra la regió factible del problema primal. Aquesta regió factible es troba delimitada per les 3 restriccions (r1, r2 i r3 a la gràfica) i els eixos coordenats.

La Fig. 7 també presenta la funció objectiu quan $p = 1$ en el moment en que talla al punt més extrem possible dins la regió factible. Aquest punt és el $(2, 4)$, i aquesta és la solució del problema per $p = 1$, amb un valor de funció objectiu de -6.

També es mostren a la gràfica les funcions objectius quan $p = -1/2$ i $p = 4/3$ (rectes $x_2 = x_1/2 + K$ i $x_2 = -3x_1/4 + K$ respectivament). Es veu clarament com aquestes rectes són

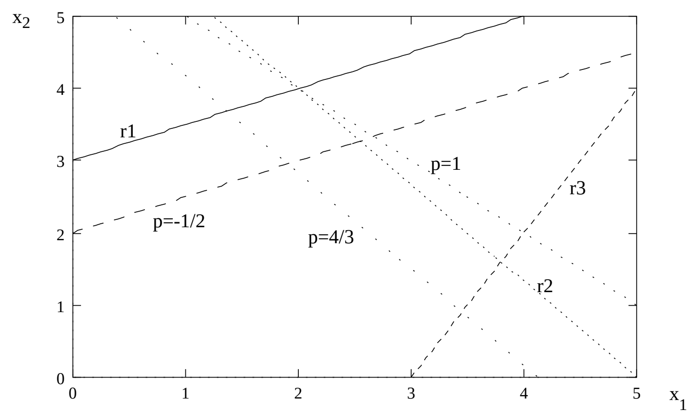

Figura 7. Regió factible i funció objectiu per $p = 1$, $p = -1/2$ i $p = 4/3$.

paral·leles a les restriccions r1 i r2, amb el qual si ens allunyéssim cap a l'exterior de la zona factible les rectes $p = -1/2$ i $p = 4/3$ se solaparien amb r1 i r2, amb el qual obtindríem molts punts òptims alternatius. Això ratifica el vist a l'apartat anterior.

f) Per solucionar el nou problema quan es modifica el terme de la dreta, abans de res cal comprovar si la base actual B (formada per les columnes de x_1, x_2 i x_5) continua essent òptima. Llavors comprovarem els nous valors d'aquestes variables amb el nou terme de la dreta:

$$x_B = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el nou punt és factible. Com que un canvi en el terme de la dreta no ens modifica el valor actual de $\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$, tenim que aquesta solució és òptima (no cal fer cap pivotació amb els valors actuals de ρ). Per tant, la solució òptima del nou problema ve donada directament per $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (2, 4, 0, 0, 0)$.

Solució del problema 38.

a) Transformant el problema a la seva forma estàndard obtenim la següent formulació:

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 - cx_2 - x_3 \\ \text{subjecte a} & \\ & \begin{array}{cccccll} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & 8 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 3 \\ \multicolumn{7}{l}{x_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots 5,} \end{array} \end{array}$$

on $x_1^* = 3$, $x_2^* = x_3^* = 0$.
Per determinar el rang de valors de c cal estudiar com varien els costos reduïts $\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ en funció de c. Donat que no podem usar les taules del símplex, hem d'usar el símplex en forma matricial. Per tant hem de determinar la base òptima. Sabem que x_1 es básica a l'òptim perquè té un valor positiu. Calculem els valor de les folgues a l'òptim per

determinar quina acompanyarà a x_1 a la base:

$$\begin{aligned} 2\cdot 3 - 0 + 0 + x_4 = 8 \quad &\Rightarrow \quad x_4^* = 2 \\ 3 + 0 + 0 + x_5 = 3 \quad &\Rightarrow \quad x_3^* = 0. \end{aligned}$$

Les variables bàsiques són, per tant, $\mathcal{B} = \{x_1, x_4\}$, de forma que les matrius B i N, i vectors c_B i c_N són:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad c_N = \begin{pmatrix} -c & -1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Usant les matrius i vectors anteriors, el vector ρ obtingut és:

$$\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} -c+2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per a que la base actual continui essent òptima s'ha de garantir que $\rho \geq 0$, i per tant tenim que $c \leq 2$.

b) Sabem que la variació de la funció objectiu respecte el vector de termes independents b ve donada per

$$\frac{\partial \text{fobj}}{\partial b} = c_B^T B^{-1}.$$

Usant l'expressió de c_B i B que hem obtingut a l'apartat a), tenim que

$$\frac{\partial \text{fobj}}{\partial b} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

El nou vector de termes independents és $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 7.5 & 3.5 \end{pmatrix}^T$. Observem que amb aquest nou vector la base actual continua essent òptima:

$$Bx_B = \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 3.5 \geq 0,\ x_4^* = 0.5 \geq 0.$$

Així doncs, la variació de la funció objectiu Δfobj vindrà donada per:

$$\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \text{fobj} = (c_B B^{-1}) \cdot \Delta b = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = -1.$$

És a dir, la funció objectiu disminueix en una unitat.

Solució del problema 39.

a) Denotant per x_1 i x_2 el nombre d'hores impartides als curssos 1 i 2 respectivament, el problema obtingut pot ser formulat com:

$$\begin{array}{rll} \min & 5x_1 + Px_2 & \\ \text{subj. a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 120 & \text{[restricció hores de preparació]} \\ & x_1 + x_2 \leq 40 & \text{[restricció hores d'impartició]} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Transformant a la forma estàndard s'obté:

$$\begin{array}{rl} \min & 5x_1 + Px_2 \\ \text{subj. a} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, ..., 4 \end{array}$$

b) Considerem inicialment la taula següent (amb una solució bàsica i factible):

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{4} & 2 & 1 & 0 & 120 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 40 \\ \hline \text{-5} & -P & 0 & 0 & \text{-0} \end{array}$$

Podem millorar la funció objectiu entrant x_1 a la base i fent sortir la variable bàsica associada al mínim del "ratio test" ($\min\{120/4, 40\} = 30$), en aquest cas x_3. Pivotem i obtenim la següent taula:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 30 \\ 0 & \boxed{1/2} & \text{-}1/4 & 1 & 10 \\ \hline 0 & 5/2 - P & 5/4 & 0 & 150 \end{array}$$

Si $P \leq 5/2$, l'òptim és $x_1^* = 30$, $x_2^* = 0$. Si $P > 5/2$, però, encara podem millorar la funció objectiu. En aquest cas entrarem x_2 a la base i sortirà x_4 (proporciona el mínim del "ratio test" $\min\{30/(1/2), 10/(1/2)\} = 20$). La nova taula és:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \boxed{1/2} & \text{-}1 & 20 \\ 0 & 1 & \text{-}1/2 & 2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & (5-P)/2 & 2P - 5 & 100 + 20P \end{array}$$

El cost reduït $\rho_4 = 2P - 5$ és sempre positiu si $P > 5/2$. Pel que fa a $\rho_3 = (5 - P)/2$, si $P < 5$ aquest cost reduït és ≥ 0, de forma que l'òptim del nostre problema ve donat per $x_1^* = 20$, $x_2^* = 20$. Si $P > 5$ podem continuar iterant ($\rho_3 < 0$), entrant x_3 a la base i fent sortir x_1. La nova taula és:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & \text{-}2 & 40 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 40 \\ \hline -5 + P & 0 & 0 & P & 40P \end{array}$$

Ara per a valors $P \geq 5$ la solució obtinguda $x_1^* = 0$, $x_2^* = 40$ ja és òptima.

Resumint, el nombre d'hores òptim per a cada curs en funció de P és el següent:

x_1^* hores al curs C1	x_2^* hores al curs C2	valor de P
30	0	$P \leq 2.5$ mil pts/h
20	20	$5 \geq P \geq 2.5$ mil pts/h
0	40	$P \geq 5$ mil pts/h

c) La representació gràfica dels resultats obtinguts a l'apartat b) es deixa al lector.

d) Si $P = 3$ ens trobem en la situació $2.5 \leq P \leq 5$ de l'apartat b). Utilitzant la taula òptima obtinguda en aquest cas, i usant un valor de $P = 3$ tenim

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & (5-P)/2 & 2P-5 & 100+20P \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 160 \end{array}$$

Quan es modifica la component b_i del vector de termes independents b sabem que la funció objectiu varia segons $y_i = (c_B^T B^{-1})_i$. En aquest cas $y^T = c_B^T B^{-1}$ pot ser directament obtingut de la taula del símplex, a partir dels costos reduïts de les folgues (usant que els seus costos son 0, i que les seves columnes dins la matriu de restriccions són columnes de la matriu identitat):

$$\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (\,0 \quad 0\,) - c_B^T B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -c_B^T B^{-1} N = -y^T \;\Rightarrow\; y^T = -\rho = (\,-1 \quad -1\,)\,.$$

És a dir, si augmentem en una unitat la primera o segona restricció obtenim el mateix guany de mil pts (passem de 160000 a 161000 pts). És indiferent, per tant, augmentar el nombre d'hores d'impartició o el preparació. El que sí que varia són les hores impartides en cada cas. Si passem de 120 a 121 hores de preparació, el nombre d'hores impartides a cada curs és de

$$x^* = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 121 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.5 \\ 19.5 \end{pmatrix}.$$

Si passem de 40 a 41 hores obtenim

$$x^* = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 120 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Solució del problema 40.

a) Després de transformar el problema a la forma estàndard, la matriu A de restriccions i els vectors b, c i x_0 de termes independents, costos i punt inicial vénen donats per:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 4 \\ 2.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les dues primeres iteracions del mètode de l'escalat afí primal per aquest problema són presentades a continuació.

It. 1) La funció objectiu al punt actual és de $c^T x_0 = -2.5$. El nou punt x_1 serà calculat com $x_1 = x_0 + \rho \alpha d_x$, on $\rho = 0.95$. Cal que determinem d_x. En primer lloc trobarem y solucionant $(AD^2A^T)y = AD^2c$, on $D = \text{diag}(0.5, 0.5, 4, 2.5, 1)$ (això vol dir que és una matriu diagonal formada a partir de x_0 –només hi ha termes diferents de zero a la diagonal i aquests corresponen a les components de x_0). La solució de y ve donada

per:
$$\begin{pmatrix} 21 & 1 & 0.5 \\ 1 & 12.5 & 1.75 \\ 0.5 & 1.75 & 1.5 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -2 \\ -4.25 \\ -1.25 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} -0.070718 \\ -0.264115 \\ -0.501627 \end{pmatrix}$$

Podem comprovar que el punt actual no és òptim observant com el gap dual és major que 0:
$$\text{gap dual} = \frac{|c^T x_0 - b^T y|}{1 + |c^T x_0|} = |-2.5 - (-1.620)|/3.5 = 0.25114$$

Ara calcularem $z = c - A^T y$:
$$z = c - A^T y = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.576842 \\ -1.416651 \\ -0.070718 \\ 0.264115 \\ -0.501627 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.423158 \\ -0.583349 \\ 0.070718 \\ -0.264115 \\ 0.501627 \end{pmatrix}$$

Estem ara en disposició de calcular $d_x = -D^2 z$:
$$d_x = -D^2 z = \begin{pmatrix} 0.35579 \\ 0.14584 \\ -1.13148 \\ 1.65072 \\ -0.50163 \end{pmatrix}$$

Ara cal determinar quant podem bellugar-nos en la direcció d_x mantenint que $x_1 > 0$ (obtenció de la longitud de pas α):
$$\alpha = \min\{-x_{0_i}/d_{x_i} \ \forall i \text{ tal que } d_{x_i} < 0\} = \min\{4/1.13148, 1.0/0.50163\} = 1.9935$$

Finalment obtenim el nou punt $x_1 = x_0 + \rho\alpha d_x$:
$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 4 \\ 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.95 \cdot 1.9935 \begin{pmatrix} 0.35579 \\ 0.14584 \\ -1.13148 \\ 1.65072 \\ -0.50163 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.173803 \\ 0.776190 \\ 1.857169 \\ 5.626170 \\ 0.050007 \end{pmatrix}$$

It. 2) En aquesta segona iteració només es mostren els valors obtinguts per a cada valor i vector calculat, sense detallar el procés d'obtenció (aquest és anàleg al fet a la primera iteració):

$$\text{funció objectiu:} \quad c^T x_1 = -5.0738 \qquad \qquad \text{vector } y\text{:} \quad y = \begin{pmatrix} -0.1361242 \\ 0.0017763 \\ -2.4025868 \end{pmatrix}$$

gap dual: $\dfrac{|c^T x_1 - b^T y|}{1+|c^T x_1|} = 0.067538$ vector z: $z = \begin{pmatrix} -0.0582450 \\ 0.1232333 \\ 0.1361242 \\ 0.0017763 \\ 2.4025868 \end{pmatrix}$

vector d_x: $d_x = \begin{pmatrix} 0.0802514 \\ -0.0742449 \\ -0.4694953 \\ -0.0562255 \\ -0.0060065 \end{pmatrix}$ longitud de pas: $\alpha = 3.9556$

nou punt x_2: $x_2 = \begin{pmatrix} 1.475381 \\ 0.497191 \\ 0.092858 \\ 5.414905 \\ 0.027429 \end{pmatrix}$

La representació gràfica en $\mathbb{R}^2$ de la regió factible i dels punts x_0, x_1 i x_2 sobre aquesta es deixa per al lector. Sense aquesta representació, però, també es pot observar com els punts que es van obtenint s'atansen al punt mínim del problema en $\mathbb{R}^2$: $(3/2, 1/2)$

b) Un cop transformat el problema a la forma estàndard, tenim els vectors i matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Els càlculs a realitzar per obtenir els vectors d_x, z, y, i el valor α són equivalents als realitzats a l'apartat a) anterior, i no seran aquí presentats. Únicament es presenta el valor dels punts x_1 i x_2 assolits:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.412727 \\ 1.224545 \\ 0.050000 \\ 5.863636 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0.020636 \\ 1.997851 \\ 0.039123 \\ 3.946688 \end{pmatrix}$$

Es deixa al lector la representació de la regió factible i dels punts x_0, x_1 i x_2 sobre aquesta. S'observa, però, com aquests s'atansen a l'òptim del problema en $\mathbb{R}^2$: $(0, 2)$.

Solució del problema 41.

De tot el dit a l'enunciat, sabem que si $Pc = 0$ aleshores es verifica que existeix un vector λ tal que

$$\lambda^T A = c^T$$

Considerem ara qualsevol punt factible x. Això vol dir que $x \geq 0$ i que $Ax = b$. Per tant, multiplicant per x la igualtat anterior tenim:

$$\begin{aligned} \lambda^T A &= c^T \\ \lambda^T A x &= c^T x \\ \lambda^T b &= c^T x \end{aligned}$$

És a dir, el valor de funció objectiu $c^T x$ per a qualsevol punt factible és sempre constant i igual a $\lambda^T b$. Per tant tots els punts factibles tenen el mateix valor de funció objectiu i tots són òptims.

Una justificació alternativa pot ser aportada si tenim en compte que λ no és de fet més que una solució del problema dual (a l'enunciat consideràvem el primal en forma estàndard), x és qualsevol solució del problema primal, i que $\lambda^T b = c^T x$. Pel teorema de la dualitat feble, tenim directament que λ i x són òptim duals i primals. Com que no hem imposat cap condició especial sobre x (únicament que sigui factible), es conclou que qualsevol punt factible x és tambe òptim.

Mirem d'estudiar el problema

$$\begin{array}{rl} \min & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

Aquest verifica precisament que $\lambda^T A = c^T$, essent $\lambda^T = (\,1 \quad 1\,)$. Cada una de les restriccions defineix un pla, i els punts factibles són aquells que pertanyen als dos plans (la intersecció de dos plans és una recta, si aquests no són paral·lels) i es troben a l'ortant positiu. Per tant, la regió factible és un segment. Podem calcular aquest segment a partir de les dues restriccions de la forma següent: de la segona restricció tenim que $x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 1$, i substituint aquest valor a la primera restricció tenim que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (2x_1 + 3x_2 - 1) &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Per tant la regió factible són aquells punts del segment $S = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1 + 4x_2 = 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$. La funció objectiu és, però, $3x_1 + 4x_2$, i qualsevol punt factible, per pertànyer a S, verifica que $3x_1 + 4x_2 = 2$, amb el qual tots els punts factibles tenen el mateix valor de funció objectiu igual a 2, essent tots ells òptims.

6 Solucions dels problemes de programació no lineal.

Solució del problema 42.

a) Sí és convex. Es pot comprovar de diverses formes. Una d'elles és aplicant la definició de convexitat "C és convex si $\forall u, v \in C \quad \alpha u + (1-\alpha)v \in C, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$":

$$A(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha A u + (1-\alpha)Av = \alpha b + (1-\alpha)b = b$$

Per tant $\alpha u + (1-\alpha)v \in C$

b) Sí és convex. Es pot comprovar de forma anàloga al cas anterior.

c) Sí és convex. Només cal veure que els punts de $\mathbb{R}^2$ tals que $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ defineixen un cercle centrat al (0,0) de radi 1. I un cercle és un conjunt convex.

d) Sí és convex. Aquest conjunt està format per tots els punts de $\mathbb{R}^2$ que satisfan que $-1 \leq x_1 + x_2 \leq 1$. Aquests són els punts que es troben entre les rectes paral·leles $x_1 + x_2 = -1$ i $x_1 + x_2 = 1$, i clarament son un conjunt convex (tot i que no afitat).

e) No és conjunt convex. Podem trobar fàcilment un contraexemple. Suposem que C_1 és l'interval real (i convex) $[0,1]$, i que C_2 és l'interval $[2,3]$. Clarament, els punts entre 1 i 2 no pertanyen a la unió, però poden ser obtinguts de forma $\alpha 1 + (1-\alpha)2 \quad 0 \leq \alpha \leq 1$. Per tant la unió de C_1 i C_2 no és un conjunt convex.

f) Sí és conjunt convex. Es demostra fàcilment directament aplicant la definició de convexitat. Cal veure si $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_1 \cap C_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$ on $u, v \in C_1 \cap C_2$. Com que $u \in C_1$ i C_1 és convex, tenim que $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_1$. Aplicant el mateix raonament podem concloure que $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_2$. Per tant $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_1 \cap C_2$.

Solució del problema 43.

a) Hem de veure si $\forall x, y$ i $0 \leq \alpha \leq 1$ es satisfà

$$(f_1 + f_2)(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha(f_1 + f_2)(x) + (1-\alpha)(f_1 + f_2)(y)$$

Sabent que $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ i usant que f_1 i f_2 són convexes tenim:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(\alpha x + (1-\alpha)y) &= f_1(\alpha x + (1-\alpha)y) + f_2(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \\ &\leq \alpha f_1(x) + (1-\alpha)f_1(y) + \alpha f_2(x) + (1-\alpha)f_2(y) = \\ &= \alpha(f_1 + f_2)(x) + (1-\alpha)(f_1 + f_2)(y)\end{aligned}$$

b) Hem de veure si $\forall x, y$ i $0 \leq \alpha \leq 1$ es satisfà

$$af(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha a f(x) + (1-\alpha) a f(y)$$

Com que f és convexa tenim directament que:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

i multiplicant a ambdós costats per a (com que $a \geq 0$ ho podem fer sense alterar el sentit de la desigualtat) tenim directament el resultat desitjat.

Solució del problema 44.

Si la restricció és $g(x) = c$, en general no es verifica que el conjunt de punts definit és convex. Per exemple, si la restricció és $x^2 = 9$ (on x^2 és una funció convexa), el conjunt de punts factibles són $\{+3, -3\}$, que clarament no és un conjunt convex.

Solució del problema 45.

Si considerem que H té el terme diagonal de la posició i negatiu ($H_{ii} < 0$) aleshores podem veure com per algun vector x no es satisfà la condició $x^T H x \geq 0$. Concretament, si prenem com x la i-èssima columna de la matriu identitat (columna que denotarem per e_i, i que té totes les components a 0, excepte la de la posició i on té un 1), aleshores tenim directament que

$$e_i^T H e_i = H_{ii} < 0$$

Per tant, H no és semidefinida positiva.

Solució del problema 46.

Per determinar la convexitat de $f(x, y)$ en funció dels paràmetres p i q caldrà estudiar els signes dels determinants dels menors principals de la hessiana $\nabla^2 f(x, y)$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2q/x & p\cos(py) \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2q/x^2 & 0 \\ 0 & -p^2 \sin(py) \end{pmatrix}$$

I ara, per garantir que $\nabla^2 f(x, y)$ sigui semidefinida positiva (amb el qual $f(x, y)$ serà convexa), s'ha de verificar que el determinants dels dos menors principals siguin no negatius:

$$\begin{aligned} \det(\Delta_1) &= -2q/x^2 \geq 0 \\ \det(\Delta_2) &= 2p^2 q/x^2 \sin(py) \geq 0 \end{aligned}$$

Hem d'observar en primer lloc que quan $x = 0$ el valor del primer determinant tendeix a $\pm\infty$. Això és degut a que la funció $\ln(x)$ tendeix a $-\infty$ en aquest punt. De fet hauríem d'imposar que $x > 0$ per tenir ben definit el signe del $\det(\Delta_1)$. Un cop comentat això, per garantir que $\det(\Delta_1) \geq 0$ cal que $q \leq 0$.

Estudiem ara el segon determinant. El terme $2p^2 q/x^2$ sempre és no positiu (donat que abans hem fixat que $q \leq 0$). Per tant si volem que $\det(\Delta_2) \geq 0$ cal que $\sin(py) \leq 0$. Això es verificarà sempre que $py \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \big([(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \cup [-2k\pi, , -(2k+1)\pi]\big)$. En aquest cas veiem que p pot prendre qualsevol valor, i, segons el valor que prengui, la regió on $f(x, y)$ és convexa variarà.

Resumint, la funció $f(x,y)$ serà convexa per valors de $q \leq 0$, per a qualsevol valor de p, i dins el subconjunt de $\mathbb{R}^2$ següent:

$$\{(x,y) \mid x > 0,\ y \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \big([(2k+1)/p\pi, (2k+2)/p\pi] \cup [-2k/p\pi, -(2k+1)/p\pi]\big)\}$$

La Fig. 8 mostra la gràfica de $f(x,y)$ per $q = -1$ i $p = 1$.

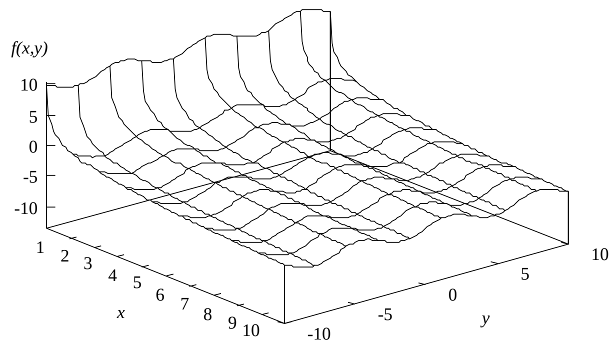

Figura 8. Gràfica de la funció $f(x,y) = q\ln(x^2) + \sin(py)$ quan $q = -1$ i $p = 1$

Solució del problema 47.

Per poder garantir que el punt solució obtingut és un mínim global s'ha de satisfer i) que el conjunt de punts Ω que defineix la regió factible sigui un conjunt convex, i ii) que la funció objectiu $f(x,y) = x^4 + 3y^2 - 2xy - 4x + 2y$ sigui convexa dins de Ω.

Anem a veure si es satisfà i). Tenim quatre restriccions. Sabem que el conjunt convex $\{z \in C \mid g_1(z) \leq c_1, \ldots, g_m(z) \leq c_m\}$ és convex si cada una de les restriccions $g_i(z)$ és convexa dins C (on C és convex). En aquest cas podem suposar que C correspon als valors de x i y majors que 1/2:

$$C = \{(x,y) \mid x \geq 1/2\ ,\ y \geq 1/2\}$$

Hem de veure llavors que ocorre amb les dues restriccions que ens queden. En primer lloc escrivim de forma $g_1(x) \leq c_1$ la primera:

$$-\ln(x+y) \leq 0$$

Ara hem de veure si $g_1(x,y)$ és una funció convexa dins C (observem que en aquest cas hem d'explicitar que és "dins C" donat que per valors tals que $x+y \leq 0$ la funcio ln no està definida; si això no passés ens podríem haver estalviat la introducció de C, i podríem haver considerat els límits simples $x \geq 1/2$ i $y \geq 1/2$ com dues restriccions qualsevols més). Per veure si és convexa cal veure si la matriu hessiana és semidefinida positiva:

$$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} -1/(x+y) & -1/(x+y) \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1/(x+y)^2 & 1/(x+y)^2 \\ 1/(x+y)^2 & 1/(x+y)^2 \end{pmatrix}$$

Ara cal comprovar el signe del determinant dels menors principals de la matriu $\nabla^2 g_1(x,y)$:

$$\det(\Delta_1) = 1/(x+y)^2 \geq 0$$
$$\det(\Delta_2) = 1/(x+y)^4 - 1/(x+y)^4 = 0$$

Com que els dos determinants són ≥ 0 tenim que $-\ln(x+y) \leq 0$ defineix un conjunt convex.

Ara hem de fer el mateix estudi amb la segona restricció $x^2 + y^2 \leq 20$:

$$\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Delta_1) = 2 \geq 0$$
$$\det(\Delta_2) = 4 \geq 0$$

Per tant $x^2 + y^2 \leq 20$ també defineix un conjunt convex dins C (en aquest cas defineix un conjunt convex a tot $\mathbb{R}^2$ de fet).

Ara finalment ens queda veure si es satisfà ii), és a dir, si la funció objectiu és convexa a $\Omega = \{(x,y) \mid \ln(x+y) \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 20,\ x \geq 1/2,\ y \geq 1/2\}$, on Ω ara ja sabem que és un conjunt convex pel que hem vist anteriorment. Estudiem la funció objectiu f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2y - 4 & 6y - 2x + 2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Delta_1) = 12x^2 \geq 0$$
$$\det(\Delta_2) = 6 \cdot 12x^2 - 4 = 72x^2 - 4$$

Observem com el determinant de $\nabla^2 f(x,y)$ és igual a $72x^2 - 4$. Per alguns valors (per. ex., $x = 0$) aquest determinant no pren valors positius. Tanmateix, per garantir que f és convexa dins Ω només hem d'assegurar-nos de que $72x^2 - 4$ sigui positiu dins Ω. I dins Ω els valors possibles de x sempre són superiors o iguals a $1/2$. En el cas extrem, per $x = 1/2$, tenim que $72x^2 - 4 = 72/4 - 4 = 18 - 4 \geq 0$. Per tant podem concloure que f és convexa dins Ω.

A la vista dels resultats anteriors podem garantir que l'òptim proporcionat per l'algorisme d'optimització correspon a un mínim global.

Solució del problema 48.

Per trobar els punts estacionaris cal solucionar $\nabla f(x) = 0$ per a cada problema, i tot seguit estudiar si $\nabla^2 f(x)$ és definida positiva als punts trobats.

a) La funció objectiu és $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y + xy$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - 4 + y & 2y - 8 + x \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observem com l'únic punt estacionari que hi ha és $(x,y) = (0,4)$. Donat que la matriu hessiana és definida positiva $\forall (x,y)$, podem concloure que el nostre punt és un mínim (i a més global, donat que la funció original és convexa a tot $\mathbb{R}^2$).

b) La funció objectiu és $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = (\, 2x - 4 \quad -2y + 6 \,) \qquad\qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

L'únic punt estacionari que hi ha és $(x, y) = (2, 3)$. La matriu hessiana, però, no és definida positiva. Per tant no podem garantir que sigui un mínim. De fet, no ho és. Un punt estacionari on la funció té hessiana indefinida (és a dir, $\exists x, y : x^T H x > 0 \quad y^T H y < 0$) s'anomena punt de sella, i correspon a punts on tant podem avançar en direccions que ens disminueixen com incrementen el valor de la funció objectiu. La Fig. 9 ens mostra l'aspecte de la funció $f(x, y)$ on queda clar el concepte de punt de sella (rep aquest nom perquè recorda a una "sella" de muntar).

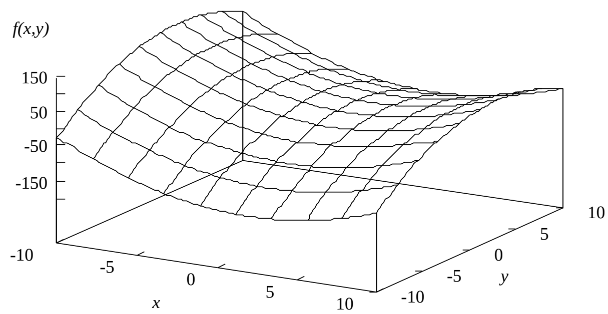

Figura 9. Gràfica de la funció $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5$

c) La funció objectiu és $f(x, y) = -e^{-(x^4+y^4)}$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = (\, 4x^3 e^{-(x^4+y^4)} \quad 4y^3 e^{-(x^4+y^4)} \,)$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} -16x^6 e^{-(x^4+y^4)} + 12x^2 e^{-(x^4+y^4)} & -16x^3 y^3 e^{-(x^4+y^4)} \\ -16x^3 y^3 e^{-(x^4+y^4)} & -16y^6 e^{-(x^4+y^4)} + 12y^2 e^{-(x^4+y^4)} \end{pmatrix}$$

L'únic punt estacionari que hi ha és $(x, y) = (0, 0)$ (ja que el terme $e^{-(x^4+y^4)}$ sempre és positiu, i únicament podem anul·lar les components del gradient fent que $x = y = 0$). La matriu hessiana avaluada al punt $(0, 0)$ és una matriu de zeros, i, per tant, és semidefinida positiva. Donat que la condició suficient per garantir que $(0, 0)$ és un mínim és que $\nabla^2 f(0, 0)$ sigui definida positiva, no podem garantir que aquest punt sigui un mínim local. En aquest cas, però, sí que és mínim, i a més, és mínim global. Això es pot comprovar observant la gràfica d'aquesta funció a la Fig. 10, la qual té forma de campana invertida.

d) La funció objectiu és $f(x, y) = x^2 - y^4$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = (\, 2x \quad -4y^3 \,) \qquad\qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

L'únic punt estacionari que hi ha és $(x, y) = (0, 0)$. La matriu hessiana avaluada al punt $(0, 0)$ és semidefinida positiva. Com al cas c) anterior, no podem garantir que $(0, 0)$ sigui un mínim local (ja que $\nabla^2 f(0, 0)$ no és definida positiva). En aquest cas, però, i a diferència de c), el punt

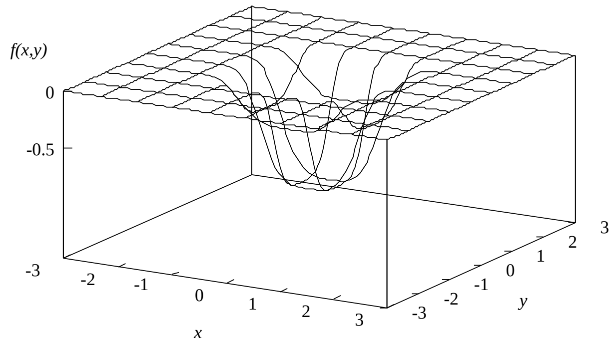

Figura 10. Gràfica de la funció $f(x,y) = -e^{-(x^4+y^4)}$

$(0,0)$ no és cap mínim local (per exemple, el punt $(0,a)$ $a \in \mathbb{R}$ té un valor de funció objectiu menor).

Solució del problema 50.

La funció $f(x) = x^2 - 3x + 5 + \ln(\frac{1}{x+1})$ a l'interval [0,5] té una gràfica com la de la Fig. 11. Clarament s'observa com té un únic mínim en aquest interval. De fet la primera i segona derivades de $f(x)$ són:

$$f'(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x+1} \qquad\qquad f''(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

La segona derivada és sempre positiva, i per tant la funció $f(x)$ és convexa a [0,5] i només té un únic mínim en aquest interval (és a dir, és unimodal). Anul·lant la primera derivada podem observar com aquest mínim correspon al valor $x^* = (1+\sqrt{33})/4 = 1.6861$.

Un cop hem garantit que la funció $f(x)$ és unimodal a [0,5] podem aplicar la cerca de Fibonacci. En primer lloc cal determinar el nombre N d'avaluacions que ens cal fer per donar un interval d'incertesa de longitud menor o igual a 1, tal i com demana l'enunciat. L'interval original [0,5] té una longitud de $d_1 = 5$. Sabem que la longitud d_k de l'interval a cada avaluació k, al mètode de Fibonacci ve donada per

$$d_k = \frac{F_{N-k+1}}{F_N} d_1$$

A la darrera avaluació tenim que $k = N$ (per tant $F_{N-k+1} = F_1 = 1$), i que $d_k \leq 1$. Tot això fa que:

$$1 \geq d_k = \frac{F_1}{F_N} 5 = \frac{5}{F_N} \quad \Rightarrow \quad F_N \geq 5 \quad \Rightarrow \quad N \geq 4$$

Per tant prendrem $N = 4$, per tal de realitzar un nombre mínim d'avaluacions. Ara ja podem aplicar la cerca de Fibonacci. Ens serà útil conèixer el valor de la funció als extrems de l'interval: $f(0) = 5$, $f(5) = 13.208$.

$k = 2$) Trobem la longitud del segon interval:

$$d_2 = \frac{F_{N-2+1}}{F_N} d_1 = \frac{3}{5} 5 = 3$$

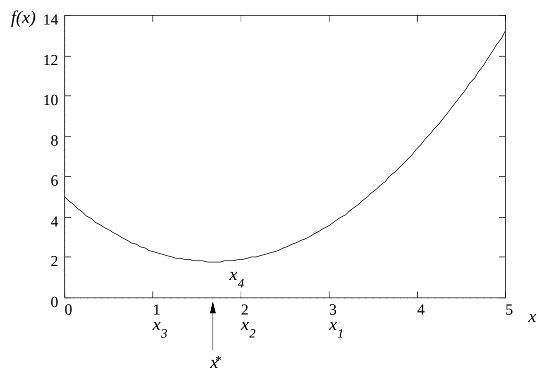

Figura 11. Gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 3x + 5 + \ln(\frac{1}{x+1})$ amb la seqüència de punts obtinguts amb la cerca lineal de Fibonacci.

Els dos primers punts a avaluar són:

$$x_1 = 0 + d_2 = 3 \qquad f(3) = 3.6137$$
$$x_2 = 5 - d_2 = 2 \qquad f(2) = 1.9014$$

Com que $f(0) > f(2)$ i $f(2) < f(3)$ escollim l'interval $[0, x_1 = 3]$ (en comptes de $[x_2 = 2, 5]$). El nou interval és de longitud $d_2 = 3$.

$k = 3)$ Trobem la longitud del tercer interval:

$$d_3 = \frac{F_{N-3+1}}{F_N} d_1 = \frac{2}{5} 5 = 2$$

El nou punt a avaluar és:

$$x_3 = x_1 - d_3 = 3 - 2 = 1 \qquad f(1) = 2.3069$$

Adonem-nos de que l'altre punt simètric $0 + d_3 = 2$ no cal tornar-lo a avaluar perquè coincideix amb el punt x_2 que ja havíem trobat anteriorment. Com que $f(1) > f(2)$ i $f(2) < f(3)$ escollim l'interval $[x_3 = 1, x_1 = 3]$ (en comptes de $[0, x_2 = 2]$). El nou interval és de longitud $d_3 = 2$.

$k = 4)$ Trobem la longitud del quart i darrer interval:

$$d_4 = \frac{F_{N-4+1}}{F_N} d_1 = \frac{1}{5} 5 = 1$$

En aquest darrer interval sempre succeeix (quan s'usa el mètode de Fibonacci) que els dos punts situats a una distància $d_4 = 1$ dels extrems [1,3], són de fet el mateix punt (que a més ja hem avaluat: $x_2 = 2$). Per tant cal introduir una petita perturbació i avaluar un punt proper a l'anterior (per exemple, perturbem amb $\epsilon = 0.01$):

$$x_4 = x_1 - d_4 - \epsilon = 3 - 1 - 0.01 = 1.99 \qquad f(1.99) = 1.8948$$

Com que $f(1) > f(1.99)$ i $f(1.99) < f(2)$ l'interval que obtindrem finalment és $[x_3 = 1, x_2 = 2.0]$ (en comptes de $[x_4 = 1.99, x_1 = 3]$). El nou interval ara és de longitud

$d_4 = 1$, amb el qual hem arribat a donar un interval d'incertesa de la longitud desitjada.

La Fig. 11 mostra els successius punts que s'han anat trobant en aplicar la cerca lineal de Fibonacci.

Solució del problema 51.

Al mètode de la secció àuria la longitud de l'interval d'incertesa número k és de

$$d_k = \tau^{k-1} d_1, \quad \text{on } d_1 = b - a \text{ i } \tau = \tfrac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0.618$$

essent $[a, b]$ l'interval d'incertesa original. En aquest problema concret $a = 0$ i $b = 5$. Com que volem un interval final de longitud menor o igual a 1, el valor k s'ha de determinar de forma:

$$1 \geq d_k = \tau^{k-1}(b-a) = \tau^{k-1}5 \quad \Rightarrow \quad \tau^{k-1}5 \leq 1/5 = 0.2 \quad \Rightarrow \quad k \geq 5$$

Per tant haurem de determinar 4 nous intervals (el valor de $k = 1$ correspon a l'interval original [0,5]), el que representarà 5 avaluacions de $f(x)$ a 5 punts diferents. Adonem-nos, però, de que no ens era necessari saber a priori quantes avaluacions hem de calcular per tal d'obtenir l'interval d'incertesa de mida necessària, i únicament s'ha fet per il·lustrar millor l'exercici. No ens era necessari perquè sabem a priori quant hem de reduir l'interval d'incertesa a cada iteració i quins nous punts hem d'anar calculant. Aquesta és una diferència important entre el mètode de la secció àuria i el de Fibonacci (en el de Fibonacci era imprescindible determinar a priori el nombre d'avaluacions N).

Sabent que $f(0) = 5$ i $f(5) = 13.208$, els intervals que anem generant són:

$k = 2$) Trobem la longitud del segon interval:

$$d_2 = \tau^{2-1} d_1 = \tau \cdot 5 = 3.0902$$

Els dos primers punts a avaluar són:

$$x_1 = 0 + d2 = 3.0902 \qquad f(3.0902) = 3.8701$$
$$x_2 = 5 - d_2 = 1.9098 \qquad f(1.9098) = 1.8499$$

Com que $f(0) > f(x_2)$ i $f(x_2) < f(x_1)$ (escollim l'interval $[0, x_1 = 3.0902]$ (en comptes de $[x_2 = 1.9098, 5]$). El nou interval és de longitud d_2.

$k = 3$) Trobem la longitud del tercer interval:

$$d_3 = \tau^{3-1} d_1 = \tau^2 \cdot 5 = 1.9098$$

El nou punt a avaluar és:

$$x_3 = x_1 - d_3 = 1.1803 \qquad f(1.1803) = 2.0727$$

Adonem-nos de que l'altre punt simètric $0 + d_3 = 1.9098$ no cal tornar-lo a avaluar perquè coincideix amb el punt x_2 que ja havíem trobat anteriorment. Com que $f(x_3) > f(x_2)$ i $f(x_2) < f(x_1)$ escollim l'interval $[x_3 = 1.1803, x_1 = 3.0902]$ (en comptes de $[0, x_2 = 1.9098]$). El nou interval és de longitud d_3.

$k = 4$) Trobem la longitud del quart interval:

$$d_4 = \tau^{4-1} d_1 = \tau^3 \cdot 5 = 1.1803$$

El nou punt a avaluar és:

$$x_4 = x_3 + d_4 = 2.3607 \qquad f(2.3607) = 2.2786$$

Observem com l'altre punt simètric $x_1 - d_4 = 1.9098$ no cal tornar-lo a avaluar perquè coincideix amb el punt x_2 que ja havíem trobat anteriorment. Com que $f(x_3) > f(x_2)$ i $f(x_2) < f(x_4)$ escollim l'interval $[x_3 = 1.1803, x_4 = 2.3607]$ (en comptes de $[x_2 = 1.9098, x_1 = 3.0902]$). El nou interval és de longitud d_4.

$k = 5$) Trobem la longitud del cinquè i darrer interval:

$$d_5 = \tau^{5-1} d_1 = \tau^4 \cdot 5 = 0.72949$$

El nou punt a avaluar és:

$$x_5 = x_4 - d_5 = 1.6312 \qquad f(1.6312) = 1.7998$$

L'altre punt simètric $x_3 + d_5 = 1.9098$ no cal tornar-lo a avaluar perquè coincideix amb el punt x_2 que ja havíem trobat anteriorment. Com que $f(x_3) > f(x_5)$ i $f(x_5) < f(x_2)$ escollim l'interval $[x_3 = 1.1803, x_2 = 1.9098]$ (en comptes de $[x_5 = 1.6312, x_4 = 2.3607]$). Aquest darrer interval és de longitud $d_5 < 1$ tal i com es demanava a l'enunciat.

Solució del problema 52.

Tal i com s'observa a la solució del problema 50, la primera i segona derivada de $f(x) = x^2 - 3x + 5 + \ln(\frac{1}{x+1})$ són:

$$f'(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x+1} \qquad f''(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

i el punt mínim (calculat analíticament) correspon al valor $x^* = (1 + \sqrt{33})/4 = 1.68614066$.

Si usem el mètode de Newton, tenim que la seqüència de punts es genera segons:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_{k+1})} = x_k - \frac{2x_k - 3 - \frac{1}{x_k+1}}{2 + \frac{1}{(x_k+1)^2}}$$

Es pot comprovar com la seqüència de punts generada és de $x_0 = 4,\ \ x_1 = 1.64705882,\ \ x_2 = 1.68610279,\ \ x_3 = 1.68614066$. Observem com hem assolit el punt òptim amb una precisió de 8 xifres correctes en només 3 iteracions (comprovant la ràpida convergència del mètode de Newton —és quadràtica— prop del punt òptim).

Usant ara el mètode de la secant, la seqüència de punts és generada segons:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - f'(x_k)\ \frac{x_{k-1} - x_k}{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)} \\ &= x_k - \left(2x_k - 3 - \frac{1}{x_k+1}\right) \left[\frac{x_{k-1} - x_k}{2(x_{k-1} - x_k) - \frac{1}{x_{k-1}+1} + \frac{1}{x_k+1}}\right] \end{aligned}$$

Es pot comprovar com la seqüència de punts ara generada és de $x_0 = 4,\ \ x_1 = 3\ \ x_2 = 1.65853659,\ \ x_3 = 1.68674699,\ \ x_4 = 1.68614107,\ \ x_5 = 1.68614066$ (a partir d'aquesta iteració obtenim el mateix punt). Observem com per arribar al mateix punt ens han calgut quatre iteracions (una més que amb el mètode de Newton), mostrant a la pràctica com el mètode de la secant té una convergència més lenta cap al punt òptim.

Solució del problema 53.

La Fig. 12 mostra la gràfica de la funció $f(x) = 2/3\ |x|^{3/2}$. La primera i segona derivada de $f(x)$ són:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La seqüència generada pel mètode de Newton és, per tant:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k - \left(\frac{1}{2\sqrt{x_k}}\right)^{-1}\sqrt{x_k} = -x_k & \text{si } x_k \geq 0 \\ x_k - \left(\frac{1}{2\sqrt{-x_k}}\right)^{-1}(-\sqrt{-x_k}) = -x_k & \text{si } x_k \leq 0 \end{cases} \implies x_{k+1} = -x_k$$

Per tant, si comencem al punt $x_0 = 1$, anirem generant la seqüència $1, -1, 1, -1, ...$, que no convergeix a $x^* = 0$.

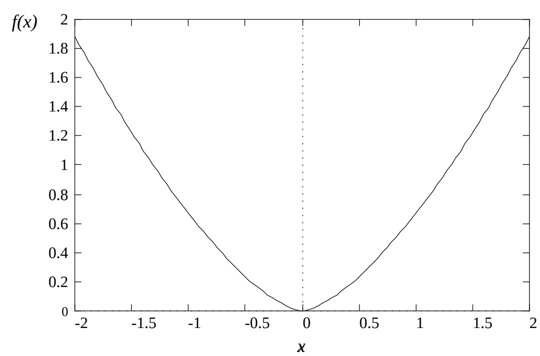

Figura 12. Gràfica de la funció $f(x) = 2/3\ |x|^{3/2}$ on es veu clarament que el mínim global correspon a $x^* = 0$.

Solució del problema 54.

Per simplificar la notació escriurem el gradient $\nabla f(x_k)^T$ com g_k. El gradient de la funció quadràtica ve donat per $g_k = Qx_k - b$ Per comprovar que g_k i g_{k+1} són perpendiculars només cal veure que que $g_k^T g_{k+1} = 0$. Sabent que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} g_k$$

directament obtenim el resultat anterior fent:

$$\begin{aligned} g_k^T g_{k+1} &= g_k^T (Qx_{k+1} - b) = \\ &= g_k^T \big(Q(x_k - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} g_k) - b\big) \\ &= g_k^T (Qx_k - b) - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} g_k^T Q g_k \\ &= g_k^T g_k - g_k^T g_k = 0 \end{aligned}$$

Solució del problema 55.

Podem observar com ambdues funcions poden ser escrites de forma matricial com:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} x^T Q_1 x - b_1^T x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2} x^T Q_2 x - b_2^T x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

i els gradients vénen donats per:

$$\nabla f_1(x)^T = Q_1 x - b_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$
$$\nabla f_2(x)^T = Q_2 x - b_1 = \begin{pmatrix} 10x_1 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

Passem ara a solucionar cada apartat.

i) Els punts mínims els trobarem anul·lant el vector gradient:

$$\nabla f_1(x)^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x^* = (0 \;\; 1)$$

$$\nabla f_2(x)^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 10x_1 = 0 \\ 2x_2 = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x^* = (0 \;\; 1)$$

S'observa com ambdues funcions tenen el mateix punt mínim.

ii) Sabem que la convergència del mètode del gradient serà millor quan més petit sigui el terme $\beta = [(\lambda_M - \lambda_m)/\lambda_M + \lambda_m)]^2$ (on λ_m és el valor propi menor i λ_M el valor propi major de la matriu Q). Podem trobar els valors propis per a Q_1 i Q_2 de la següent manera:

$$\det(Q_1 - \lambda \mathbb{1}) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \lambda_m = 1, \;\; \lambda_M = 3$$
$$\det(Q_2 - \lambda \mathbb{1}) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(2-\lambda) \;\; \Rightarrow \;\; \lambda_m = 2, \;\; \lambda_M = 10$$

Calculem ara els termes β_1 (per Q_1) i β_2 (per Q_2):

$$\beta_1 = \left(\frac{3-1}{3+1}\right)^2 = 1/4 = 0.25 \qquad \beta_1 = \left(\frac{10-2}{10+2}\right)^2 = 64/144 = 0.4444...$$

Per tant, amb la funció $f_1(x)$, a cada iteració del mètode del gradient reduim (com a poc) en una quarta part la nostra distància al punt òptim, mentre que amb la funció $f_2(x)$ reduim (com a mínim) en una mica més de la meitat aquesta mateixa distància a x^*.

iii) Realitzarem les dues iteracions del mètode del gradient per a cada $f_i(x)$. El vector gradient el denotarem, per comoditat, per $g_k = Q_i x_k - b_i$, on i serà 1 o 2 segons la funció considerada:

$f_1(x)$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
g_0 = Q_1 x_0 - b_1 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\alpha_0 &= \tfrac{g_0^T g_0}{g_0^T Q_1 g_0} = 0.33607 \\
x_1 = x_0 - \alpha_0 g_0 &= \begin{pmatrix} 0.31967 \\ 0.65574 \end{pmatrix} \\
g_1 = Q_1 x_1 - b_1 &= \begin{pmatrix} 0.29508 \\ -0.36885 \end{pmatrix} \\
\alpha_1 &= \tfrac{g_1^T g_1}{g_1^T Q_1 g_1} = 0.97619 \\
x_2 = x_1 - \alpha_1 g_1 &= \begin{pmatrix} 0.031616 \\ 1.015808 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$f_2(x)$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
g_0 = Q_2 x_0 - b_2 &= \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\alpha_0 &= \tfrac{g_0^T g_0}{g_0^T Q_2 g_0} = 0.10080 \\
x_1 = x_0 - \alpha_0 g_0 &= \begin{pmatrix} -0.015968 \\ 1.798403 \end{pmatrix} \\
g_1 = Q_2 x_1 - b_2 &= \begin{pmatrix} -0.15968 \\ 1.59681 \end{pmatrix} \\
\alpha_1 &= \tfrac{g_1^T g_1}{g_1^T Q_2 g_1} = 0.48095 \\
x_2 = x_1 - \alpha_1 g_1 &= \begin{pmatrix} 0.060831 \\ 1.030415 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Observem com en ambdós casos la seqüència generada s'apropa a $x^* = (0 \;\; 1)^T$.

iv) Per comprovar que les direccions obtingudes són perpendiculars, només cal veure que $g_1^T g_0 = 0$ (per a les dues funcions). Per a $f_1(x)$ tenim que

$$g_1^T g_0 = (\,0.29508 \quad -0.36885\,) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0.29508 - 4 \cdot 0.36885 \approx 0$$

Per la seva banda per a $f_2(x)$:

$$g_1^T g_0 = \begin{pmatrix} -0.15968 \\ 1.59681 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = -20 \cdot 0.15968 + 2 \cdot 1.59681 \approx 0$$

Solució del problema 56.

Sense fer cap càlcul podem adonar-nos de que, aplicant el mètode de Newton a les funcions $f_1(x)$ i $f_2(x)$ del problema 55, en una iteració trobarem el punt òptim. Aquestes funcions poden ser escrites de forma matricial com

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

El gradient i la hessiana són directament:

$$\nabla f(x)^T = Qx - b \qquad\qquad \nabla^2 f(x) = Q$$

Sabem que el punt òptim x^* és aquell que anul·la el gradient, és a dir $x^* = Q^{-1}b$ (tal i com es va poder veure al problema 55, aquest punt òptim és igual per als dos problemes i correspon al punt $x^* = (0 \;\; 1)^T$).

Si apliquem el mètode de Newton, començant a iterar des d'un punt x_0 qualsevol, tenim que el primer punt x_1 és (usant els valors de gradient i hessiana abans trobats):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \nabla^2 f(x_0)^{-1}\nabla f(x_0)^T \\ &= x_0 - Q^{-1}(Qx_0 - b) = x_0 - Q^{-1}Qx_0 - Q^{-1}b = x_0 - x_0 - Q^{-1}b \\ &= Q^{-1}b \end{aligned}$$

amb el qual tenim que $x_1 = Q^{-1}b = x^* = (0 \;\; 1)^T$. Hem comprovat, doncs, sense fer cap càlcul, que si apliquéssim el mètode de Newton a $f_1(x)$ i $f_2(x)$ (o a qualsevol altra funció quadràtica) obtindríem el punt solució en una iteració.

Solució del problema 57.

a) La funció objectiu és $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{10} - \ln(x_1 + x_2 + 2)$. Per comprovar si és o no convexa només cal veure si la seva hessiana és o no semidefinida positiva. El gradient de $f(x_1, x_2)$ és:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\tfrac{x_1}{5} - \tfrac{1}{x_1+x_2+2} \quad -\tfrac{1}{x_1+x_2+2} \right)$$

I la hessiana de $f(x_1, x_2)$ és:

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} & \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} \\ \\ \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} & \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} \end{pmatrix}$$

Per veure si $\nabla^2 f$ és semidefinida positiva, observem el signe del determinant dels dos menors principals Δ_1 i $\Delta_2 = \nabla^2 f$

$$\begin{aligned} \det(\Delta_1) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{(x_1 + x_2 + 2)^2} > 0 \\ \det(\Delta_2) &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{(x_1 + x_2 + 2)^2}\right)\frac{1}{(x_1 + x_2 + 2)^2} - \frac{1}{(x_1 + x_2 + 2)^2}\frac{1}{(x_1 + x_2 + 2)^2} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{(x_1 + x_2 + 2)^2} > 0 \end{aligned}$$

Com que els determinants dels dos menors principals de la hessiana són positius, podem assegurar que la funció objectiu és convexa (en aquest cas, a més, podem garantir que és estrictament convexa, ja que els determinants són > 0).

b) Per poder definir la funció de penalització, primer reescrivim de forma escaient el problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & \dfrac{x_1^2}{10} - \ln(x_1 + x_2 + 2) \\ \text{subj. a} & \\ & 10 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \\ & x_1 - 1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

I ara la funció de penalització amb $\rho = 1$ serà:

$$P(x,1) = \frac{x_1^2}{10} - \ln(x_1 + x_2 + 2) + \frac{1}{10 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2}$$

c) La nova funció de penalització del SUMT amb la penalització logarísmica ve donada per l'expressió:

$$P(x,1) = \frac{x_1^2}{10} - \ln(x_1 + x_2 + 2) - \ln(10 - x_1^2 - x_2^2) - \ln(x_1 - 1) - \ln x_2$$

Quan ens trobem en un punt x tal que $g(x) \geq 0$ (és a dir, x és un punt factible), la nova funció $-\ln g(x)$ evita que ens atansem a valors on $g(x) = 0$, ja que quan $g(x) \to 0^+$ aleshores $-\ln g(x) \to +\infty$, tot incrementant el valor de la funció $P(x, \rho)$ (per tant, penalitza el fet de que $g(x)$ s'atansi a 0).

Podem observar que $-\ln g(x) = \ln \frac{1}{g(x)}$, amb el qual veiem que la nova penalització no és més que la penalització inversament proporcional que ja teníem, però afectada per la funció ln. Això fa que quan $g(x) \to 0^+$ "suavitzem" el valor de la penalització (ja que $\ln \frac{1}{g(x)} << \frac{1}{g(x)}$). Hi ha però, una diferència destacable entre ambdues penalitzacions: $\frac{1}{g(x)}$ sempre penalitza (sempre pren valors positius dins la regió factible on $g(x) \geq 0$), mentre que $\ln \frac{1}{g(x)}$ pot prendre valors negatius (quan $\frac{1}{g(x)} < 1$) afavorint llavors el fet d'estar allunyats de $g(x) = 0$.

d) Donada la funció de penalització

$$P(x,1) = \frac{x_1^2}{10} - \ln(x_1 + x_2 + 2) - \ln(10 - x_1^2 - x_2^2) - \ln(x_1 - 1) - \ln x_2$$

el seu gradient ve donat per

$$\nabla P(x,1)^T = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{5} - \frac{1}{x_1+x_2+2} - \frac{1}{x_1-1} + \frac{2x_1}{10-x_1^2-x_2^2} \\ -\frac{1}{x_1+x_2+2} - \frac{1}{x_2} + \frac{2x_2}{10-x_1^2-x_2^2} \end{pmatrix}$$

i la matriu hessiana és:

$$\nabla^2 P(x,1) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} + \frac{1}{(x_1-1)^2} + \frac{2}{10-x_1^2-x_2^2} + \frac{4x_1^2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} & \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} + \frac{4x_1x_2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} \\ \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} + \frac{4x_1x_2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} & \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{2}{10-x_1^2-x_2^2} + \frac{4x_2^2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

Ara escrivim $\nabla^2 P(x,1)$ com la suma de 3 matrius $\nabla^2 P(x,1) = H_1 + H_2 + H_3$ on

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} & \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} \\ \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} & \frac{1}{(x_1+x_2+2)^2} \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_1-1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{10-x_1^2-x_2^2} + \frac{4x_1^2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} & \frac{4x_1x_2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} \\ \frac{4x_1x_2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} & \frac{2}{10-x_1^2-x_2^2} + \frac{4x_2^2}{(10-x_1^2-x_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

H_1 és la part de hessiana associada amb la funció objectiu, i hem vist a l'apartat a) que era definida positiva. H_2 és la part de hessiana associada amb la penalització dels límits de les variables, i clarament és una matriu definida positiva. H_3 està associada a la penalització de la restricció $x_1^2 + x_2^2 \leq 10$. Hem de veure que és una matriu definida positiva dins la regió factible, tal i com diu l'enunciat. Estudiarem el signe del determinant dels dos menors principals. Per comoditat definim $\alpha = 10 - x_1^2 - x_2^2$. Clarament $\alpha \geq 0$ dins la regió factible ($x_1^2 + x_2^2 \leq 10 \Rightarrow \alpha \geq 0$). Un cop definit α, observem el signe del determinant dels menors principals:

$$\det(\Delta_1) = \frac{2}{\alpha} + \frac{4x_1^2}{\alpha^2} > 0$$
$$\det(\Delta_2) = \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4x_1^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{4x_2^2}{\alpha^2}\right) - \frac{16x_1^2x_2^2}{\alpha^4} = \frac{4}{\alpha} + \frac{8x_1^2}{\alpha^3} + \frac{8x_2^2}{\alpha^3} > 0$$

Com que H_1, H_2 i H_3 són definides positives dins la regió factible, podem concloure que $\nabla^2 P(x,1)$ és definida positiva dins la regió factible, i per tant $P(x,1)$ és una funció convexa dins aquesta regió.

Donada la convexitat de $P(x,1)$, podríem usar el mètode de Newton per a problemes sense restriccions, ja que tenim garantida una hessiana definida positiva dins la regió factible, el qual ens evita problemes de convergència associats amb el fet de trobar hessianes indefinides (aquest és un dels inconvenients més greus del mètode de Newton).

e) El punt inicial d'iteració és $x^0 = (2 \;\; 1)^T$. El nou punt el trobarem com

$$x^1 = x^0 - (\nabla^2 P(x^0,1))^{-1} \nabla P(x^0,1)^T$$

essent $P(x^0,1)$ la penalització logarísmica de l'apartat c) (el terme ρ val 1).

Només hem d'avaluar el gradient i hessiana de $P(x,1)$ al punt x^0. Usant l'expressió del gradient i hesssiana trobats a l'apartat anterior, directament obtenim:

$$\nabla P(x^0,1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/5 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 P(x^0,1) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 57 & 9 \\ 9 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow (\nabla^2 P(x^0,1))^{-1} = \frac{25}{2199}\begin{pmatrix} 40 & -9 \\ -9 & 57 \end{pmatrix}$$

Finalment calculem el nou punt x^1:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{25}{2199}\begin{pmatrix} 40 & -9 \\ -9 & 57 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9182 \\ 1.5184 \end{pmatrix}$$

Podem comprovar que hem millorat el valor de la funció objectiu:

$$P(x^0,1) = \frac{2^2}{10} - \ln(2+1+2) - \ln(10-2^2-1^2) - \ln(2-1) - \ln 1 = -2.8189$$
$$P(x^1,1) = \frac{1.9^2}{10} - \ln(1.9+1.5+2) - \ln(10-1.9^2-1.5^2) - \ln(1.9-1) - \ln 1.5 = -3.0476$$

Solució del problema 58.

El problema a solucionar és

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subj. a} & h(x) = x_1 + x_2 - a = 0 \end{array}$$

i) Si ho solucionem introduint el canvi de variable $x_2 = a - x_1$ a la funció objectiu, obtenim el següent problema d'una variable sense restriccions:

$$\min u(x) = x_1^2 + (a-x_1)^2 = 2x_1^2 - 2ax_1 + a^2$$

Buscant els punts que anul·len $u'(x)$ obtenim:

$$u'(x) = 4x_1 - 2a \quad 4x_1 - 2a = 0 \Rightarrow x_1 = a/2$$

Com que $u''(x) = 4 > 0$ tenim que el punt $x_1 = a/2$ és un mínim del nostre problema sense restriccions. El costat de l'altre quadrat és $x_2 = a - a/2 = a/2$. Els costats que donen, doncs, l'àrea mínima són $x_1 = x_2 = a/2$ (l'àrea mínim és $a^2/2$).

ii) Solucionem-ho ara aplicant el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Definim la funció lagrangiana:

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - a)$$

Un punt per ser mínim ha de satisfer en primer lloc:

$$\left.\begin{array}{r} \nabla_{x_1} L(x,\lambda) = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \nabla_{x_2} L(x,\lambda) = 2x_2 + \lambda = 0 \\ \nabla_{\lambda} L(x,\lambda) = x_1 + x_2 - a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -a, \quad x_1 = x_2 = a/2$$

El punt anterior és, doncs, l'únic candidat a ser un mínim. Per estar segurs que ho és, cal que observem la condició suficient de segon ordre:

$$y^T[\nabla^2_{xx} L(x,\lambda)]y > 0 \quad \forall y : \nabla h(x) y = 0$$

La matriu hessiana $\nabla^2_{xx} L(x,\lambda)$ és:

$$\nabla^2_{xx} L(x,\lambda) = \nabla_x \left(2x_1 + \lambda \quad 2x_1 + \lambda \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Com que aquesta matriu és definida positiva, tenim que per a tot $y \neq 0$ es verifica que $y^T[\nabla^2_{xx} L(x,\lambda)]y > 0$. Per tant es satisfà la condició suficient de segon ordre, amb el qual garantim que $x_1 = x_2 = a/2$ és un mínim local (i en aquest cas, a més global, podeu raonar per què?) del nostre problema amb restriccions. Observem com la solució coincideix amb la calculada considerant el problema sense restriccions.

Solució del problema 59.

i) Considerant el radi r i l'alçària h com a variables del problema, aquest pot ser formulat com:

$$\begin{aligned} &\max \quad \pi r^2 h \quad \equiv -\min f(r,h) = -\pi r^2 h \\ &\text{subj. a} \\ &\qquad h(r,h) = 2\pi r h + 2\pi r^2 - 6\pi = 0 \\ &\qquad r \geq 0 \quad h \geq 0 \end{aligned}$$

Treballarem, per comoditat, amb el problema equivalent de minimització. Les restriccions de no-negativitat segur que són inactives a l'òptim, ja que si fossin actives tindríem que $r = 0$ o $h = 0$, amb el qual el volum seria igual a 0 (el qual, evidentment, no correspon a un volum màxim).

ii) La funció lagrangiana és

$$L(r,h,\lambda) = -\pi r^2 h + \lambda(2\pi r h + 2\pi r^2 - 6\pi)$$

Les condicions necessàries (de primer ordre) que ha de satisfer un mínim són:

$$\begin{aligned} \nabla_r L(r,h,\lambda) &= -2\pi r h + \lambda 2\pi h + \lambda 4\pi r = 0 \\ \nabla_h L(r,h,\lambda) &= -\pi r^2 + \lambda 2\pi r = 0 \\ \nabla_\lambda L(r,h,\lambda) &= 2\pi r h + 2\pi r^2 - 6\pi = 0 \end{aligned}$$

Simplificant la segona condició anterior tenim que $r(2\lambda - r) = 0$, el qual implica que $r = 0$ o $r = 2\lambda$. Abans hem justificat que r no pot ser 0. Per tant ens quedem només amb que $r = 2\lambda$. Substituint $\lambda = r/2$ a la primer condició, s'obté que $r(2r - h) = 0$, el qual implica que $r = 0$ o $h = 2r$. Descartem, com abans, que $r = 0$, i ens quedem només amb $h = 2r$. Substituint $h = 2r$ a la tercera condició, i operant, s'arriba finalment a que $r^2 = 1$, el qual implica que $r = 1$ o $r = -1$. Descartem que $r = -1$ (un radi negatiu no té sentit) i ens quedem amb $r = 1$. Com que hem vist abans que $h = 2r$ i que $\lambda = r/2$, tenim que el punt $r = 1,\ h = 2,\ \lambda = 1/2$ satisfà les condicions de primer ordre, i és, doncs, un candidat a ser òptim.

Per estar segurs que és un punt òptim (mínim en aquest cas), cal veure si es satisfan les condicions suficients de segon ordre

$$y^T[\nabla^2_{xx} L(x,\lambda)]y > 0 \quad \forall y : \nabla h(x) y = 0$$

(x en aquest cas fa referència a (r,h)). La matriu hessiana, avaluada al punt $r = 1,\ h = 2,\ \lambda = 1/2$, és:

$$\nabla^2_{xx} L(r=1, h=2, \lambda=1/2) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{rr} L(r,h,\lambda) & \nabla^2_{rh} L(r,h,\lambda) \\ \nabla^2_{hr} L(r,h,\lambda) & \nabla^2_{hh} L(r,h,\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\pi h + 4\pi\lambda & -2\pi r + 2\lambda\pi \\ -2\pi r + 2\lambda\pi & 0 \end{pmatrix}_{(1,2,1/2)} = \begin{pmatrix} -2\pi & -\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

Ara cal determinar els vectors y tals que $\nabla h(x)y = 0$. Tenim que

$$\nabla h(x) = \nabla_{(r,h)}[2\pi rh + 2\pi r^2 - 6\pi] = \begin{pmatrix} 8\pi & 2\pi \end{pmatrix}$$

Per tants els vectors y han de satisfer:

$$\begin{pmatrix} 8\pi & 2\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 8\pi y_1 + 2\pi y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -4y_1$$

Finalment observem el signe de $y^T[\nabla^2_{xx} L(x, \lambda)]y$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & -4y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\pi & -\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ -4y_1 \end{pmatrix} = 6\pi y_1^2 > 0 \ \forall \ y \neq 0$$

Per tant es garanteix la condició suficient de segon ordre, el qual ens assegura que $r = 1, h = 2$ proporciona el volum màxim del cilindre (que és de $\pi r^2 h = 2\pi$).

iii) Per solucionar el problema anterior amb Lingo, podríem entrar el problema següent:

```
data:
     pi= 3.141592;
enddata
max= pi*r^2*h;
2*pi*r*h+2*pi*r^2=6*pi;
r>=0;
h>=0;
```

La solució proporcionada per Lingo és la següent:

```
Rows=      4 Vars=      2 No. integer vars=      0
     Nonlinear rows=      2 Nonlinear vars=      2 Nonlinear constraints=    1
     Nonzeros=      7 Constraint nonz=     4 Density=0.583

     Optimal solution found at step:         8
     Objective value:                 6.283184

                             Variable           Value        Reduced Cost
                                   PI        3.141592        0.0000000E+00
                                    R        1.000000        0.0000000E+00
                                    H        2.000000        0.0000000E+00

                                  Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                    1        6.283184          1.000000
                                    2      0.0000000E+00       0.5000000
                                    3        1.000000          0.1953993E-06
                                    4        2.000000          0.0000000E+00
```

Podem comprovar com, efectivament, els valors de r i h obtinguts corresponen amb els que hem trobat, com el valor del volum màxim és de $2\pi = 6.283184$, i també com el multiplicador λ de la restricció d'igualtat (la 2 del llistat de Lingo) és de 0.5. També podem comprovar com els multiplicadors μ de les restriccions $r \geq 0$ i $h \geq 0$ (restriccions

3 i 4 al llistat) són 0 (una és de $0.1953993 \cdot 10^{-06}$, que és aproximadament 0), el qual concorda amb el que ens diuen les condicions d'optimalitat per a problemas amb restriccions de desigualtat. En definitiva, el punt proporcionat per Lingo verifica les condicions d'optimalitat del problema, tal i com ha de ser.

Solució del problema 60.

El problema de programació lineal pot ser escrit com:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & h(x) = Ax - b = 0 \\ & g(x) = -x \leq 0 \end{array}$$

Associant els multiplicadors λ a les restriccions $h(x) = 0$ i μ a les restriccions $g(x) \leq 0$, la funció lagrangiana que considerem és:

$$L(x, \lambda, \mu) = c^T x + \lambda^T (Ax - b) + \mu^T (-x)$$

Per poder aplicar les condicions necessàries, s'ha de garantir que el punt x és regular. Això vol dir que $\nabla h(x)$ i $\nabla g(x)$ tenen les files linealment independents. Però com que $h(x) = Ax - b$ i $g(x) = -x$ directament tenim que $\nabla h(x) = A$, les files de la qual són linealment independents perquè l'enunciat del problema ens diu que A és de rang complet, i $\nabla g(x) = -\mathbb{1}$, que clarament també té les files linealment independents.

També cal usar un conjunt $\mathcal{A}(x) = \{j : g_j(x) = 0\}$ d'índexs de restriccions actives. En aquest cas el conjunt $\mathcal{A}(x)$ correspondrà a les variables j que verifiquen que $x_j = 0$. Com que sabem, per l'enunciat, que la solució bàsica és no degenerada, les variables bàsiques satisfan $x_B > 0$. Per tant el conjunt $\mathcal{A}(x)$ correspon, de fet, al conjunt de variables no bàsiques.

Recordem que les condicions necessàries (de Kuhn-Tucker) que ha de satisfer un punt per ser òptim, són:

$$\begin{array}{rl} i) & \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0 \\ ii) & \mu_i \geq 0 \ \forall i, \quad \mu_i = 0 \ \forall i \notin \mathcal{A}(x) \\ iii) & y^T [\nabla^2_{xx} L(x, \lambda, \mu)] y \geq 0 \quad \forall y : \nabla h(x) y = 0, \ \nabla g_j(x) y = 0 \ \forall i \in \mathcal{A}(x) \end{array}$$

La primera condició ens imposa que

$$c^T + \lambda^T A - \mu^T \Leftrightarrow \mu^T = c^T + \lambda^T A$$

La segona condicıó ens obliga a que $\mu_i = 0$ per aquells índexs i que no estan a $\mathcal{A}(x)$. Com que a $\mathcal{A}(x)$ només hi ha els índexs de les variables no bàsiques (com hem vist abans), el que realment estem dient és que $\mu_i = 0$ per a tot i associat a una variable bàsica. Si particionem el vector μ en μ_B i μ_N (associats respectivament a les variables bàsiques i no bàsiques), podem escriure la segona condició com:

$$\mu \geq 0, \quad \mu_B = 0$$

La darrera condició sempre es satisfarà, ja que $\nabla^2_{xx} L(x, \lambda, \mu) = \nabla_x [c^T + \lambda^T A - \mu^T] = 0$, i per tant sempre verificarem que, per a tot y

$$y^T [\nabla^2_{xx} L(x, \lambda, \mu)] y = 0 \geq 0$$

Ara només hem de jugar una mica amb el que ens diuen la primera i segona condició. Particionant la matriu de restriccions $A = [B\ N]$ en una part bàsica i una de no bàsica, considerant el particionament de μ abans introduït, i usant que $\mu \geq 0$ i $\mu_B = 0$, podem escriure la primera condició en dues parts:

$$\begin{aligned} \mu_B^T &= c_B^T + \lambda^T B = 0 \Rightarrow \lambda^T = -c_B^T B^{-1} \\ \mu_N^T &= c_N^T + \lambda^T N \geq 0 \Rightarrow \mu_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0 \end{aligned}$$

Adonem-nos que precisament la condició $\lambda^T = -c_B^T B^{-1}$ ens proporciona el valor negat de les variables duals, mentre que $\mu_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ no és més que la condició de no-negativitat que han de satisfer els costos reduïts de les variables no bàsiques (els μ_N són, de fet, els costos reduïts de les variables x_N). Aquestes condicions coincideixen amb les que ha de garantir un solució bàsica òptima.

Solució del problema 61.

a) La funció objectiu és $f(x,y) = e^x y^4 - 100y^2(1+x)$. El seu gradient i Hessiana es calculen com:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x y^4 - 100y^2 & 4e^x y^3 - 200y(1+x) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x y^4 & 4e^x y^3 - 200y \\ 4e^x y^3 - 200y & 12e^x y^2 - 200(1+x) \end{pmatrix}$$

Pot comprovar-se com a tota la regió factible $\Omega = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y\}$ la Hessiana no és definida positiva. Per exemple, al punt $x = 0$, $y = 1$, tenim

$$\nabla^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} e^0 1^4 & 4e^0 1^3 - 200 \cdot 1 \\ 4e^0 1^3 - 200 \cdot 1 & 12e^0 1^2 - 200(1+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -196 \\ -196 & -188 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu no es definida positiva (ja que $|\nabla^2 f(0,1)| = -38604 < 0$), de forma que la funció objectiu no és convexa a tota la regió factible. Per tant no podem garantir que l'òptim que obtindríem amb un determinat algorisme d'optimització fos l'òptim global.

b) La direcció $d = (d_x, d_y)^T$ serà de descens al punt $(x,y) = (0,1)$ si es verifica que

$$\nabla f(0,1) d < 0.$$

Només cal trobar $\nabla f(0,1)$, usant l'expressió obtinguda a l'apartat a)

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} e^0 1^4 - 100 \cdot 1^2 & 4e^0 1^3 - 200 \cdot 1(1+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -99 & -196 \end{pmatrix},$$

i comprovar que verifica la condició de descens:

$$\nabla f(x=0, y=1) d = \begin{pmatrix} -99 & -196 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Adonem-nos, però, que la direcció proporcionada només és de descens en un entorn petit del punt $(0,1)$. Així, per exemple, tenim que $f(0,1) = -99$, que si ens belluguem una mica (usant una longitud de pas de $\alpha = 0.01$) en la direcció de d millorem la funció:

$$f((0,1) + 0.01(1,-0.5)) = f(0.01, 0.995) = -99.0025 < -99,$$

però que si ens belluguem una mica més (usant $\alpha = 0.02$) augmentem el seu valor:

$$f((0,1) + 0.02(1, -0.5)) = f(0.02, 0.99) = -98.9901 > -99,$$

c) Per trobar els candidats a ser òptim usarem les condicions d'optimalitat de primer ordre. En primer lloc definim la Lagrangiana del nostre problema:

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = e^x y^4 - 100y^2(1 + x) + \mu_1(x - 1) + \mu_2(-x) + \mu_3(-y).$$

Per l'enunciat del problema sabem que a l'òptim la 2a i 3a restriccions són inactives, garantint aleshores que $\mu_2^* = \mu_3^* = 0$. Per tant escriurem la Lagrangiana de forma més simple:

$$L(x, y, \mu_1) = e^x y^4 - 100y^2(1 + x) + \mu_1(x - 1).$$

La primera condició necessària que ha de satisfer un punt óptim és:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x,y,\mu)}{\partial x} &= e^x y^4 - 100y^2 + \mu_1 := 0 \\ \frac{\partial L(x,y,\mu)}{\partial y} &= 4e^x y^3 - 200y(1 + x) := 0. \end{aligned}$$

La segona condició necessària ens diu que $\mu_1 \geq 0$, i que $\mu_1 = 0$ si la restricció $x - 1 \leq 0$ és inactiva a l'òptim. A priori no sabem si serà o no activa aquesta restricció. Considerem, doncs, les dues possibilitats:

i) La restricció és inactiva ($x - 1 < 0$ i $\mu_1 = 0$).
El sistema que obtenim en aquest cas és:

$$\begin{aligned} e^x y^4 - 100y^2 &= 0 \\ 4e^x y^3 - 200y(1 + x) &= 0. \end{aligned}$$

Pot comprovar-se com les solucions d'aquest sistema d'equacions són $(x, y = 0)$ per una banda, i $(x = 1, y = 10/\sqrt{e})$ per una altra. Tanmateix, cap d'aquestes dues solucions són vàlides, ja que sabem per l'enunciat que $y > 0$ (tercera restricció és inactiva), i hem suposat en aquest cas que $x < 1$.

ii) La restricció és activa ($x = 1$ i $\mu_1 \geq 0$).
El sistema que obtenim en aquest cas és:

$$\begin{aligned} ey^4 - 100y^2 + \mu_1 &= 0 \\ 4ey^3 - 400y &= 0. \end{aligned}$$

Pot comprovar-se com les solucions d'aquest sistema d'equacions són $(y = 0, \mu_1 = 0)$, i $(y = 10/\sqrt{e}), \mu_1 = 0)$. La primera d'elles, però, s'ha de descartar, ja que sabem per l'enunciat que $y > 0$ (la tercera restricció és inactiva). Per tant, l'únic candidat a ser òptim que trobem ve donat per la segona solució, de forma que

$$(x^*, y^*, \mu_1^*) = (\,1 \quad 10/\sqrt{e} \quad 0\,).$$

Tot i que l'enunciat no ho demana, pot comprovar-se com aquest punt satisfà les condicions de segon ordre (suficients i necessàries). Només cal veure que $\nabla^2_{(x,y),(x,y)} L(x, y, \mu_1)$ és definida positiva al punt $x^* = 1$, $y^* = 10/\sqrt{e}$:

$$\nabla^2_{(x,y),(x,y)} L = \begin{pmatrix} e^x y^4 & 4e^x y^3 - 200y \\ 4e^x y^3 - 200y & 12e^x y^2 - 200(1+x) \end{pmatrix}_{x=1, y=10/\sqrt{e}} = \begin{pmatrix} 3678.79 & 1213.06 \\ 1213.06 & 800.0 \end{pmatrix}.$$

També cal fer notar que el fet d'haver trobat que $\mu_1^* = 0$ implica que la restricció $x - 1 \leq 0$, tot i ser activa ($x^* = 1$), no afecta a la determinació del punt òptim. Si eliminéssim aquesta restricció continuaríem obtenint la solució $x^* = 1$, $y^* = 10/\sqrt{e}$.

Solució del problema 62.

i) Al primer apartat hem de verificar que el punt $x^* = (3\ 0\ 2\ 5)^T$ i els multiplicadors $\lambda^* = (-1\ 0)^T$ i $\mu^* = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ donats verifiquen les condicions d'optimalitat. En primer lloc, fàcilment observem que el punt x^* proporcionat és factible, ja que totes les components són no negatives, i satisfà les dues restriccions lineals ($3 + 0 + 2 = 5$, $2 \cdot 3 + 0 - 5 = 1$). També podem comprovar com es satisfan les condicions necessàries sobre μ: $\mu^* \geq 0$, i per a les variables que no tenen el seu límit actiu (és a dir, aquelles que $x_i^* > 0$, que són x_1, x_3 i x_4) es té que la μ_i^* associada és igual a 0 (en aquest cas $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = 0$). També podem observar com es satisfà una de les condicions suficients: $\mu_i^* > 0$ per a tota variable que té el límit actiu (en aquest cas només és x_2, i comprovem com $\mu_2^* = 1 > 0$).

Per comprovar la resta de condicions usarem la funció lagrangiana:

$$L(x, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - 3x_1 + 2x_2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 5) + \lambda_2(2x_1 + x_2 - x_4 - 1) - \sum_{i=1}^{4} \mu_i x_i$$

S'ha de garantir que $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$. En aquest cas tenim:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_1} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= 2x_1^* - x_3^* - 3 + \lambda_1^* + 2\lambda_2^* - \mu_1^* = 2 \cdot 3 - 2 - 3 - 1 + 2 \cdot 0 - 0 = 0 \\
\nabla_{x_2} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= 2x_2^* + 2 + \lambda_1^* + \lambda_2^* - \mu_2^* = 2 \cdot 0 + 2 - 1 + 0 - 1 = 0 \\
\nabla_{x_3} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= 2x_3^* - x_1^* + \lambda_1^* - \mu_3^* = 2 \cdot 2 - 3 - 1 - 0 = 0 \\
\nabla_{x_4} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= -\lambda_2^* - \mu_4^* = -0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

Per tant, els valors de x^*, λ^* i μ^* proporcionats satisfan les equacions anteriors.

Ara cal comprovar les condicions de segon ordre. En primer lloc trobem $\nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu)$:

$$\nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu és semidefinida positiva (els valors propis són 0, 1, 2 i 3). Per tant, es satisfà que $\forall y\ y^T \nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) y \geq 0$. Això ens indica que es satisfà la condició necessària de segon ordre, però no la suficient. Per garantir la condició suficient (la última de les condicions suficients que ens queda, amb el qual podrem assegurar que x^* és un mínim local) s'ha de verificar que

$$y^T \nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) y > 0 \quad \forall y : \nabla h(x^*) y = 0, \quad \nabla g_j(x^*) y = 0\ \forall j : x_j^* = 0$$

on $h(x)$ i $g_j(x)$ fan referència a les restriccions d'igualtat i desigualtat respectivament. En primer lloc busquem les y afectades per les condicions anteriors:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla h(x^*)y = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 \\ \nabla g_2(x^*)y = 0 \iff (\,0 \quad -1 \quad 0 \quad 0\,) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I ara ja podem calcular:

$$y^T \nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) y = 6y_1^2 > 0 \; \forall y \neq 0$$

Per tant, es satisfà la darrera condició suficient que ens quedava, amb el qual podem assegurar que el punt x^* donat és un mínim local del nostre problema (en aquest cas, a més, és mínim global).

ii) Partint del punt $x^0 = (0\ 2\ 3\ 1)^T$, realitzarem ara dues iteracions del mètode del gradient reduït. Abans, però, cal saber quin és el gradient de la funció objectiu:

$$\nabla f(x) = (\, 2x_1 - x_3 - 3 \quad 2x_2 + 2 \quad 2x_3 - x_1 \quad 0\,)$$

Ens cal també determinar quines variables seran considerades dependents (o bàsiques) i independents (o no bàsiques). La única restricció és que una variable bàsica no pot valer 0. Per comoditat, donat que ens serà molt fàcil calcular B^{-1}, considerarem com a bàsiques x_3 i x_4 (x_1 i x_2 seran no bàsiques). En aquest cas tenim que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara estem en disposició de realitzar les dues iteracions requerides.

1a. iteracio)

Al punt x^0 la funció objectiu val $f(x^0) = 17$. Per la seva banda, el gradient de $f(x)$ al punt actual i el valor de $\rho = \nabla_{x_N} f(x^0) - \nabla_{x_B} f(x^0) B^{-1} N$ són:

$$\nabla f(x^0) = (\, -6 \quad 6 \quad 6 \quad 0\,) \qquad \rho = (\, -6 \quad 6\,) - (\, 6 \quad 0\,)\, B^{-1} N = (\, -12 \quad 0\,)$$

La direcció de moviment de les variables no bàsiques d_{x_N} es troba a partir del vector ρ anterior de forma:

$$d_{x_{N_i}} = \begin{cases} -\rho_i & \text{si } \rho_i < 0 \text{ o } x_{N_i} > 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per la seva banda, la direcció de moviment de les variables bàsiques es calcula com $d_{x_B} = -B^{-1} N d_{x_N}$, garantint d'aquesta forma que el nou punt verificarà les restriccions d'igualtat. Realitzant els càlculs al punt actual, tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} d_{x_N} = (\, 12 \quad 0\,)^T \\ d_{x_B} = -B^{-1} N\, (\, 12 \quad 0\,)^T = (\, -12 \quad 24\,)^T \end{array}\right\} \Rightarrow d_x = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Ara hem de calcular la longitud de pas α. En primer lloc trobem els valors α_1 i α_2 corresponents a les longituds de pas màximes per garantir que les variables bàsiques i no bàsiques continuen essent no negatives. En aquest cas tenim:

$$\alpha_1 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 1/4$$
$$\alpha_2 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = +\infty$$

Ara realitzem una cerca lineal partint del punt x^0 i usant la direcció d_x abans calculada, sabent que la longitud de pas ha de ser menor que el $\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, que en aquest cas és $\alpha_1 = 1/4$. Per tant ara hem de calcular:

$$\alpha_3 = \arg\min\{g(\alpha) = f(x^0 + \alpha dx) = f(\begin{pmatrix} 12\alpha \\ 2 \\ 3 - 12\alpha \\ 1 + 24\alpha \end{pmatrix}) = 432\alpha^2 - 144\alpha + 17, 0 \leq \alpha \leq 1/4\}$$

Igualant a 0 la derivada de $g(\alpha)$, obtenim que $144(6\alpha - 1) = 0$, amb el qual el mínim de la funció anterior és $\alpha = 1/6$. Com que aquest valor és menor que $1/4$, tenim directament que és la solució de la cerca lineal. Per tant $\alpha_3 = 1/6$.

Ara podem calcular el nou punt

$$x^1 = x^0 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/6 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

que té un valor de funció objectiu de $f(x^1) = 5$ (hem passat d'un punt x^0 que tenia un cost de 17 a un on la funció objectiu val 5). Com que el valor $\alpha_3 \neq \alpha_1$ cap variable bàsica ha esdevingut 0, amb el qual no cal canviar la partició de variables bàsiques i no bàsiques.

2a. iteracio)

A la segona iteració cal fer els mateixos passos que a la primera, però usant ara el nou punt x^1 (no entrarem en tants detalls, doncs). El gradient i direcció de descens al punt actual són:

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix} \quad d_{x_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad d_{x_B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Els valors α_i en aquesta segona iteració corresponen a:

$$\alpha_1 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 5/6$$
$$\alpha_2 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = 1/3$$
$$\alpha_3 = \arg\min\{g(\alpha) = f(x^1 + \alpha dx) = 72\alpha^2 - 36\alpha + 5, 0 \leq \alpha \leq \min\{5/6, 1/3\} = 1/3\}$$

El mínim de $g(\alpha)$ correspon a $1/4$, que és menor que $1/3$. Per tant $\alpha_3 = 1/4$, amb el qual el nou punt x^2 és:

$$x^2 = x^1 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 1/4 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

i $f(x^2) = 1/2 < 5 = f(x^1)$, amb el qual hem millorat el valor de la funció objectiu. Com que $\alpha_3 \neq \alpha_1$ no cal modificar la partició actual de variables.

iii) En aquest tercer apartat iterarem a partir del punt $x^0 = (1\ 1\ 3\ 2)^T$, que té un cost associat de $f(x^0) = 7$. Tal i com ens diu l'enunciat, considerarem la partició següent: x_1 i x_2 són bàsiques, i les altres dues variables seran les no bàsiques. Per tant

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenint en compte les matrius anteriors, el gradient i direcció de descens al punt x^0 considerat són:

$$\nabla f(x^0) = (\,-4 \quad 4 \quad 5 \quad 0\,) \quad \rho = (\,-7 \quad -8\,) \quad d_{x_N} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad d_{x_B} = \begin{pmatrix} 15 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Els valors α_i en aquest punt són:

$$\alpha_1 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 15 \\ -22 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 1/22 = 0.0454$$
$$\alpha_2 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = +\infty$$
$$\alpha_3 = \arg\min\{g(\alpha) = f(x^0 + \alpha dx) = 653\alpha^2 - 113\alpha + 7, 0 \leq \alpha \leq \min\{1/22, +\infty\} = 1/22\}$$

El mínim de $g(\alpha)$ correspon a 0.0865. Aquest valor, però, és més gran que 1/22= 0.0454. Per tant hem de considerar que $\alpha_3 = \alpha_1 = 1/22$ (això degut a que $g(\alpha)$ és convexa —$g''(\alpha) > 0$—, ja que si fos concava prendríem $\alpha_3 = 0$). El nou punt x^1 serà doncs:

$$x^1 = x^0 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1/22 \begin{pmatrix} 15 \\ -22 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6818 \\ 0 \\ 3.3182 \\ 2.3636 \end{pmatrix}$$

i $f(x^1) = 3.2128 < 7 = f(x^0)$, amb el qual hem millorat el valor de la funció objectiu. Observem com, en aquest cas, donat que $\alpha_3 = \alpha_1$, una de les variables bàsiques s'ha fet 0, situació que s'ha d'evitar al mètode del gradient reduït. Per tant, ens cal buscar una variable no bàsica amb valor positiu i intercanviar-la per aquesta variable bàsica anul·lada. Per exemple, podem fer entrar a la base la variable x_3, amb el qual les noves matrius B i N serien:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i haurien de ser usades a la següent iteració per calcular el nou punt x^2.

Solució del problema 63.

a) Denotant per x_1 l'arc que va del node A al C, per x_2 l'arc que va del node A al B, i per x_3 i x_4 els arcs que van del node B al C, el problema a solucionar pot ser formulat com

$$\begin{array}{rll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i^2 & \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 = M & \text{[equació de balanç al node A]} \\ & x_2 = x_3 + x_4 & \text{[equació de balanç al node B]} \\ & x_1 + x_3 + x_4 = M & \text{[equació de balanç al node C]} \\ & 0 \le x_i \le M \quad i = 1, ..., 4 & \end{array}$$

b) Podem eliminar la restricció associada al balanç en un node (per exemple, el C), ja que és combinació lineal de les altres dues. És fàcil veure que sumant les equacions dels nodes A i B obtenim la del node C:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = M \\ x_3 + x_4 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = M$$

Pel que fa als límits de les variables, podem eliminar el límit superior $x_i \le M$ ja que no poden circular per la xarxa més de M unitats del fluid. Si eliminem els límits inferiors $x_i \ge 0$, però, podríem tenir situacions on apareguessin fluxos negatius que satisfan les restriccions d'igualtat del problema. Per exemple, el punt $x_1 = -M$, $x_2 = 2M$ i $x_3 = x_4 = M$ és factible si eliminem $x_i \ge 0$. Tanmateix, en aquest problema concret aquestes situacions són econòmicament indesitjables ja que tenen un cost molt elevat. És millor fer circular fluxos que siguin fraccions positives de M, les quals satisfaran les restriccions d'igualtat amb un cost menor.

El problema que tenim eliminant els límits i l'equació de balanç del node C és doncs:

$$\begin{array}{rl} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 = M \\ & x_2 = x_3 + x_4 \end{array}$$

c) El problema obtingut a l'apartat anterior el solucionarem aplicant les condicions d'optimalitat (de Lagrange) per a problemes amb restriccions d'igualtat. Definint la Lagrangiana

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - M) + \lambda_2(x_2 - x_3 - x_4),$$

les condicions de primer ordre s'obtenen derivant i igualant a 0 el gradient de la Lagrangiana:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda_1 := 0 \\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} &= 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 := 0 \\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_3} &= 2x_3 - \lambda_2 := 0 \\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_4} &= 2x_4 - \lambda_2 := 0 \\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1} &= x_1 + x_2 - M := 0 \\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_2} &= x_2 - x_3 - x_4 := 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1^* &= 3/5M \\ x_2^* &= 2/5M \\ x_3^* &= x_4^* = 1/5M. \end{aligned}$$

Per estar segurs de que es tracta d'un punt mínim hem de comprovar les condicions de 2n ordre: $y^T[\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*)]y \geq 0$ per a tota $y \neq 0$ tal que $Ay = 0$ (on A representa la matriu de restriccions lineals del problema). Calculem $\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*)$:

$$\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Donat que $\nabla^2_{xx}L(x^*,\lambda^*)$ és definida positiva per a tot vector y (no només per aquells tals que $Ay = 0$), es satisfan les condicions suficients de segon ordre, i per tant el punt $x^* = (\,3/5M \quad 2/5M \quad 1/5M \quad 1/5M\,)^T$ és el mínim del problema.

d) Per garantir que és un mínim global hem de veure si ens trobem davant d'un problema convex, és a dir, que té la funció objectiu i una regió factible convexes:

i) La Hessiana de la funció objectiu ve donada per

$$\nabla^2_{xx}f(x) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix},$$

que és una matriu definida positiva, garantint que $f(x)$ és estrictament convexa.

ii) Les dues equacions del problema són lineals, i sabem que aquestes sempre defineixen conjunts factibles convexos

Per tant, podem garantir que el punt obtingut a l'apartat c) és l'òptim global del nostre problema.

e) El problema a solucionar és:

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i^2 & \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 = M & \text{on} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ & x_2 - x_3 - x_4 = 0 & \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 & \end{array}$$

Per l'enunciat sabem que la base inicial està formada per x_1 i x_2, de forma que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El gradient de la funció objectiu és

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

1a Iteració)

El punt inicial d'iteració i gradient en aquest punt són:

$$x^0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad\qquad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usant la partició anterior de $A = [B|N]$ i una partició equivalent per a $\nabla f(x)$, calculem el gradient reduït al punt x^0:

$$\rho = \nabla_{x_N} f(x^0) - \nabla_{x_B} f(x^0) B^{-1} N = \begin{pmatrix} -20 & -20 \end{pmatrix}.$$

Per tant la direcció de moviment obtinguda és

$$\left.\begin{array}{l} d_{x_N} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \\ \\ d_{x_B} = -B^{-1} N d_{x_N} = \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d_x = \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Tot seguit calculem la passa α:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max\{\alpha \geq 0 : \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 &= \max\{\alpha \geq 0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = +\infty \\ \alpha_3 &= \arg\min\{g(\alpha) = f(x^0 + \alpha dx) = 4000\alpha^2 - 800\alpha + 100, 0 \leq \alpha \leq 1/4\}. \end{aligned}$$

El mínim de $g(\alpha)$ ve donat per $\alpha = 1/10$. Com que aquest valor ja és menor que $1/4$, tenim que $\alpha_3 = 1/10$.

El nou punt x^1 és ara:

$$x^1 = x^0 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/10 \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Al nou punt hem millorat el valor de la funció objectiu:

$$f(x^0) = 10^2 = 100 > f(x^1) = 6^2 + 4^2 + 22^2 = 60.$$

2a Iteració)

La partició de variables bàsiques i no bàsiques no ha estat modificada. El gradient al nou punt és

$$\nabla f(x^1) = (\,12 \quad 8 \quad 4 \quad 4\,),$$

i el gradient reduït ve donat per

$$\rho = \nabla_{x_N} f(x^1) - \nabla_{x_B} f(x^1) B^{-1} N = (\,0 \quad 0\,).$$

Per tant $d_{x_N} = 0$ i $d_{x_B} = 0$. És a dir, ja no podem bellugar-nos millorant la nostra funció objectiu, de forma que el punt actual $x^1 = (\,6 \quad 4 \quad 2 \quad 2\,)$ ja és l'òptim del nostre problema. Adonem-nos que aquest resultat concorda amb l'obtingut de forma analítica a l'apartat b):

$$x^* = \begin{pmatrix} 3/5M \\ 2/5M \\ 1/5M \\ 1/5M \end{pmatrix} \quad \overset{[M=10]}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$