Col·lecció de problemes resolts d'Investigació Operativa Determinista

(v.02.00)

Jordi Castro Pérez, F. Javier Heredia Cervera

Dept. d'Estadística i Investigació Operativa
Secció d'Informàtica
Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

Es presenta en aquest llibre una col·lecció de problemes, la major part d'ells resolts, d'Investigació Operativa Determinista. El nivell dels problemes presentats fa que la col·lecció sigui especialment adequada per a assignatures introductòries d'Investigació Operativa en cursos de diferents Enginyeries Superiors i Tècniques, així com Diplomatures i Llicenciatures d'Estadística.

Els problemes s'han dividit en quatre apartats: problemes de modelització, problemes de programació lineal, problemes de programació lineal entera i problemes de programació no lineal. Tenint en compte el nostre entorn (una Universitat Politècnica) molts dels problemes de la part de modelització representen situacions extretes de les diferents Enginyeries. La resta d'exercicis de la part de modelització són problemes clàssics que val la pena que tot futur titulat de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) conegui. Pel que fa a les tres unitats de programació lineal, programació lineal entera i programació no lineal, els problemes presentats tenen l'objectiu de fixar i reforçar les nocions que els alumnes reben a les classes de teoria. La major part dels problemes d'aquestes unitats són de caràcter pràctic, tot i que també hi ha alguns teòrics de dificultat mitjana.

La col·lecció es troba constituïda per problemes inèdits, problemes clàssics d'Optimització, i variants de casos extrets de l'extensa bibliografia existent sobre la matèria. La col·lecció és fruit del treball dels autors durant els seus anys de docència a diferents assignatures de la UPC i de la Universitat Rovira i Virgili (URV). En F. Javier Heredia ha estat o és professor de les assignatures d'Optimització (Llicenciatura d'Informàtica, avui en dia inexistent), Models Deterministes de la Investigació Operativa (Enginyeria Informàtica) i Investigació Operativa Determinista (Diplomatura d'Estadística), totes elles assignatures de la UPC. Per la seva banda, en Jordi Castro ha estat professor de les assignatures d'Optimització (Llicenciatura d'Informàtica, inexistent en l'actualitat) de la UPC i de Simulació i Optimització de Processos Químics (Escola Tècnica Superior d'Enginyeria) de la URV. Una part important dels problemes presentats han aparegut als enunciats d'examens d'aquestes assignatures.

Al final de la llista de problemes es poden trobar els capítols on apareixen les solucions comentades de la majoria de problemes. Únicament s'ha obviat la resolució d'aquells exercicis que, o bé no eren d'una excessiva dificultat, o bé feien referència a situacions ja presentades i solucionades en problemes anteriors. A més, en tot moment s'ha adjuntat la solució d'aquells problemes tipus que permeten a l'alumne adquirir una destresa que pot ser aplicada en altres situacions. Els problemes que es troben solucionats es marquen amb un * en enunciar-los. En la mesura que ha estat possible, per aquells problemes la solució comentada dels quals no s'adjunta, s'ha procurat donar, al menys, el resultat final. Aquests problemes es marquen amb un †.

El fet d'acompanyar la solució dels exercicis és especialment útil per als problemes de modelització, els quals sovint presenten diferents interpretacions i múltiples solucions. En aquest sentit, val a dir que en alguns casos el model aquí presentat com a solució no és únic i pot haver d'alternatius.

Barcelona, febrer de 2000.

Índex

1 Problemes de modelització.

1.1 Models de programació lineal i entera.

1. La refineria *

Una refineria compra dos tipus de crus C1 i C2. El preu de C1 és de c_{c1} pts/barril i el de C2 és de c_{c2} pts/barril. A més, cada dia com a molt pot disposar d'un total de M_{c1} i M_{c2} barrils per C1 i C2 respectivament. Amb aquests dos crus es fabriquen 3 tipus de productes: gasolina, querosè i fuel. La gasolina que fabrica està composta en un 80% pel cru C1 i en un 20% pel cru C2. Aquestes proporcions són de 65% i 35% per al querosè, i de 60% i 40% per al fuel. El preu de venda de cada producte és de p_g pts/barril per a la gasolina, de p_q pts/barril per al querosè i de p_f pts/barril per al fuel. A més, processar un barril de cru li suposa a la refineria un cost de cp_{c1} i cp_{c2} pts/barril per C1 i C2 respectivament. Sabent que per restriccions tècniques no es poden produir més de M_g barrils de gasolina, M_q de querosè i M_f de fuel, formular el problema que s'ha de solucionar per obtenir la política òptima de producció diària de la refineria.

2. Assignació de personal *

Una determinada planta química disposa d'un total de n tasques que poden ser realitzades per n operaris diferents indistintament. L'empresa, en funció del coneixement que té de cada operari, calcula uns coeficients $t_{ij}, i, j = 1, ..., n$ que representen el temps que es creu que l'operari i tardarà en fer la feina j. Es demana formular el problema que permet fer l'assignació òptima (entenent per òptima, la que representa un temps total mínim) d'operaris a tasques.

3. Plantes de producció (I) *

Hem construït N plantes de fabricació d'un cert producte, l'esperança de vida de les quals serà de I anys. A cada planta disposem de dos mètodes de fabricació diferents. Els costos de fabricació d'una unitat de producte dins la planta j són de v_{j1} i v_{j2} amb el primer i segon mètode respectivament. Durant els anys que mantindrem les plantes en funcionament, hem de garantir una producció de D_i unitats de producte per al i-èssim any. A més, cada planta té al llarg de la seva vida un límit tècnic sobre el nombre total d'unitats de producte fabricades amb cada mètode. Aquest límit ve donat pels valors M_{1j} (mètode 1, planta j) i M_{2j} (mètode 2, planta j). Realitzeu la formulació del problema anterior de forma que minimitzem els costos de producció totals durant la vida efectiva de les plantes.

4. La mina *

En una mina de coure es disposa de quatre túnels d'excavació. Per cada tona mètrica de material extret a cada túnel, la proporció de residus i coure, i el cost d'extracció ve donat per la Taula 1.

Taula 1. Percentatge de residus, de coure, i cost d'extracció de cada tona de material segons el túnel.

	% residus	% coure	cost (pts)
Túnel 1	30	20	7000
Túnel 2	40	22	6500
Túnel 3	20	10	6000
Túnel 4	35	18	6300

La companyia que explota la mina vol determinar el tant per cent que ha d'extreure de cada túnel, de forma que minimitzi el cost d'extracció, i que es satisfaci que el percentatge de residus i de coure de cada tona mètrica extreta sigui en promig inferior al 29% i superior al 17% respectivament.

5. Transport d'un producte *

Disposem de n plantes productores d'un cert producte, cada una de les quals té emmagatzemades $a_i, i = 1, ..., n$ unitats del mateix. Aquestes unitats han de ser transportades fins m centres consumidors. Cada centre consumidor requereix $b_i, i = 1, ..., m$ unitats del producte. Sabent que el cost de transport d'una unitat de producte del centre productor i al centre consumidor j és de c_{ij}, formuleu el problema per tal de transportar les unitats de producte amb un cost mínim (suposarem que $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, és a dir, tot el producte emmagatzemat és requerit). Penseu com podríem solucionar aquest problema si no es verifiqués la igualtat anterior (és a dir, en els casos $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ i $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$).

6. Planificació dels dies de producció *

Una companyia disposa de dues plantes de producció A i B. Cada planta pot fabricar dos tipus de productes indistintament. La Taula 2 mostra la quantitat de cada producte que pot processar diàriament cada planta i el benefici que extreu de la seva venda.

Taula 2. Producte processat i benefici obtingut segons planta i producte.

	Producte (kg/dia)		Benefici (pts/kg)	
	1	2	1	2
Planta A	M_{A1}	M_{A2}	B_{A1}	B_{A2}
Planta B	M_{B1}	M_{B2}	B_{A1}	B_{A2}

A més, la companyia sap que, per les pròpies condicions del mercat d'aquests dos productes, no és possible vendre més de L_1 i L_2 kg. respectivament. Es demana relitzar la planificació conjunta de les dues plantes per a un any determinat (és a dir, determinar quants dies hauran de funcionar fabricant un o l'altre producte) de forma que es maximitzi el benefici de la companyia.

7. Plantes de producció (II) *

Volem construir N plantes de fabricació d'un cert producte, l'esperança de vida de les quals serà de I anys. Disposem de dos mètodes de fabricació diferents, els quals poden ser implantats indistintament a cada una de les plantes. El cost fixe d'implantació del primer mètode a la planta j és de f_{j1}, mentre que el d'implantació del segon mètode ve donat per f_{j2}. Per la seva banda, els costos de fabricació d'una unitat de producte dins la planta j són de v_{j1} i v_{j2} amb el primer i segon mètode respectivament. Durant els anys que mantindrem les plantes en funcionament, hem de garantir una producció de D_i unitats de producte per al i-èssim any. Realitzeu la formulació del problema anterior de forma que minimitzem els costos de producció totals durant la vida efectiva de les plantes, considerant que podem instal·lar el primer mètode de fabricació fins a un màxim de M_1 vegades, i sota els dos supòsits següents:
a) Cada planta només pot tenir un sol mètode de fabricació.
b) Els dos mètodes poden ser implantats dins una mateixa planta.

8. El gasoducte *

Considerem un gasoducte de transport d'un determinat gas des d'uns centres de produccció fins a uns centres de demanda.

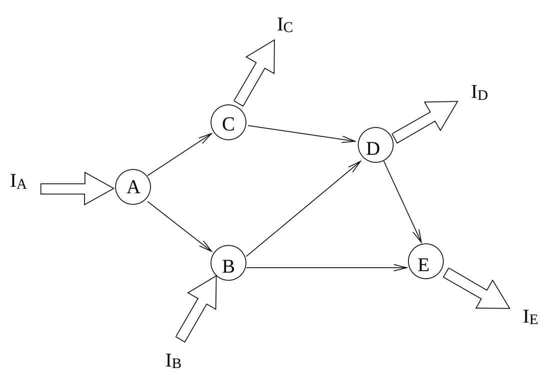


Figura 1. Topologia del gasoducte.

La topologia del gasoducte ve donada segons la Fig. 1. Tal i com s'observa, disposem de dos centres (o nodes) de producció (A i B) i de tres centres (o nodes) de demanda (C, D i E). La quantitat de gas produïda als centres A i B és respecivament de I_A i I_B unitats en un període de temps determinat, mentre que el consum a C, D i E és de I_C, I_D i I_E unitats durant el mateix període (suposarem que la xarxa es troba "balancejada", és a dir, que $I_A + I_B = I_C + I_D + I_E$). Sabent que cada una de les 6 canonades (associades als arcs de la xarxa de la Fig. 1) del gasoducte té un límit de u_{VW} unitats (on V representa el node origen i W representa el node destí de l'arc), i que el cost de transport d'una unitat de gas suposa un cost de c_{VW}, formuleu el problema que cal solucionar per tal de realitzar el transport del gas amb un cost total mínim.

9. Localització de plantes de producció *

Una companyia vol proveir mensualment un total de m centres de consum d'un determinat producte, i es planteja la possibilitat de construir fins a n plantes productores (en n localitzacions estratègiques diferents) per satisfer la demanda d'aquest producte. La companyia ha fet un estudi previ i disposa dels costos c_{ij} que li suposaria transportar una unitat de producte (aquesta unitat pot ser qualsevol, p. ex., un kg, una tona...) des de cada possible planta i fins al centre de consum j. Aquests costos c_{ij} la companyia els ha calculat en funció de la distància de cada planta als centres de producció. D'igual forma, la companyia sap el cost fixe f_i que li suposarà construir cada planta (els costos fixes depenen de la localització de cada planta, per això s'ha afegit el subíndex $_i$). Es demana:

a) Formular el problema que permeti a la companyia decidir quines plantes ha de construir, i com farà el proveïment mensual de b_j unitats del producte des de les plantes fins a cada centre de consum j, suposant que les plantes no tenen cap limitació de producció.
b) El mateix que en el cas anterior, però suposant ara que cada planta té un límit mensual de producció de a_i unitats de producte.

10. Camions de transport *

En una determinada regió hi ha quatre plantes de producció i/o consum de dos productes diferents. Es disposa d'un total de 5 camions que fan el transport dels productes entre les plantes. El trajecte que fa cada camió ve donat per la Taula 3.

Taula 3. Plantes origen i destí del trajectes realitzats per cada camió.

	DE la planta	A la planta
Camió 1	1	2
Camió 2	1	3
Camió 3	2	3
Camió 4	3	4
Camió 5	4	2

Cada camió i pot transportar fins un màxim de M_i $i = 1, ..., 5$ kg de càrrega. Transportar un kg de cada producte $k = 1, 2$ té un cost de c_i^k pts per a cada camió i. Per la seva banda, cada planta i té un consum/producció de P_i^1 $i = 1, ..., 4$ kg del producte 1 i de P_i^2 $i = 1, ..., 4$ kg del segon producte. En el cas de que $P_i^k > 0$, això voldrà dir que la planta i produeix P_i^k kg del producte k, mentre que si $P_i^k < 0$ significarà que la planta consumeix P_i^k kg (si $P_i^k = 0$ la planta i ni consumeix ni produeix el producte k).

Es demana formular el problema que permeti fer el repartiment dels productes a cada planta, de forma que es minimitzin els costos de transport, tenint en compte que cada camió pot transportar, o bé només un dels dos productes, o bé els dos alhora (sempre i quan no es superi la seva capacitat màxima). (Nota: Aquest problema és una extensió del problema 8 del gasoducte. En aquell cas només calia transportar un producte —el gas—, mentre que ara hem de fer el repartiment de dos productes. Caldrà de nou usar en aquest cas una estructura de xarxa, amb certes modificacions per considerar els dos productes i la limitació dels camions).

11. Planificació de la producció d'un producte de demanda estacional *

Una companyia té una planta on es fabriquen dos productes diferents. Aquests productes tenen una demanda trimestral, i la companyia disposa d'un magatzem de capacitat M kg on emmagatzemar el material fabricat durant un trimestre. La quantitat demandada per al producte i i trimestre j és de D_j^i, $i = 1,2 \;\; j = 1, ..., 4$ kg.

La companyia ha determinat que el cost de mantenir un kg de material (tant sigui d'un producte o de l'altre) li suposa un cost de T pts. A més, degut a les variacions del preu de mercat de les matèries primeres necessàries per fabricar ambdós productes, sap que el cost de producció d'un kg de cada producte varia segons el trimestre, i és de C_j^i pts/kg per al producte i i trimestre j. D'igual forma, degut a les limitacions de la planta, cada trimestre j no pot produir més de U_j^i kg del producte i.

Es demana plantejar el problema per tal de determinar la quantitat a produir i emmagatzemar cada trimestre d'un any determinat (suposarem i) que tot el producte venut passa abans pel magatzem, i no pot ser venut directament des de la planta de producció, i ii) que al principi (i final) de l'any el magatzem es troba (i s'ha de deixar) completament buit).

12. Planificació setmanal d'uns reactors *

Una companyia química disposa de r reactors, cadascun dels quals pot estar diàriament, o bé aturat, o bé operant a un règim de producció baix, mig o alt (mai en un dia estarà en dos règims diferents). El seu estat pot ser modificat cada dia. La quantitat de producte obtinguda de cada reactor j segons el règim de producció és de p_{B_j}, p_{M_j} i p_{A_j} unitats per dia, i el cost associat a cada règim és de c_{B_j}, c_{M_j} i c_{A_j} pts/dia. La companyia vol planificar la seva producció setmanal (7 dies), de forma que cada dia es garanteixi una producció de D unitats, i que, com a mínim, cada reactor estigui aturat un dia a la setmana per fer-li un manteniment. Formuleu el problema que haurà de solucionar la companyia per tal d'obtenir la política de producció de cost mínim.

13. Línies Aèries Còndor*.

La companyia aèria "Línies Aèries Còndor" (LAC) es dedica a la distribució de mercaderies amb la seva flota d'avions. Aquesta flota està formada per 8 avions del tipus 1, 15 avions del tipus 2 i 11 avions del tipus 3. La capacitat, en milers de tones (Kt), dels tres tipus d'avions és de 45 per a cada avió tipus 1, 7 per a cada avió tipus 2 i 5 pel tipus 3. El programa de vols del dia d'avui indica que s'han d'enviar 20 Kt a la ciutat A i 28 Kt a la ciutat B. Tenint en compte la distància entre la base de LAC i les dues ciutats, cada avió pot fer només un vol diari.

Els costos (en milers de pessetes) de vol d'un avió a cada ciutat són:

	Tipus 1	Tipus 2	Tipus 3
Ciutat A	230	150	20
Ciutat B	580	200	38

Aquests costos no varien si l'avió assignat no transporta la seva capacitat màxima.

La torre de control de l'aeròdrom base de la companyia LAC té una capacitat de control de trànsit aeri limitada. El temps total que la torre té reservat a LAC permet controlar l'enlairament i aterratge d'un màxim de 5 avions tipus 1. El temps de control d'un avió tipus 2 és la meitat del d'un avió tipus 1, i el temps de control d'un avió tipus 3 és de 1/3 el d'un avió tipus 1.

Formuleu el (PLE) que permet obtenir el nombre d'avions de cada tipus a enviar a cada ciutat que minimitza els costos de vol.

14. Balanç racial*.

La ciutat de Middletown té tres escoles de secundària, dos d'elles amb majoria d'estudiants de raça blanca i una amb majoria d'estudiants de raça negra. La coordinadora d'escoles d'aquesta ciutat ha decidit modificar l'assignació d'estudiants a escoles per tal de reduir l'aïllament racial existent. L'ajuntament disposa de la següent informació sobre els deu districtes en que es divideix la ciutat:

- Per a cada districte, $i = 1, \ldots, 10$:
  - n_i^n: nombre d'alumnes de raça negra al barri i.
  - n_i^b: nombre d'alumnes de raça blanca al barri i.
  - d_i^j , $j = 1, 2, 3$: distància des de cada barri als tres instituts.
- Per a cada institut, $j = 1, 2, 3$:
  - c_j: capacitat escolar de cada institut.

La reassignació d'estudiants a escoles es vol fer de forma que la suma de les distàncies a recórrer per cada alumne sigui el més petita possible. L'ajuntament suposa que el nombre d'estudiants blancs i negres del barri i assignats a l'institut j guarda la proporció de races existent al barri d'origen. La nova assignació ha de satisfer un cert balanç racial que promogui la convivència entre els alumnes de les dues races a la mateixa escola. Per tal d'aconseguir-ho es decideix que la fracció d'estudiants d'una raça qualsevol a cada escola es mantingui entre certs límits. Es considera ideal una proporció de 1/2 per a cada raça a cada escola, però es permet una certa desviació θ respecte d'aquesta proporció ideal. Així doncs, s'exigeix que la nova distribució sigui tal que la fracció d'estudiants d'una raça donada a cada escola estigui entre $1/2 + \theta$ i $1/2 - \theta$. Formuleu aquest problema com un problema de programació matemàtica.

15. Industries Alden *

Les Industries Alden fabriquen dos productes. Cada producte pot ser fabricat a la màquina 1 o a la màquina 2. El temps de fabricació que necessita cada producte en función de la màquina on es fabriqui es mostra a la següent taula:

	MAQUINA 1	MAQUINA 2
PRODUCTE 1	4 h	3 h
PRODUCTE 2	7 h	4 h

Cada mes es disposa de 500h de cadascuna de les màquines. S'estima que el mercat pot absorbir qualsevol quantitat de producte 1 i 2 fins a un cert límit (demanda màxima), per sobre del qual es perd la producció. Els valors de la demanda màxima i el preu de venda de cada producte, per als pròxims dos messos, s'indica en la següent taula:

	DEMANDA MÀXIMA (unitats)		PREU (centenars ptas)	
	Mes 1	Mes 2	Mes 1	Mes 2
Producte 1	100	190	55	12
Producte 2	140	130	65	32

L'objectiu de les Industries Alden és maximitzar el benefici obtingut per la venda dels dos prpoductes durant els próxims dos mesos. Formuleu un programa lineal que permeti resoldre aquest problema.

16. Estació de bombers

L'Ajuntament de Barcelona té prevista la construcció d'una nova estació de bombers que cubreixi els districtes d'Horta-Guinardó, St. Andreu i Gràcia. L'Ajuntament disposa dels valors del temps de resposta (en minuts) a una alarma produida en un d'aquests tres districtes en funció de la ubicació final de l'estació de bombers, i del valor esperat del nombre d'alarmes diaries a cada districte. Aquestes dades es mostren a la següent taula:

		Alarma a :		
		Horta Guin.	St. Andreu	Gràcia
Estació a				
	Horta Guin.	5	12	30
	St. Andreu	15	4	15
	Gràcia	20	20	6
	Promig alarmes :	2	1	3

Els tècnics de l'Ajuntament han de decidir a quin districte construir l'estació de bombers de forma que el valor esperat del temps de resposta a totes les alarmes diàries dels tres districtes sigui mínim. Formuleu el problema de programació matemàtica que permet resoldre aquest problema.

17. Plantilla companyia Hindernis*

La companyia Hindernis dona feina a tres tipus diferents de treballadors, segons la seva qualificació: treballadors de classe A, B i C. L'activitat d'aquesta empresa consisteix en la realització de dos tasques, la tasca tipus I i la tipus II.

Cada treballador està assignat a un únic tipus de tasca. La tasca tipus I pot ser realitzada només per treballadors de classe A, treballant sols, o per equips constituïts per un treballador de classe A i dos treballadors de la classe B. La tasca II pot ser realitzada per treballador de la classe A, treballant sols, de la classe B, treballant sols, o per equips constituïts per un treballador de la classe B i tres treballadors de la classe C.

Els treballadors de les classes A, B i C cobren 1000, 500 i 200 ptas/hora respectivament.

Per tal de cubrir les seves quotes de producció la companyia necessita assegurar cada setmana 1000 hores de producció assignades a la tasca I i 2000 hores de producció assignades a la tasca II.

Tots els treballadors treballen 40 hores setmanals, pero en termes de producció, un treballador de classe A equival a 40 hores de producció setmanals, un de classe B a 30 hores de producció setmanals i un de classe C a 20 hores.

Per restriccions sindicals, es pot contractar un màxim de 30 treballadors de classe A i 40 de classe B. A més, els treballadors de la classe C no poden representar més d'un 25% del total de treballadors contractats.

La companyia Hindernis vol saber quants treballadors de cada classe ha de constractar de forma que s'assegurin les hores de producció de les tasques I i II, es satisfacin les condicions sindicals i es minimitzin els costos de la nòmina de la plantilla. Formuleu un problema de programació matemàtica que permeti resoldre aquest problema.

18. Plantilla companyia de correus*

Una oficina de correus necessita un nombre diferent d'empleats a temps complet (8h) cada dia de la setmana. El nombre d'empleats a temps complet necessaris cada dia es mostra en la següent taula :

Dilluns	:	17
Dimarts	:	13
Dimecres	:	15
Dijous	:	19
Divendres	:	14
Dissabte	:	16
Diumenge	:	11

L'oficina de correus pot satisfer la seva demanda diaria de treballadors amb treballadors a temps complet (TTC) o a temps parcial (TTP). Les normatives laborals estableixen el següent :

1.- Cada treballador (ja sigui TTC o TTP) ha de treballar durant cinc dies consecutius i descansar els dos dies següents. Això vol dir que , per exemple, un empleat que treballi de dissabte a dimecres ha de descansar dijous i divendres. Un treballador fa sempre el mateix torn, és a dir, si una setmana comença a treballar el dimarts, cada setmana començarà el dimarts.

2.- Els TTC fan una jornada de vuit hores diàries mentre que els TTP fan una jornada de quatre hores diàries.

3.- Només un 25% del total d'hores treballades durant la setmana poden ser cobertes amb TTP.

4.- Els sous són de 1500 pts/hora pels TTC i 1000 pts/hora pels TTP.

Formuleu un problema de programació lineal per trobar l'estratègia de contractació que minimitzi els costos laborals setmanals de l'oficina de correus satisfent les seves necessitats laborals diàries d'acord amb les normatives laborals.

19. Composició de disolvents*

Quatre disolvents han de ser combinats per a obtenir cert compost químic. Cada litre d'aquest compost ha de contenir, com a mínim, 90ml de clor i el seu contingut en amoníac no pot excedir els 4ml. El contingut en clor i amoníac de cada disolvent, així com el cost es mostren en la següent taula:

	disolvents 1	2	3	4
Clor (ml/l)	180	120	90	60
Amoníac (ml/l)	3	2	6	5
Cost (ptas/l)	16	12	10	11

Formuleu un problema de programació matemàtica la solució del qual proporcioni les proporcions en que s'han de mesclar els quatre disolvents per tal d'aconsseguir el compost químic de cost mínim que cumpleixi les condicions de contingut en clor i amoníac indicades a l'enunciat.

20. Paper reciclat*

Una planta de reciclat de paper transforma paper residual en paper reciclat. El paper residual pot consistir en *caixes de cartró*, *paper seda*, *paper continu* i *paper de llibres*. La polpa produïda s'usa en la fabricació de tres tipus de paper reciclat, dits de *classe 1*,*classe 2* i *classe 3*. Els preus per tona i el contingut en polpa dels quatre tipus de paper residual són :

	pts/Tm	**Contingut en polpa**
Caixes cartró	500	15%
Paper seda	600	20%
Paper continu	800	30%
Paper llibres	1000	40%

El paper residual es pot reciclar mitjançant dos processos diferents, dits *destintat* i *dispersió d'asfalt*. Les característiques dels dos processos s'indiquen an la següent taula, on la columna **Polpa perduda** indica la proporció de la polpa continguda al paper residual que *es perd* durant el procés, i el preu per tona processada és el mateix per a qualsevol tipus de paper residual :

	pts/Tm paper processat	**Polpa perduda**	**Capacitat procés (Tm/mes)**
Destintat	2000	10%	3000
Dispersió d'asfalt	1500	15%	3000

Les pulpes obtingudes a partir dels diferents tipus de paper residual només són aptes per produïr certes classes de paper reciclat. El tipus de paper residual apte per a cada classe de paper reciclat s'indica en la següent taula, junt amb la quantitat mensual de polpa apte necessària per a satisfer la demanda de cada classe de paper reciclat :

	Caixes Cartró	**Paper Seda**	**Paper continu**	**Paper llibres**	**Demanda (Tm polpa/mes)**
Classe 1			Apte	Apte	500
Classe 2	Apte	Apte		Apte	500
Classe 3			Apte		600

Formuleu un programa lineal per tal d'assolir la demanda mensual de paper reciclat minimitzant els costos de producció.

21. Plantilla mòbil*

CSL és una cadena de botigues de servei tècnic d'ordinadors. La previsió de demanda de serveis de reparació pels cinc primers mesos de l'any, mesurada en hores de treball de tecnic qualificats, s'indica en la següent taula :

	Gener	**Febrer**	**Març**	**Abril**	**Maig**
Demanda (h)	6000	7000	8000	9500	11000

(Previsió demanda reparacions)

Al començament de febrer treballen a CSL 50 tècnics qualificats. Cada tècnic qualificat pot treballar fins a 160 hores per mes. Per tal de satisfer la demanda futura s'han de formar nous tècnics qualificats. El periode de formació d'un nou tècnic qualificat és de dos mesos, i requereix que els tècnics qualificats dediquin un cert nombre d'hores a la supervisió d'aquesta formació. Durant el primer mes cada tècnic en formació ha d'estar supervisat durant 50 hores per tècnics qualificats, mentre que el segon mes el nombre d'hores de supervisió és de 10h.

Cada tècnic qualificat cobra 200000pts/mes, tant si treballa el total de 160h com si no. Durant el més de formació, els aspirants a tècnics cobren 100000pts/mes.

Al final de cada mes un 5% dels tècnics qualificats de CSL marxen de l'empresa per anar a treballar a d'altres empreses de serveis informàtics.

Formuleu un programa lineal quina solució permeti a CSL minimitzar els costos de personal satisfent la demanda de serveis dels pròxims cinc mesos.

22. Silvco*.

Silicon Valley Corporation (Silvco) fabrica transistors. Una fase molt important de la fabricació de transistors és la mescla dels elements de germani al forn. Malhauradament, els procés de mescla proporciona germani amb un grau de qualitat molt variable. Els possibles graus de qualitat del germani es classifiquen en G1 (menor qualitat) i G2 (major qualitat).

Existeixen dos mètodes que poden ser usats en la mescla del germani de cada transistor. El mètode 1 té un cost de 5000pts/transsistor mentre que el cost del mètode 2 és de 7000pts/transistor. El percentatge de transistors amb germani de cada grau de qualitat obtinguts per tots dos mètodes es mostra a la següent taula:

QUALITAT	Mètode 1	Mètode 2
Defectuós	30%	15%
G1	40%	35%
G2	30%	50%

Silvco té l'opció de refinar el germani obtingut per mescla de tots o part dels transistors per a intentar millorar la qualitat. El cost de refinar el gemani mesclat d'un transistor és de 2500pts/transistor. El resultat del procés de refinat es mostra en la següent taula, on s'indica el percentatge de transistors de cada grau de qualitat obtingut refinant els diferents tipus de germani producte de la mescla:

	TIPUS DE GERMANI REFINAT	
RESULTAT REFINAT	Defectuós	G1
Defectuós	65%	-
G1	30%	60%
G2	5%	40%

El forn de Silvco té capacitat suficient per a mesclar o refinar el germani necessari per a 20000 transistors al mes. La demanda mensual que ha de satisfer Silvco és de 3000 transistors de qualitat G1 i de 2000 transistors de qualitat G2. Formuleu el problema d'optimització que ha de resoldre Silvco per a minimitzar el cost de producció dels transistors.

23. Nau industrial*.

En una nau industrial es vol instal·lar un taller per a fabricar tres tipus diferents de peces de planxa metal·lica, A, B i C. Les dades de que es disposen són:

Peça	Cost planxa (pts)	Producció (peces/h) Premsa	Producció (peces/h) Soldadura	Màxim diari	Preu venda (pts/peça)
A	150	500	15	10000	250
B	300	1800	80	5000	350
C	200	150	30	12000	300

La primera columna conté el cost de la planxa a usar per peça acabada. Les produccions de les columnes 2 i 3 són per cada màquina, i cada peça ha de passar per una premsa i una soldadura. El màxim diari és un límit que no es desitja passar per raons comercials. Finalment, la darrera columna indica el preu de venda de cada peça, tenint en compte que el mercat absorbeix qualsevol quantitat per sota del màxim diari.

Cada premsa, un cop instal·lada, ocupa una superfície de 10m^2 i necessita per a funcionar un premsista i 1/4 d'aprenent (és a dir, un aprenent dona servei a quatre premses). Cada instal·lació de soldadura ocupa 12m^2 i necessita un soldador i un aprenent. Els aprenents són intercanviables entre premses i soldadures.

El taller, un cop instal·lat, farà cada dia el mateix nombre d'unitats de cada peça, i treballarà amb un únic torn de 8h diaries.

El cost d'una hora de premsista és de 550pts, el d'una hora de soldador 650pts i una hora d'aprenent costa 360pts. Per raons laborals no poden treballar al taller més de 400 obrers en total.

La superfície de la nau és de 10.000m^2, però l'espai necessari per passadissos i per magatzem és tal que la superfície destinada a màquines no pot ser superior a la quarta part de l'espai total.

Formuleu un problema de programació matemàtica que permeti determinar la configuració del taller que maximitza els beneficis obtinguts per l'empresa. S'entén per configuració del taller el conjunt de dades següents: nombre de màquines de cada tipus a instal·lar, nombre d'obrers de cada categoria i producció diària per a cada tipus de peça.

24. Tomàquets.

Una fàbrica de conserves de tomàquet té 2500 kg de tomàquets de qualitat A i 5000 kg de tomàquets de qualitat B, a partir dels quals ha de fer conserves de tomàquets sencers i salsa de tomàquet. Les conserves de tomàquets sencers han d'estar compostes com a mínim d'un 80% de tomàquets de qualitat A, mentre que la salsa de tomàquet ha d'estar composta com a mínim d'un 10% de tomàquets de qualitat A. Les conserves de tomàquets sencers es venen a 24 Pts/kg i la salsa de tomàquet a 15 Pts/kg. Formuleu un programa de programació lineal que permeti decidir la quantitat de conserva de tomàquet sencer i de salsa que la fàbrica ha de produir per tal de maximitzar els ingressos.

25. Col.locació de vigilants.

La figura 1 representa el conjunt de sales d'un museu. El servei de seguretat d'aquest museu vol col.locar vigilants a les portes de comunicació entre sales. Cada vigilant pot controlar les dues sales adjacents a la porta que té assignada. Formuleu un problema de Programació Lineal Entera que permeti trobar la col.locació dels vigilants de forma que es puguin controlar totes les sales amb el mínim nombre possible de vigilants.

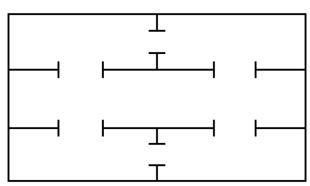
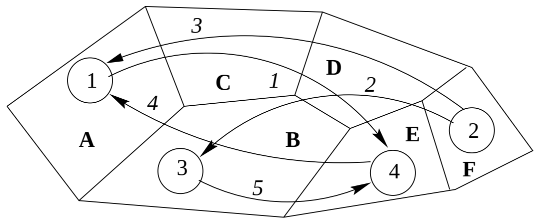


Figura 1.

26. Optimització del trànsit aeri.

La següent figura mostra en trànsit aeri d'una zona amb sis sectors aeris (**A**, **B**,...,**F**), quatre aeroports (1,2,3,4) i cinc vols programats (*1*, *2*,..., *5*):



Es vol realitzar la planificació del trànsit aeri d'aquesta zona. Es disposa de la següent informació:

- s_v, a_v, $v = 1, \ldots, 5$: temps previst de sortida i arribada, respectivament, dels cinc vols, en hores.
- Rutes dels vols: $R_1 = \{1, A, C, D, E, 4\}$, $R_2 = \{2, F, E, D, B, 3\}$, etc.
- l_v^j , $v = 1, 2, \ldots, 5$, $j = 2, \ldots, |R_v| - 1$: temps mínim, en hores, que triga el vol v en travessar el j-èssim sector de la seva ruta.
- $\underline{t}_{v,j}$, $v = 1, 2, \ldots, 5$, $j = 2, \ldots, |R_v| - 1$: el vol v no pot entrar al sector j-èssim de la seva ruta abans de l'instant $\underline{t}_{v,j}$, en hores.
- $\bar{t}_{v,j}$, $v = 1, 2, \ldots, 5$, $j = 2, \ldots, |R_v| - 1$: el vol v ha de sortir del sector j-èssim de la seva ruta no més tard de l'instant $\bar{t}_{v,j}$, en hores. Així doncs, $[\underline{t}_{v,j}, \bar{t}_{v,j}]$ determina un interval de temps dins el qual el vol v està obligat a passar pel sector j-èssim de la seva ruta.

L'objectiu de la planificació del trànsit aeri és determinar l'horari de cada vol de forma que, tot respectant les restriccions de pas pels sectors, es minimitzin els costos d'espera. Els costos d'espera es divideixen en costos d'espera a terra, que depenen del retard entre el temps de sortida previst i el temps real de sortida, i els costos d'espera a l'aire, que depenen de la diferència entre la durada prevista i real d'un vol. Les dades disponibles per a poder calcular aquests costos són:

- ct_v , $v = 1, 2, \ldots, 5$: cost d'espera a terra de cada vol, per unitat de temps (hores).
- ca_v , $v = 1, 2, \ldots, 5$: cost d'espera a l'aire de cada vol, per unitat de temps (hores).

a) Formuleu el problema de programació lineal que permet trobar l'horari de vols que minimitzi els costos totals d'espera del conjunt de vols tot respectant les condicions de pas per sectors.

b) Considereu que els vols *3*, *1* i *4* els fa el mateix avió, i que entre vol i vol es necessita 1h per acondicionar l'avió. Formuleu les noves constriccions que tenen en compte aquest fet.

c) Considereu ara que la capacitat dels aeroports està limitada, de forma que a l'aeroport k necessita s_k minuts per controlar un enlairament i a_k minuts per controlar un aterratge. Acceptem que el control dels enlairaments i aterratges és independent. Quines constriccions caldría afegir al model per incorporar aquest límit? Continuaría sent un problema de programació lineal?

27. Rico-AG.

Rico-AG és una companyia de fertilitzants Alemanya que acaba de rebre un contracte per a subministrar 10.000 tones de fertilitzant 3-12-12. Rico-AG ha de garantir que el fertilitzant conté, com a mínim, un 3% de nitrogen, un 12% de fòsfor i un 12% de potasi (en pes). El fertilitzant es pot mesclar a partir de qualsevol combinació de les matèries primeres que es mostren a la següent taula:

Materia primera	% Nitrogen	% Fòsfor	% Potasi	Preu per tona
AN	50	0	0	190DM
SP	1	40	5	180DM
CP	2	4	35	196DM
BG	1	15	17	215DM

Rico-AG manté un stock de 500 tones de SP que ha comprat prèviament a 220 DM/tona. A més, Rico-AG té un acord amb l'empresa Fledermausguano S.A. que li permet de comprar fertilitzant 3-12-12 ja preparat a un preu de 195/DM tona.

Formuleu un problema de programació matemàtica per a la companyia Rico-AG que li permeti decidir la quantitat de fertilitzant 3-12-12 que ha de comprar, mesclar, i com fer la mescla.

28. Problema de fluxos en xarxa de cost mínim

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{rl}
\min & 3x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{23} + x_{24} + 2x_{34} + 6x_{43} \\
\text{s.a.}: & x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 10 \\
& x_{23} + x_{24} - x_{12} = 0 \\
& x_{34} - x_{13} - x_{23} + x_{43} \leq -5 \\
& -x_{43} + x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 3 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j)
\end{array}
$$

a) Reformuleu-lo com a problema de fluxos en xarxes de cost mínim.
b) Representeu la xarxa associada al problema.

29. Problema de fluxos en xarxa de cost mínim*

Formuleu el següent problema de programació lineal com a problema de fluxos en xarxes de cost mínim :

$$
\begin{array}{llccccccc}
(P)\ \min & z= & \multicolumn{7}{l}{3x_{12} + 4x_{13} + 3x_{23} + 5x_{24} + x_{41} + 7x_{43}} \\
\text{s.a.:} & & x_{12} & + & x_{13} & - & x_{41} & = & 1 \\
& & -x_{12} & + & x_{23} & + & x_{24} & \geq & -3 \\
& & -x_{24} & + & x_{41} & + & x_{43} & = & 0 \\
& & -x_{13} & - & x_{23} & - & x_{43} & \geq & -4 \\
& & & & & & & & \\
& & x_{ij} \geq 0 & , & \forall (i,j) & & & &
\end{array}
$$

30. Equacions de xarxa*

Expresseu les següents constriccions en forma d'equacions de xarxa i representeu la xarxa associada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \leq \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$0 \leq x_i \leq 3 \quad i = 1, \ldots, 6$$

31. Models de fluxos en xarxes.

L'empresa Machineco disposa de quatre màquines per a realitzar quatre treballs. Cada màquina ha de ser assignada a un treball. El temps que necessita cada màquina per a completar cada treball s'indica a la següent taula:

	Trab.1	Trab.2	Trab.3	Trab.4
Maq.1	$14h$	$5h$	$8h$	$7h$
Maq.2	$2h$	$12h$	$6h$	$5h$
Maq.3	$7h$	$8h$	$3h$	$9h$
Maq.4	$2h$	$4h$	$6h$	$10h$

Machineco vol minimitzar el temps total necessari per a completar els quatre treballs. Formuleu el programa lineal que permet resoldre el problema plantejat. Representeu la xarxa associada a aquest problema. De quina mena de problema es tracta?

32. Models de fluxos en xarxes.

L'empresa Tasco fabrica telescopis a dues factories, una situada a Memphis i l'altre a Denver. La factoria de Memphis pot produir fins a 150 telescopis cada mes i la factoria de Denver fins a 200 telescopis mensuals. Els telescopis es traslladen per via aèria als consumidors de Los Angeles i Boston. El consum a cada ciutat és de 130 telescopis cada mes. Degut a les ofertes existents de tarifes reduides, Tasco pensa que pot ser més barat transportar primer alguns telescopis fent que passin per Nova York o Chicago (o ambdós) i enviar-los deprés al seu destí final. El cost d'enviar un telescopi es mostra a la següent taula:

	Memphis	Denver	N.Y.	Chicago	L.A.	Boston
Memphis	0\$	–	8\$	13\$	25\$	28\$
Denver	–	0\$	15\$	12\$	26\$	25\$
N.Y	–	–	0\$	6\$	16\$	17\$
Chicago	–	–	6\$	0\$	14\$	16\$
L.A.	–	–	–	–	0\$	–
Boston	–	–	–	–	–	0\$

Tasco vol minimitzar el cost de transport dels telescopis. Formuleu un problema de fluxos en xarxa que permeti resoldre el problema. Dibuixeu la xarxa associada a aquest problema. A quín tipus de problema de fluxos en xarxa correspon?

33. Models de fluxos en xarxes.

La companyia de aerolínies "Fly-By-Night" (FBN) ha de decidir quants vols diaris ha d'establir entre Juneau (Alaska) i Dallas (Texas). Els vols que surten de Juneau han de fer escala primer a Seattle i després a Los Angeles o Denver. Degut a la capacitat limitada de les pistes d'aterratge dels diferents aeroports FBN té limitat en nombre de vols diaris, segons s'indica a la següent taula:

	Vols
Juneau – Seattle	3
Seattle – L.A.	2
Seattle – Denver	3
L.A. – Dallas	1
Denver – Dallas	2

Formuleu un problema de fluxos en xarxes que maximitzi el nombre de vols de connexió diaris entre Juneau i Dallas. A quín tipus de problema de fluxos en xarxes correspon? Representeu la xarxa associada i trobeu una solució "by inspection" (a ull).

34. Models de fluxos en xarxes.

Una productora de Hollywood ha de seleccionar els protagonistes masculí i femení de cinc pel·licules. Disposa de cinc actors i cinc actrius però no saben com aparellar-los. Per tal de decidir-ho pregunta a cadascú d'ells amb quin actor del sexe contrari estaria disposat a actuar. La següent taula mostra el resultat de l'enquesta (S indica que ambdós actors estarien disposats a actuar junts) :

	Loni Anderson	Meryl Streep	Katharine Hepburn	Linda Evans	Victoria Principal
Kevin Costner	–	S	–	–	–
Burt Reynolds	S	–	–	–	–
Tom Selleck	S	S	–	–	–
Michael Douglas	S	S	–	–	S
Tom Cruise	–	–	S	S	S

Formuleu un problema de fluxos en xarxes que permeti maximitzar el nombre de parelles compatibles formades. Dibuixeu la xarxa associada. De quín tipus de problema de fluxos en xarxes es tracta?

35. Models de fluxos en xarxes.

Hem comprat un cotxe nou per 1.2 milions de pessetes. El cost de manteniment durant un cert any depén de l'edat del cotxe al principi de l'any, tal com indica la següent taula:

Edad (Anys)	Cost Manteniment	Preu Venda
0	200.000	–
1	400.000	700.000
2	500.000	600.000
3	900.000	200.000
4	1,200.000	100.000
5	–	0

Per a evitar els elevats costos de manteniment associats a un cotxe vell podem vendre el cotxe vell i comprar un de nou. El preu que ens pagarien pel cotxe vell depén de l'edat del cotxe en el moment de la venda, i està indicat a la taula anterior. Suposem que el preu que haurem de pagar pel cotxe nou, si decidim canviar de cotxe, és de 1.2 milions de pessetes, independentment de l'any en que es compri. Formuleu un problema de fluxos en xarxes que permeti minimitzar el cost net (preu de compra dels cotxes nous + el preu de manteniment - preu de venda dels cotxes vells) dels pròxims cinc anys. Representeu la xarxa associada. A quín tipus de problema de fluxos en xarxes correspon?

36. Models de fluxos en xarxes.

Actualment, el laboratori de càlcul de la Universitat de Namur pot emmagatzemar 200 fitxers en disc dur, 100 fitxers en memoria i 300 fitxers en cinta. Els usuaris d'aquesta universitat han d'emmagatzemar 300 fitxers de text, 100 fitxers executables i 100 fitxers de dades. Cada fitxer de text és llegit pel conjunt total d'usuaris 8 vegades al mes en promig, un fitxer executable 4 vegades i un fitxer de dades 2 vegades. Considerem que el temps de lectura d'un fitxer depèn només del tipus de fitxer i del mitjà d'emmagatzemament, tal com indica a la següent taula:

Temps de lectura (minuts)

	Text	Exec.	Dades
Disc	5	4	4
Memòria	2	1	1
Cinta	10	8	6

L'objectiu del laboratori de càlcul és averiguar quina és la distribució de fitxers que minimitza els temps gastat al mes, en promig, pel conjunt total d'usuaris de la universitat en la lectura dels seus fitxers. Formuleu un problema de fluxos en xarxes que es pugui usar per determinar on guardar cada fitxer. Representeu la xarxa associada a aquest problema. Quín tipus de problema de fluxos en xarxes és?

37. Models de programació lineal entera.

Un fabricant pot vendre un cert producte A amb un benefici unitari de 200pts, i un producte B amb un benefici unitari de 500pts. La fabricació d'una unitat de producte A requereix de tres unitats de matèria primera, i la fabricació d'una unitat de producte B necessita sis unitats de matèria primera. La quantitat total de matèria primera disponible és de 12 unitats. El cost fix per fabricació de producte A és de 1000pts, i el cost fix per fabricació del producte B és de 2000pts. Formuleu un programa lineal enter que permeti maximitzar els beneficis.

38. Models de programació lineal entera.

Degut a l'excessiva contaminació del riu Miskatonic, l'estat de Arkham planeja construir algunes estacions de control de polució. Es pren en consideració tres possibles ubicacions (1, 2 i 3). El municipi d'Arkham està interessat en el control del nivell de dos agents contaminants (A i B). La legislació estatal imposa que, com a mínim, siguin eliminades del riu 80000 tones d'agent contaminant A, i un mínim de 50000 tones de l'agent B. Les dades que disposa l'ajuntament es troben recollides a la següent taula:

	Cost de construcció	Coste de trat. 1Tm aigua	Quantitat eliminada per Tm d'aigua tractada. Agent A	Agent B
Situació 1	10 mill.	2000 pts.	0.40Tm	0.30Tm
Situació 2	6 mill.	3000 pts.	0.25Tm	0.20Tm
Situació 3	4 mill.	4000 pts.	0.20Tm	0.25Tm

Formuleu un problema de programació lineal entera que permeti satisfer la legislació vigent amb un cost mínim.

39. Models de programació lineal entera.

A l'especialitat d'Investigació Operativa de la futura Llicenciatura d'Estadística de la UPC, els estudiants hauran de completar, com a mínim, dos cursos de matemàtiques, dos cursos de programació i dos cursos d'Investigació Operativa. Algunes assignatures poden ser usades per a completar més d'una matèria, tal com s'indica a continuació:

- Càlcul : matemàtiques.
- I.O. : matemàtiques y I.O.
- Estructures de Dades : programació i matemàtiques.
- Estadística : matemàtiques i I.O.
- Simulació : I.O. i programació.
- Programació : programació.
- Optimizació : I.O. i matemàtiques.

Formuleu un problema de programació lineal entera que minimitzi el nombre d'assignatures necessàries per a obtenir l'especialitat.

40. Models de programació lineal entera.

Una empresa està considerant la possibilitat d'obrir magatzems a quatre ciutats : Nova York, Los Angeles, Chicago i Atlanta. Cada magatzem té una capacitat de 100 unitats. El cost fix setmanal de mantenir cada magatzem obert és de 40000pts per a N.Y., 50000pts per a L.A., 30000pts per a Chicago i 15000pts per a Atlanta. La regió 1 del país necessita 80 unitats setmanals de producte, la regió 2 70 unitats i la regió 3 40 unitats. El cost unitari c_{ij} (que inclou la producció i el transport) de distribució desde el magatzem de la ciutat i fins a la regió

j és:

	Reg. 1	Reg. 2	Reg. 3
N.Y.	2000	4000	5000
L.A.	4800	1500	2600
Chicago	2600	3500	1800
Atlanta	2400	5000	3500

Formuleu un problema de programació entera que pugui ser usat per a satisfer la demanda tot minimitzant els costos setmanals.

41. Models de programació lineal entera.

El tècnic de sistemes del Laboratori de Càlcul de la FME vol accedir a cinc fitxers diferents. Hi ha còpia d'aquests fitxers a diverses cintes de backup tal com mostra la següent taula:

	CINTES									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fitxer 1	x	x		x	x			x	x	x
Fitxer 2	x		x							
Fitxer 3		x			x		x			x
Fitxer 4			x			x		x		
Fitxer 5	x	x		x		x	x		x	x
Tamany (Mb)	30	50	10	20	10	40	30	10	20	20

Per tal de recuperar els fitxers primer s'ha de fer un volcat de les cintes a disc dur. Aquest volcat ha de ser de la cinta completa, no podent-se copiar només una part de la cinta. Formuleu un problema de programació lineal entera que determini el conjunt de cintes a volcar de forma que s'ocupi el mínim espai en disc i es poguin recuperar tots els fitxers.

1.2 Models de programació no lineal.

42. Planificació simple d'un reactor *

Un determinat producte químic és fabricat mitjançant un reactor que opera a través d'una producció per lots (batch). El temps requerit pel reactor per finalitzar cada un dels lots depèn de la quantitat de producte processada, i bé regit per la relació $t = 2P^{0.4}$, on t s'expressa en hores i P representa el total de producte en kg. Després de finalitzar un lot, cal tenir aturat el reactor unes 14 hores per fer les tasques de descàrrega, manteniment i nova càrrega. S'ha estimat que cada hora de funcionament del reactor té un cost de 6000 pts. També hi ha uns costos fixes (que inclouen l'emmagatzemament de la càrrega del reactor per al següent lot) de $100000P^{0.8}$ pts l'any (per tant, els costos fixes depenen del producte processat pel reactor). Sabent que el total de producte a obtenir en un any és de 150000 kg, i que el reactor pot estar en funcionament 24 hores al dia durant 320 dies l'any, es demana formular el problema per trobar la quantitat P que satisfà la demanda anual i minimitza els costos de producció. Plantegeu el problema només en funció de P.

43. Balanç de masses *

Tenim un procés alimentat amb dos productes d'entrada A i B que donen lloc a un producte de sortida C. El procés es modelitza mitjançant l'equació $M_A + M_B = M_C$ (balanç de masses). Les masses dels fluxos dels productes B i C poden ser determinats mitjançant uns sensors. Per determinar la massa del flux de A, però, no disposem de cap sensor (ens hem volgut estalviar la seva instal·lació), i volem determinar-lo a partir dels valors mesurats per B i C en n instants de temps diferents $M_{B_i}, M_{C_i}, i = 1, ..., n$. Com obtindríem el millor valor de M_A? (entenent per millor, aquell que ens minimitza els errors totals en les n mesures segons l'equació del procés).

44. Inversió d'un capital *

Una planta química ha de fer una inversió per adquisició i renovació de material valorada en 100 milions, per la qual cosa haurà de demanar un préstec a un banc. Les condicions del banc són que el préstec es pot amortitzar (s'han de tornar els diners deixats amb els interessos corresponents) en n anys, on n és enter i varia entre 10 i 20 anys, i el tipus d'interès depèn dels anys d'amortització i ve donat segons una fórmula $r(n)$. La companyia química tornarà el préstec en pagaments anuals p durant els n anys d'amortització, de forma que es trobi entre uns límits de $p_{min} \leq p \leq p_{max}$. L'empresa vol maximitzar els beneficis que obtindrà gràcies a la inversió en nou material, els quals avalua segons una fórmula $b(p, n)$, funció dels pagaments anuals i els anys d'amortització. Formuleu el problema de maximització deixant com a única incògnita els anys d'amortització del préstec n (cal escriure, doncs, els pagaments anuals p en funció de n).

45. Aïllament tèrmic *

Una companyia vol recobrir una canonada cilíndrica que transporta un fluid calent amb un aïllant tèrmic. Se sap que la pèrdua de calor Q del fluid transportat per la canonada es regeix per la següent equació:

$$Q = \frac{A\Delta T}{x/k + 1/h_c}$$

on

$$\begin{aligned}
A &= \text{Àrea de la canonada (m}^2\text{)} \\
\Delta T &= \text{diferència de temperatura promig entre el fluid i l'exterior de la canonada (°C)} \\
x &= \text{gruix de l'aïllant tèrmic (m)} \\
h_c &= \text{coeficient de transferència de calor (Btu/(h· m}^2\text{·°C))} \\
k &= \text{conductivitat tèrmica de l'aïllant (Btu /(h· m·°C))} \\
Q &= \text{calor perdut (Btu/h)}
\end{aligned}$$

El cost d'instal·lació de l'aïllant és de $c_0 + c_1 x$ pts/m^2, on c_0 i c_1 són valors coneguts. D'igual forma, sabem que els guanys que suposarà a l'empresa l'aïllant són de G pts/Btu (cada Btu no perdut li suposa un guany de G pts). A més, la canonada es troba transportant el fluid durant H hores cada any.

El temps de vida de l'aïllant és de 5 anys. La companyia demanarà un préstec a un banc per realitzar la seva instal·lació, préstec que serà amortitzat durant els 5 anys següents. El tipus d'interès que li carregarà el banc és del r%.

Es demana formular el problema per calcular el valor òptim de x (gruix de l'aïllant) per tal de maximitzar els guanys de la companyia durant cada un dels cinc anys de vida de l'aïllant. (Nota: per saber el que ha de pagar al banc cada any per amortitzar el préstec, podeu usar el mètode aplicat al problema 44).

46. Composició d'un pinso per animals *

Disposem d'una sèrie d'ingredients que volem mesclar per fabricar un pinso per animals. Aquests ingredients els podem classificar en dos tipus. Els del primer tipus es troben disponibles en quantitats contínues (podem agafar la quantitat —en kg— necessària). En tenim 10 d'aquests ingredients. Dels del segon tipus, però, no podem decidir la quantitat que en volem, ja que els tenim empaquetats i si obrim el paquet ens veiem obligats a usar-lo tot. Per tant l'únic que podem fer es dir si intervindran o no a la mescla. D'aquest segon tipus tenim 5 ingredients, i cada paquet té un pes de p_i $i = 1, ..., 5$ kg.

Sabem que el cost per kg per a cada un dels 10 ingredients del primer tipus és de c_i^1 $i = 1, ..., 10$ pts, mentre que el cost d'incloure o no a la mescla cada un dels 5 ingredients del segon tipus ens suposa un cost de c_i^2 $i = 1, ..., 5$ pts. També sabem que la proporció de greixos a cada ingredient és de a_i^1 $i = 1, ..., 10$ per als del primer tipus, i de a_i^2 $i = 1, ..., 5$ per als del segon tipus.

Sen's demana que determinem la composició de la mescla, de forma que obtinguem una quantitat de pinso entre P_l i P_u kg (on $P_l < P_u$), tot satisfent que la quantitat total de greix al pinso fabricat es trobi entre G_l i G_u kg (on $G_l < G_u$). Quin problema hauríem de formular?

2 Problemes de programació lineal.

2.1 Resolució gràfica.

47. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal **(PL)**:

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\min & z = c'x \\
\text{s.a.:} & \\
& -x_1 + 3x_2 \leq \ 6 \\
& x_1 + x_2 \geq \ 1 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 10 \\
& x \geq 0
\end{cases}
$$

a) Trobeu gràficament la solució de **(PL)** per $c' = [-3 \quad 1]$. Classifiqueu el problema.
b) Trobeu gràficament la solució de **(PL)** per $c' = [-2 \quad 1]$. Classifiqueu el problema.
c) Trobeu el valor del terme independent de la segona constricció a partir del qual **(PL)** seria infactible.

48. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal **(PL)**:

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\min & z = c_1x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 4 \\
& 3x_1 - x_2 \geq 1 \\
& x \geq 0
\end{cases}
$$

Trobeu gràficament la solució del problema **(PL)** per als diferentes valors possibles de c_1.

49. Solució de problemes pel mètode gràfic †

Determinar de forma gràfica la solució dels següents problemes de programació lineal:

$$
a)\quad \begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - 4x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\
& 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad
b)\quad \begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - 2x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\
& 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
c)\quad \begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
& 3x_1 + x_2 = 3 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad
d)\quad \begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 + x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure}
\end{aligned}
$$

$$
e)\quad \begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure}
\end{aligned}
\qquad
f)\quad \begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& 0 \leq x_1 \leq 3/2 \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

50. El coeficient de la funció objectiu *

Determineu per a quin rang de valors del coeficient p té un únic punt òptim, té òptims alternatius, o es il·limitat el següent problema:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & px_1 - x_2 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& x_1 - x_2 \geq -1 \\
& x_1 - x_2 \leq 1 \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Feu el mateix estudi que abans considerant ara la funció objectiu $px_1 + x_2$.

51. Minimització d'una folga *

Solucioneu de forma gràfica el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{ll} \max & x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{array}$$

I si la funció objectiu fos $\max x_4$?

2.2 Transformació a la forma estàndar.

52. Transformació a la forma estàndar*.

Transformeu el següent problema lineal a la forma estàndar:

$$\textbf{(PL)} \left\{ \begin{array}{lr} \max & z = 6x_1 - 5x_2 + 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 - 3x_2 = -5 \\ & 6 \leq x_1 + x_2 - 5x_4 \leq \; 7 \\ & \dfrac{3x_1 + 7x_2}{3x_3} \geq \; 4 \\ & x_1 \text{ lliure }, \; x_2 \geq 0 \; , \; x_3 \leq 0 \end{array} \right.$$

53. Transformació a la forma estàndard *

Transformeu a la forma estàndard el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{lllllll} \max\limits_{x_1,x_2,x_3} & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & & & & \\ \text{subj. a} & & & & & & \\ & 4 & \leq & 2x_1 & +x_2 & + \; x_3 & \leq & 20 \\ & & & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 3 \quad x_3 \text{ lliure} & & & & & \end{array}$$

54. Més problemes de transformació a la forma estàndard

Transformeu a la forma estàndard els següents problema de programació lineal (i si és possible, intenteu-los simplificar eliminant variables i/o restriccions).

a)
$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,x_2} & -x_1+2x_2\\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrcl} 2x_1 & +x_2 & \geq & 4\\ 3x_1 & & \geq & 6\end{array}\\ & x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,x_2} & -x_1-2x_2\\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{cccccc} 2 & \leq & 2x_1 & +3x_2 & \leq & 4\\ 5 & \leq & 4x_1 & +6x_2 & \leq & 6\end{array}\\ & x_1\geq 0 \quad x_2\leq 4\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1+2x_2-x_3\\ \text{subj. a} & \\ & \dfrac{2x_1+x_2-2x_3}{x_3}\geq 10\\ & 3x_1+3x_3=6\\ & x_1+x_4>=10\\ & x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0 \quad x_3 \text{ lliure}\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,x_2} & x_1-2x_2\\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrcl} 3x_1 & +2x_2 & \leq & 5\\ 2x_1 & -\ x_2 & \geq & 10\end{array}\\ & -5\leq x_1\leq 5\\ & -10\leq x_2\leq 10\end{array}$$

55. Un problema de programació lineal "disfressat" *

Formular com a problema de programació lineal (i simplificar-lo tot el possible):

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \ln x_1\\ \text{subj. a} & \\ & x_1x_2x_3\geq e^5\\ & \dfrac{x_1}{x_2}=x_3\\ & 0<x_1\leq e^2 \quad x_2\geq e^4 \quad x_3>0\end{array}$$

Per què creus que els límits de les variables x_1 i x_3 s'han definit com $x_1 > 0$ i $x_3 > 0$, en comptes de $x_1 \geq 0$ i $x_3 \geq 0$?

56. Valor absolut a les restriccions *

Escriure com a problema de programació lineal:

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1+3x_2+2x_3\\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrcl} x_1 & +4x_2 & +x_3 & \geq & 5\\ |3x_1 & -2x_2| & & \leq & 3\end{array}\\ & x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0 \quad x_3\geq 0\end{array}$$

Podríem tranformar-lo en un problema de programació lineal si la segona restricció fos $|3x_1 + 2x_2| \geq 3$?

57. Valor absolut a la funció objectiu*

Formular com a problema de programació lineal

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x} & c^T|x| \\ \text{subj. a} & Ax = b \end{array}$$

sabent que totes les components c_i del vector de costos c verifiquen $c_i \geq 0$. (Nota: aquest problema és d'una certa dificultat).

58. Funció objectiu igual al màxim d'una sèrie de valors *

Una companyia vol minimitzar els costos de producció en una determinada planta. Té perfectament determinades les restriccions del problema, i sap que la funció objectiu és lineal. Ha encarregat a tres enginyers de la planta que determinin el vector de costos de la funció objectiu, i ha observat que tots ells han proporcionat tres vectors c_A, c_B i c_C semblants, però no iguals. Per curar-se en salut, la companyia decideix optimitzar el següent problema:

$$\begin{array}{rl} \min & \max\{c_A^T x, c_B^T x, c_C^T x\} \\ \text{subj. a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

D'aquesta forma, donat un punt x qualsevol, el seu valor de funció objectiu serà el que té un cost més elevat segons les estimacions del vector de costos dels tres enginyers.

La companyia, però, només disposa d'eines informàtiques per solucionar problemes de programació lineal. Aleshores, pot solucionar el problema anterior amb els paquets de programació lineal que té? Com hauria de transformar el problema?

59. Transformació en restriccions de desigualtat *

Sovint interessa considerar la regió factible d'un problema de programació lineal com el conjunt de punt formats per la intersecció d'un nombre finit de semiespais tancats, és a dir, com el conjunt de punts definit per $\{a_1^T x \leq b_1, \ldots, a_m^T x \leq b_m\}$. No sempre, però, trobem la nostra regió factible expressada de la forma anterior, ja que podem tenir restriccions d'igualtat i de $\geq$. Penseu com es pot transformar el problema

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & a_1^T x = b_1 \\ & a_2^T x \geq b_2 \\ & a_3^T x \leq b_3 \end{array}$$

en un d'equivalent de forma que totes les restriccions siguin de $\leq$. Feu-ho sense afegir variables artificials.

2.3 Solucions bàsiques.

60. Solucions bàsiques*

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \min \quad z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu totes les soluciones bàsiques factibles de **(PL)**.
b) Trobeu totes les solucions bàsiques no factibles de **(PL)**.

61. Solucions bàsiques*

Trobeu totes les solucions bàsiques factibles dels següents problemes:

a)

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \min \quad z = 5x_1 - x_2 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad 2x_1 + x_2 = 6 \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \min \quad z = -4x_1 + x_2 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ \qquad -x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

2.4 Algorisme del símplex.

62. Fase I*

Considereu un cert problema d'optimització amb una regió factible definida per les constriccions :

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3/2x_2 & \leq & 12 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Calculeu, si existeix, una solució factible d'aquest problema.

63. Simplex primal en forma matricial i fase I*

Sigui el problema **(PL)** següent:

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\max\limits_{x\in\mathbb{R}^2} & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& 2x_1 + x_2 \le 3 \\
& x_1 + x_2 \le 2 \\
& x \ge 0
\end{cases}
$$

a) Resoleu **(PL)** aplicant l'algorisme del símplex primal en forma matricial a partir de la base incial factible $\mathcal{B}^0 = \{1, 2\}$.

b) Considereu el problema $\widetilde{\textbf{(PL)}}$ que s'obté a partir de **(PL)** substituint la desigualtat "$\le$" de la primera constricció per "$\ge$". Calculeu una base inicial factible de $\widetilde{\textbf{(PL)}}$ aplicant la fase I del símplex primal en forma tabular.

64. Simplex primal en forma matricial*

Resoleu el següent problema amb l'algorisme del simplex primal en forma matricial:

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\max & \text{z} = & 4x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{subj.a :} & & \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & \le & 1125 \\
& & x_1 & & & & & \le & 1000 \\
& & & & x_2 & & & \le & 500 \\
& & & & & & x_3 & \le & 1500 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \ge & 0
\end{cases}
$$

65. Aplicació del símplex en forma matricial *

En un problema de 4 variables (totes elles afitades inferiorment per 0) i 3 restriccions d'igualtat sabem que la base òptima ve donada per la matriu:

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

corresponent a les tres primeres variables, i que els costos de les variables bàsiques són de $c_B^T = (1 \quad 1 \quad 1)$, i el vector de termes independents és $b^T = (5 \quad 4 \quad 4)$.

Es demana:

a) Calculeu la solució òptima del problema.

b) Calculeu la solució òptima del problema dual.

c) Determineu el rang de valors que pot tenir el cost c_4 de la quarta variable per garantir que realment sigui una variable no bàsica, considerant que la columna de la quarta variable és

$A_4^T = (\,1 \quad 0 \quad 1\,)^T$.

d) Suposem que s'introdueix una perturbació en el vector de termes independentes de forma que el nou vector és $\tilde{b}^T = (\,6 \quad 4 \quad 4\,)$. Continua essent òptima la base que ara tenim? En cas afirmatiu, comproveu que l'augment del valor de la funció objectiu en modificar el vector de termes independents correspon al producte de la perturbació del terme de la dreta per la solució òptima dual. Comproveu com aquest efecte també es verifica si considerem el vector de termes independents $\hat{b}^T = (\,7 \quad 4 \quad 4\,)$ (en general es verifica sempres aquest efecte).

66. Aplicació del símplex en forma matricial

Resoleu el següent problema amb l'algorisme del simplex primal en forma matricial:

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \max \quad z = & 45x_1 + 80x_2 \\ \\ \text{s.a}: & x_1 + 4x_2 \leq 80 \\ & -\ 2x_1 - 3x_2 \geq -90 \\ \\ & x_1 \ ,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

67. Aplicació del mètode del símplex *

Solucioneu aplicant el mètode del símplex el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{lllllll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3,x_4} & x_1 - x_3 + x_4 \\ \text{subj. a} \\ & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & 6 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 5 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{array}$$

68. Un altre problema per aplicar el mètode del símplex *

Solucioneu aplicant el mètode del símplex el problema:

$$\begin{array}{lllllll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3,x_4} & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{subj. a} \\ & x_1 & +x_2 & & & \leq & 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 5 \\ & x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = & 3 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{array}$$

69. Més problemes per practicar amb el mètode del símplex †

Solucioneu aplicant el mètode del símplex els següents problemes de programació lineal.

a)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_3 - x_4 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & 4 \geq x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

70. Tableau parametritzat.

Considereu un problema de programació lineal **(PL)** i la base $\mathcal{B}$ associada a una certa solució bàsica. El tableau en forma canònica associat a $\mathcal{B}$ és:

$$T = \begin{array}{|ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1 & 15 \\ \hline 0 & 0 & a & 0 & 0 & -40 \end{array}$$

Indiqueu el rang de valors dels paràmetres a, b, c i d pels que les següents afirmacións són certes:

a) La base $\mathcal{B}$ és la única solució òptima de **(PL)**.
b) La base $\mathcal{B}$ és solució òptima de **(PL)**, però no única.
c) La base $\mathcal{B}$ és degenerada.
d) La base $\mathcal{B}$ és factible primal no degenerada, però la base $\tilde{\mathcal{B}}$ obtinguda en entrar x_3 a la base és degenerada.
e) El tableau T permet assegurar que el problema **(PL)** és il·limitat.
f) El tableau T permet assegurar el problema **(PL)** és infactible.

En cada cas heu d'indicar el rang de valors de **tots** quatre paràmetres.

2.5 Anàlisi post-òptima.

71. Anàlisi de solucions *

Certa indústria fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es consumeixen dos tipus de recursos, R1 i R2. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una demanda D no inferior a 15 unitats. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 milions de pessetes. El problema lineal **(PL)** que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

$$\textbf{(PL)} \left\{ \begin{array}{llcccccccl} \min & z = & 10x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\ & & & & & & & & & \\ \text{subj.a :} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 20 & \text{R1} \\ & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 & \text{R2} \\ & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 15 & \text{D} \\ & & & & & & & & & \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 & \end{array} \right.$$

a) Sense realitzar cap iteració del mètode del simplex, comproveu que la producció óptima correspón a la base $\mathcal{B} = \{2, 3, 5\}$, sent x_5 la folga de la restricció R2. La inversa de la base és:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Formuleu el dual de **(PL)**. Calculeu el valor de les variables duals i comproveu que el seu signe coincideix amb el que apareix en la formulació del problema dual.

c) Suposseu que, per problemas econòmics, hem de reduir les despesses de fabricació en 10 milions de pessetes. Si la disponibilitat dels recursos no pot ser modificada, Quína repercussió té aquesta mesura en la demanda que podem satisfer?

d) Quant hauria de disminuir el cost de fabricació del producte A per tal que fos convenient la seva producció?.

e) Formuleu el tableau òptim de **(PL)** sense realitzar cap iteració del simplex.

72. Anàlisi de solucions *

Una certa industria fabrica els productes A, B, C i D. En la fabricació d'aquests tres productes es consumeixen tres tipus de recursos, R1, R2 i R3. El benefici unitari dels productes A, B, C i D és, respectivament, de 200, 400, 100 i 100 pessetes. El problema lineal **(PL)** que permet calcular les quantitats òptimes dels productes A (x_1) B (x_2), C (x_3) i D (x_4) que maximitzen els beneficis és:

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \min \quad z = -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 & \\ \text{subj.a}: \quad x_1 + 3x_2 + x_4 \le 8 & \text{R1} \\ \qquad 2x_1 + x_2 \le 6 & \text{R2} \\ \qquad x_2 + 4x_3 + x_4 \le 6 & \text{R3} \\ \qquad x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ \ x_4 \ge 0 & \end{cases}$$

La base òptima d'aquest problema és $\mathcal{B}^* = \{1,3,2\}$, i la inversa de la matriu bàsica és:

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Enuncieu el teorema de la folga complementària. Useu aquest teorema per a demostrar la optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$.

b) Considereu un nou problema lineal $\widehat{\textbf{(PL)}}$ exactament igual al problema **(PL)** pero amb totes les constriccions formulades com a constriccions d'igualtat. Formuleu (sense resoldre) el problema artificial $(\widehat{\textbf{PL}_a})$ que permet obtenir una solució bàsica factible inicial de $\widehat{\textbf{(PL)}}$. Construïu-ne el tableau del simplex inicial de $(\widehat{\textbf{PL}_a})$

c) Dins de quin marge de valors de b_2 (disponibilitat del recurs R2) continua sent òptima la base $\mathcal{B}^*$ de **(PL)**? Quina és la solució òptima si $b_2 = 20$.

d) L'empresa es planteja la possibilitat de produir un nou producte E, que associarem a la variable x_8. El benefici unitari per venda d'aquest producte és de 800ptas. El consum de recursos per unitat de producte produït depén d'un cert paràmetre θ i ve donat pel vector $a_8 = [\,10 - 2\theta \quad 20 - \theta \quad 1 - 5\theta\,]'$. A partir de quin valor del paràmetre θ interessa produir E?

73. Anàlisi de solucions *

En el problema de programació lineal:

$$
(\mathbf{PL})\left\{\begin{array}{lllllllllll}
\min & z = & 2x_1 & + & c_2x_2 & + & 4x_3 & + & c_4x_4 & & \\
\text{subj.a :} & & x_1 & - & 2x_2 & & & & & \leq & 9 \\
& & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & \leq & 2 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & & x_4 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

el valor a l'òptim de les variables és $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 4$, $x_4^* = 0$.

a) Quines variables formen part de la solució bàsica òptima de **(PL)**, i quin és el seu valor?

b) Quins valors poden tenir c_2 i c_4 per tal que la solució indicada sigui òptima?

c) Si a les constriccions i funció objectiu hi hagués una nova variable x_5 de cost $c_5 = 3$ i amb una columna de coeficients $a_5 = [8 \quad 0 \quad 1]'$, determineu si aquesta variable seria bàsica a l'òptim del nou problema plantejat.

74. Anàlisi de solucions

En el problema de programació lineal:

$$
(\mathbf{PL})\left\{\begin{array}{llllllllll}
\min & z = & -4x_1 & +x_2 & +30x_3 & -11x_4 & -2x_5 & +3x_6 & & \\
\text{subj.a :} & & -2x_1 & & +6x_3 & +2x_4 & & -3x_6 & +x_7 & = 20 \\
& & -4x_1 & +x_2 & +7x_3 & +x_4 & & -x_6 & & = 10 \\
& & & & -5x_3 & +3x_4 & +x_5 & -x_6 & & = 60 \\
& & x_1 & ,x_2 & ,x_3 & ,x_4 & ,x_5 & ,x_6 & ,x_7 & \geq 0
\end{array}\right.
$$

el tableau òptim és:

$$
T^* = \begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\hline
1 & -7/24 & -7/4 & 0 & 1/24 & 0 & 1/12 & 5/4 \\
0 & 1/12 & -5/2 & 1 & 5/12 & 0 & -1/6 & 45/2 \\
0 & 1/4 & -5/2 & 0 & 1/4 & 1 & -1/2 & 15/2 \\
\hline
0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 230
\end{array}
$$

Suposeu que b_1 disminueix en 2 unitats i b_2 incrementa el seu valor en 4 unitats. Trobeu la nova solució òptima, aprofitant al màxim la informació continguda a T^* (B^{*-1}, x_B^*, etc...).

75. Carbons d'Espanya S.A.*

Certes centrals tèrmiques de producció d'energia elèctrica usen com a combustible una mescla pulveritzada de diferents classes de carbons. L'empresa Carbons d'Espanya S.A. (CESA) es dedica a la producció de carbons mesclats a partir de quatre tipus de carbons bàsics, *Lignit* , *Hulla* , *Antracita* i *Torba* . Les característiques principals d'aquests carbons són el *contingut en sofre* , mesurat en tant per cent de la massa, i la *capacitat energètica* , mesurada en quilotèrmies per tona de carbó. Les característiques dels quatre carbons bàsics, i el seu preu s'indiquen a la següent taula :

Tipus de Carbó	**Contingut Sofre (%)**	**Capacitat energètica (Kth/Tm)**	**Preu compra (10^4pts/Tm)**
Lignit	2.0	4.0	25
Hulla	3.0	2.0	30
Antracita	0.5	0.8	20
Torba	7.5	0.5	10

(Característiques dels carbons bàsics)

Les característiques exigides al carbó de mescla depèn de les normatives de cada estat. Per a la Comunitat Econòmica Europea (CEE), Estats Units (EUA), i Japó són les següents :

Estat	**Contingut Sofre (%)**	**Capacitat energètica (Kth/Tm)**
CEE	≤ 1.5	≥ 2.0
EUA	≤ 1.1	≥ 1.5
Japó	≤ 2.0	≥ 2.5

(Normatives estatals del carbó de mescla)

El mercat de CESA es restringeix de moment a la CEE. EL programa lineal plantejat pel departament d'Investigació Operativa d'aquesta empresa per trobar la proporció de mescla òptima és :

$$
\textbf{(PL)}\left\{
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\min & z = & 25x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & + & 10x_4 & & \\
& & & & & & & & & & \\
\text{subj.a :} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 0.5x_3 & + & 7.5x_4 & \leq & 1.5 \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 0.8x_3 & + & 0.5x_4 & \geq & 2 \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
& & & & & & & & & & \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

a) Actualment, les proporcions de mescla que CESA fa servir són : $x_1 = 0.290323$, $x_2 = 0.225806$, $x_3 = 0.483871$, $x_4 = 0$. Demostreu als responsables de producció que aquesta no és la millor proporció possible. La inversa de la base $\mathcal{B} = \{3, 1, 2\}$ és:

$$
B^{-1} = \begin{bmatrix} -032258 & -0.16129 & 1.29032 \\ -0.1935 & 0.40322 & -0.22580 \\ 0.5161 & -0.24193 & -0.06451 \end{bmatrix}
$$

b) Usant un paquet de programació lineal heu resolt el problema **(PL)**. obtenint el següent tableau òptim :

$$
T^* = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\hline
 & 0 & 0.328 & 1 & 0 & -0.153 & 0.241 & 0.558 \\
 & 1 & 0.400 & 0 & 0 & 0.013 & -0.306 & 0.381 \\
 & 0 & 0.271 & 0 & 1 & 0.140 & 0.066 & 0.061 \\
\hline
 & 0 & 10.711 & 0 & 0 & 1.335 & 2.188 & -21.291
\end{array}
$$

sent la inversa de la base òptima $B^{*-1} = \begin{bmatrix} -0.15317 & -0.24070 & 1.26914 \\ 0.01312 & 0.30634 & -0.25164 \\ 0.14004 & -0.06564 & -0.01750 \end{bmatrix}$

A partir de la solució de l'apartat a) arribeu a aquesta solució iterant amb l'algorisme del símplex.

c) Cenyint-nos a la producció per a la CEE, si CESA tingués l'opció de comprar a 150000 pts/Tm un nou tipus de carbó bàsic amb un 1% de contingut en sofre i 1Kth/Tm, interessaria canviar la proporció de mescla òptima corresponent a T^* per incloure aquest nou carbó? Justifiqueu la resposta.

d) CESA vol ampliar el seu mercat i es planteja exportar als EUA i al Japó, acomodant les característiques del carbó de mescla a la legislació d'aquest estats. Tots dos països pagarien a CESA el mateix preu per tona de carbó de mescla. Si, per raons d'estratègia internacional, només es vol exportar a un d'aquests dos països, a quín dels dos països hauria d'exportar CESA? Justifiqueu la resposta.

76. Industrial de Formatges S.A.*

Industrial de Formatges S.A. (IFSA) és una empresa que es dedica a elaborar tres tipus de formatge utillitzant llet de cabra i d'ovella. Per al pròxim mes es disposa de 850 litres de llet de cabra i de 900 de llet d'ovella. Els coeficients tecnològics i els costos s'indiquen a la següent taula:

		Formatge 1 (x_1)		Formatge 2 (x_2)		Formatge 3 (x_3)	
		Quant.	Cost	Quant.	Cost	Quant.	Cost
	Pts./litre	(l./formatge)	(Pts)	(l./formatge)	(Pts)	(l./formatge)	(Pts)
Llet cabra	20	5	100	2	40	1	20
Llet ovella	10	1	10	2	20	4	40
Altres costos			50		50		100
Total costos unit.			160		110		160
Preu venda unit.			190		170		180
Benefici unitari			30		60		20

A més, per a garantir els llocs de treball que té l'empresa, la direcció ha decidit que, com a mínim, s'han d'elaborar un total de 400 formatges. El programa lineal que permet calcular la producció òptima és:

$$
\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = -30x_1 - 60x_2 - 20x_3 \\ \text{subj.a}: \quad 5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 850 \\ \qquad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 900 \\ \qquad x_1 + x_2 + x_3 \ge 400 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

La resolució de **(PL)** proporciona la planificació de producció òptima que es dedueix de la següent taula:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3/2	0	-1/2	1/2	0	1	25
-4	0	3	-1	1	0	50
5/2	1	1/2	1/2	0	0	425
120	0	10	30	0	0	25500

a) Ens ofereixen la possibilitat de comprar llet de cabra per sobre dels 850l inicials a 60 pts/litre. Estariem disposats a comprar? Quin és el preu màxim que estariem disposats a pagar per un litre addicional de llet de cabra?
b) Es modificaria d'alguna forma la planificació de la producció si no es tingués en compte la tercera constricció? Raoneu la vostra resposta.
c) Si el preu de venda del formatge 1 passes a ser de 320pts, quina seria la nova planificació de producció òptima?
d) Sota quina circumstància es podria obtenir una planificació òptima on es produissin conjuntament el formatge de tipus 2 i el de tipus 3 sense que es modifiquès el benefici total de la solució actual?

77. Companyia petrolífera ASPEC.*

Una companyia petrolífera ASPEC ha de determinar la producció òptima diaria, en dm^3/dia, de petroli cru (x_1), fuel de qüalitat baixa (x_2) i fuel de qüalitat alta (x_3). Per a obtenir els valors òptims de x_1, x_2 i x_3, el departament d'Investigació Operativa d'ASPEC ha formulat i definit dins del programa LINDO el següent programa lineal:

```
MIN   - 0.5 X1 - 2.5 X2 - 3 X3
SUBJECT TO
    REF.)        0.75 X2 +     X3 <=   9
    EMB.)             X2 + 1.5 X3 <=   20
    DEM.)   X1 +      X2 +     X3 =    10
END
```

on `REF.` té en compte la capacitat màxima diària de la planta de refinat de la companyia, en hores/dia, `EMB.` indica la capacitat, també en hores/dia, de la planta d'embassat dels productes. Finalment, `DEM.` indica la demanda diaria conjunta dels tres productes. El valor de la funció objectiu representa els beneficis diaris de ASPEC, canviats de signe, en milions de pts.

La solució que proporciona LINDO a aquest problema és:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)    -28.000000
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1          .000000          .500000
       X2         4.000000          .000000
       X3         6.000000          .000000
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    REF.)          .000000         2.000000
    EMB.)         7.000000          .000000
    DEM.)          .000000         1.000000
NO. ITERATIONS=       3
```

i el tableau associat a aquesta solució és:

```
THE TABLEAU
 ROW  (BASIS)     X1    X2    X3    SLK 2 SLK 3
   1 ART        .500  .000  .000    2.000  .000     28.000
REF.        X3 -3.000  .000 1.000    4.000  .000      6.000
EMB.    SLK 3   .500  .000  .000   -2.000 1.000      7.000
DEM.        X2  4.000 1.000  .000   -4.000  .000      4.000
```

a) ASPEC es planteja la possibilitat d'invertir en millores en una de les dues plantes, la de refinat (REF.) o la d'embassat (EMB.). L'ampliació de la planta de refinat augmentaria la seva capacitat del valor actual 9 h/dia a 9.5 h/dia i necessitaria una inversió de 1.5 milions de pessetes. L'ampliació de la planta d'embassat també requereix 1.5 milions de pessetes i augmentaria la seva capacitat del valor actual 20 h/dia a 22 h/dia. Indiqueu a quina planta interessa realitzar la millora i per quina raó.

b) ASPEC es planteja la producció d'un nou fuel de molt alta qüalitat. La venda d'aquest fuel proporcionaria uns beneficis de 6 milions de pessetes per dm^3 venut, necessitant 2h de refinat i 1.5 d'embassat. La demanda conjunta dels quatre productes continuaria sent de 10 dm^3/dia. Interessa la producció d'aquest nou fuel?

78. Anàlisi de sensibilitat *

Donat el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + cx_2 + x_3 \\ \text{subjecte a} & \\ & \begin{array}{cccll} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq & 8 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq & 3 \\ \multicolumn{3}{l}{x_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots 3} \end{array} \end{array}$$

se'ns diu que la solució òptima és $x_1^* = 3$, $x_2^* = x_3^* = 0$.

a) Sense usar les taules del símplex, indiqueu quin és el rang de valors de c per tal que la solució anterior continui essent òptima.

b) Com es veuria afectat el valor de la funció objectiu si el vector de termes independents fos $\begin{pmatrix} 7.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$?

79. Classes d'Optimització *

Dues companyies químiques C1 i C2 us ofereixen la possibilitat d'impartir-los un curs d'optimització d'una setmana, amb tan mala sort que les dates en que hauríeu d'impartir el cursos són les mateixes. Per tant heu de decidir quantes hores impartireu a cada companyia (siguin x_1 i x_2 el nombre d'hores impartit a C1 i C2 respectivament). La companyia C1 paga l'hora a 5 mil pts, mentre que la companyia C2 us ofereix P mil pts/hora (on P és un valor indeterminat). Cada hora de curs per a C1 us suposa 4 hores d'estudi previ, mentre que per a cada hora de C2 us calen 2 de preparació. D'aquí a que comencin els cursos disposeu d'unes 120 hores per a preparar-vos-els. A més, el nombre d'hores total que podreu impartir (x_1 més x_2) és com a molt de 40 hores (una setmana laboral). Considerarem que podeu impartir un nombre qualsevol d'hores x_1 i x_2, sempre que siguin valors positius (no importa, doncs, que siguin valors fraccionaris, o molt propers a 0).

a) Plantegeu el problema de programació lineal que heu de solucionar per tal de saber quantes hores heu d'impartir a cada empresa de forma que maximitzeu el vostre benefici, tot tenint en compte les restriccions de nombre d'hores de preparació i nombre d'hores d'impartició. Transformeu-lo a la forma estàndard, com a problema de minimització.
b) Determineu quin serà el repartiment òptim d'hores x_1 i x_2 en funció del paràmetre P (el que us pagui la companyia C2 en mils pts/hora). Feu-ho usant les taules del símplex.
c) Comproveu els resultats obtinguts a l'apartat b, usant ara el mètode gràfic de resolució.
d) En el cas de que el preu de curs de la companyia C2 sigui de $P = 3$ mils pts/hora, determineu què és més rentable per a vosaltres: que s'incrementi en una hora la setmana laboral (nou límit de 41 hores) o que s'incrementi en una hora el nombre d'hores que podeu dedicar a preparar els cursos (nou límit de 121 hores)? Raoneu la vostra resposta.

80. Miscel.lània al voltant del problema de la dieta

Els responsables d'una granja comercial estan interessats en alimentar al bestiar a un preu mínim, tot satisfent alguns requeriments nutricionals. Els animals s'alimenten amb dos menjars: pinso i NK-34, un compost nutricional amb proteines animals. Cada vaca ha de menjar, com a mínim, 400gr de proteines i 800gr de carbohidrats al dia, i un màxim de 100gr diaris de greix. El pinso conté un 10% de proteines, 80% de carbohidrats i 10% de greix. El compost NK-34 conté 40% de proteines, 60% de carbohidrats i gens de greix. El pinso costa \$0.20 cada 1000gr i el compost NK-34 costa \$0.50 cada 1000gr.

a) Formuleu un problema de programació lineal que permeti trobar les quantitats òptimes de cada tipus de menjar.
b) Resoleu el problema gràficament.
c) Identifiqueu totes les solucions bàsiques factibles $\mathcal{B}$ del problema: indiqueu quines són les variables bàsiques i el seu valor numèric.
d) Fins a quin valor hauriem de REDUIR la quantitat mínima de carbohidrats per tal que la solució òptima fos degenerada? En aquest cas, indiqueu totes les solucions bàsiques associades al vèrtex óptim.

2.6 Dualitat.

81. Formulació de problemes duals*.

Formuleu el problema dual dels primals següents:

a)

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\max & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& x_1 + x_2 = 2 \\
& 2x_1 - x_2 \geq 3 \\
& x_1 - x_2 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{cases}
$$

b)

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\min & z = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\
\text{s.a.:} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\
& x_1 - x_3 \geq 1 \\
& x_2 + x_3 = 1 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

82. Fase I i simplex primal i dual*

Considereu el següent problema de programació lineal :

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\min \;\; z= & 28x_1 & + & 67x_2 & + & 12x_3 & + & 35x_4 & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & \geq & 17 \\
& 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \geq & 36 \\
& x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & \geq & 8 \\
& & & & & & & & & \\
& x_i \geq 0 & , & \forall i & & & & & &
\end{cases}
$$

a) Comproveu si la base $\mathcal{B}^0 = \{1,3,7\}$ és òptima. Si no ho és, calculeu l'òptim de **(PL)** iterant a partir de la base $\mathcal{B}^0$ amb l'algorisme del símplex. x_7 correspón a l'escreix de la tercera constricció, sent $(B^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) Formuleu el problema artificial associat a la fase I de l'algorisme del símplex. Construïu el tableau inicial de la fase I.

Sabent que la base òptima de **(PL)** correspón al conjunt $\mathcal{B}^* = \{1,2,7\}$, amb inversa de la matriu bàsica $B^{*-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, feu el següent apartat :

c) Considereu la modificació de **(PL)** consistent en un canvi del terme independent de la tercera constricció, que passa del valor actual $b_3 = 8$ al nou valor $\hat{b}_3 = 16$. Continua sent òptima la base $\mathcal{B}^* = \{1,2,7\}$?. Justifiqueu la vostra resposta. En cas de resposta negativa, reoptimitzeu a partir de $\mathcal{B}^*$.

83. Teorema de la dualitat i anàlisi post-òptim*

Considereu el següent problema lineal :

$$
\textbf{(PL)} \left\{
\begin{array}{lcrcrcrcr}
\text{min} & \text{z} = & -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & \\
 & & & & & & & & \\
\text{subj.a :} & & -\,x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 9 \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 5 \\
 & & & & & & & & \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

Sabem que el valor de les variables a l'òptim és $x_1 = 14/3$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 13/3$. Anomenaren x^* a aquesta solució.

a) Enunicieu del teorema de la folga complementària. Calculeu el valor de les variables duals a l'òptim usant el teorema de la folga complementària.

b) Enunicieu del teorema de la dualitat forta. Comproveu que la solució primal x^* i la dual trobada a l'apartat a) satisfan aquest teorema.

c) Suposeu que, una vegada trobat x^* s'introdueix una nova variable x_7 al problema original **(PL)** amb cost $c_7 = -1$ i amb una columna donada per l'expressió :

$$a_7 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c.1) Si reoptimitzessim a partir de x^*, per quins valors del paràmetre α la variable x_7 entraria a la base.

c.2) Sense fer cap iteració del simplex, formeu la taula òptima corresponent a x^*. A partir d'aquesta taula, reoptimitzeu pel cas $\alpha = 1/3$.

84. Fase I i dualitat*

Considereu el següent problema lineal :

$$
\textbf{(PL)} \left\{
\begin{array}{lcrcrcr}
\text{max} & \text{z} = & -\;4x_1 & - & x_2 & & \\
 & & & & & & \\
\text{subj.a :} & & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & = & 3 \\
 & & & & & & \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

a) Calculeu una solució bàsica factible inicial aplicant la fase I del simplex.

b) Formuleu el problema dual associat a **(PL)**.

Si formulessim **(PL)** com un problema de minimització, el tableau òptim que obtindriem seria el següent :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	1	0	3/5	0	-1/5	6/5
1	0	0	-1/5	0	2/5	3/5
0	0	1	1	-1	1	0
0	0	0	1/5	0	-7/5	-18/5

amb : x_3 escreix de la primera constricció ; x_4 folga de la segona constricció ; x_5 variable artificial de la primera constricció ; x_6 variable artificial de la tercera constricció .

c) Calculeu el valor de les variables duals de **(PL)** a partir de la informació continguda a l'anterior tableau òptim. No es permet calcular inverses de matrius.

Sustituïm ara **(PL)** pel següent problema lineal :

$$
(\widehat{\mathbf{PL}}) \left\{ \begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & -4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & \\
\\
\text{subj.a :} & & 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq & 6 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
\\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array} \right.
$$

d) La solució òptima de **(PL)** continua sent òptima per $(\widehat{\mathbf{PL}})$?

85. Obtenció del dual *

Obtingueu el dual del problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{rl}
\min & c^T x \\
\text{subj. a} & \\
 & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

i comproveu que el punt $y^T = c_B^T B^{-1}$ (on c_B i B corresponen als costos bàsics i matriu bàsica òptims) és un punt factible dual.

86. El dual del dual és igual al primal *

Comproveu que el dual del dual del problema de programació lineal:

$$
(P) \qquad \begin{array}{rl}
\min & c^T x \\
\text{subj. a} & \\
 & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

és igual al problema original (P). És a dir, que si donat (P), trobem el seu dual (D), i tot seguit trobem el dual de (D), que podem anomenar (DD), doncs aleshores tenim que $(DD) \equiv (P)$.

87. Solució del primal i del seu dual *

Solucioneu el següent problema de programació en la forma primal que es presenta:

$$(P)\quad \begin{array}{lllll} \min & 4x_1 - 8x_2 & & & \\ \text{subj. a} & & & & \\ & -2x_1 & -2x_2 & \geq & -1 \\ & -x_1 & +4x_2 & \geq & -1 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Després de transformar-lo convenientment, solucioneu també el seu dual. Comproveu que s'obté en amdbós casos el mateix valor de funció objectiu, i adoneu-vos de la simetria que presenten les taules òptimes primal i dual.

88. Un paràmetre a la funció objectiu *

Donat el problema de programació lineal següent:

$$\begin{array}{llllllll} \min\limits_{x_1,x_2} & -\,px_1 - x_2 & & & & & & \\ \text{subj. a} & & & & & & & \\ & -x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = & 6 \\ & 4x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = & 20 \\ & 2x_1 & -x_2 & & & +x_5 & = & 6 \\ & x_i \geq 0 & i = 1,...,5 & & & & & \end{array}$$

on $p \in \mathbb{R}$, se sap que a l'òptim les variables bàsiques són x_1, x_2 i x_5. Contesteu el següent:

a) Trobar la solució òptima del problema i el valor de la funció objectiu en aquest punt òptim usant les taules del símplex (cal obtenir la taula del símplex al punt òptim).

b) Com al cas anterior, trobar la solució òptima del problema i el valor de la funció objectiu en aquest punt òptim, però sense fer ús de les taules del símplex.

c) Formuleu el problema dual associat al problema anterior. Trobeu la solució òptima dual, i el valor de la funció objectiu dual en aquest punt òptim de les dues formes següents: en primer lloc, usant la informació de la taula del símplex òptima, i a continuació de nou sense fer ús de les taules del símplex. Quina relació hi ha entre els valors òptims de les funcions objectius primal i dual calculades?

d) Dins de quin interval podem bellugar p de forma que la solució actual continua essent òptima? Que ocorre quan p assoleix un valor que es troba just en un extrem d'aquest interval?

e) Representeu gràficament el problema primal tot detallant la solució òptima quan $p = 1$. Interpreteu ara geomètricament que ocorre quan p assoleix un valor que es troba en un extrem de l'interval calculat a l'apartat anterior.

f) Suposem que ens hem equivocat en introduir el terme de la dreta del problema, i en comptes de ser $\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$, resulta que era $\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$. Solucioneu el problema de minimització amb aquest nou vector.

89. LINDO i símplex dual

Considereu el següent problema de programació lineal **(PL)** definit a LINDO:

```
MIN     3 X1 + 4 X2 - 5 X3
SUBJECT TO
       2)          X2 - 2 X3 <=   4
       3)     X1 + X2 +   X3 =    2
       4) - 2 X1      +   X3 <=   1
END
```

Sigui $\mathcal{B}$ la solució bàsica associada a la següent sortida de la comanda `SOL`:

```
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)     -10.00000
VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1         0.000000          8.000000
      X2         0.000000          9.000000
      X3         2.000000          0.000000
     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         8.000000          0.000000
      3)         0.000000         -0.500000
      4)        -1.000000          0.000000
```

a) Identifiqueu les variables que formen part de la base $\mathcal{B}$.

b) Indiqueu raonadament, argumentant a partir del resultat de ls comanda `SOL`, si la base B és factible primal i dual.

c) Calculeu la solució òptima de **(PL)** iterant a partir de la base $\mathcal{B}$.

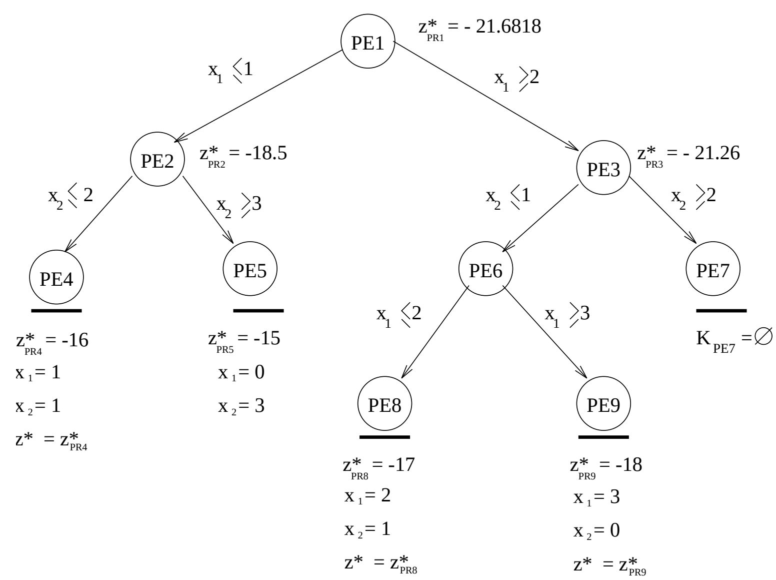
3 Problemes de programació lineal entera.

90. Arbre d'exploració del Branch & Bound.

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$
\textbf{(PLE)}\left\{\begin{array}{lcrcrcrcr}
\min & \mathrm{z} = & -6\,x_1 & - & 5\,x_2 & & & & \\
\text{s.a. :} & & x_1 & + & 2\,x_2 & \leq & 6 & & \\
 & & 8\,x_1 & + & 3\,x_2 & \leq & 24 & & \\
 & & 18\,x_1 & + & 14\,x_2 & \leq & 63 & & \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & , \text{enteras} &
\end{array}\right.
$$

L'arbre d'exploració complet de la resolució de **(PLE)** amb l'algorisme del Branch & Bound és:



Les regles de generació de l'arbre han estat: explorar primer la branca de l'esquerra i seleccionar subproblemes segons el criteri LIFO. Expliqueu els criteris d'eliminació a cada node i dieu quina és la solució òptima.

91. Resolució gràfica de les relaxacions lineals.

Resoleu els següents problemes de programació lineal entera amb el mètode del B&B, resolent els subproblemes relaxats gràficament:

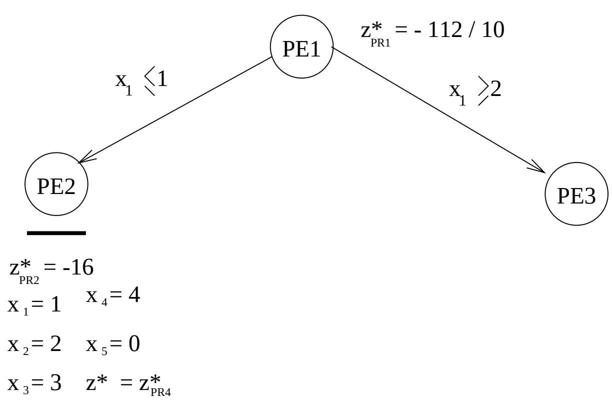
$$
\textbf{(PLE1)}\left\{\begin{array}{llrlclrcrl}
\text{max} & z = & 5 & x_1 & + & 2 & x_2 & & & \\
\text{s.a. :} & & 3 & x_1 & + & & x_2 & \leq & 12 & \\
 & & & x_1 & + & & x_2 & \leq & 5 & \\
 & & & x_1 & , & & x_2 & \geq & 0 & ,\text{enteras}
\end{array}\right.
$$

$$
\textbf{(PLE2)}\left\{\begin{array}{llrlclrcrl}
\text{min} & z = & 4 & x_1 & + & 5 & x_2 & & & \\
\text{s.a. :} & & & x_1 & + & 4 & x_2 & \geq & 5 & \\
 & & 3 & x_1 & + & 2 & x_2 & \geq & 7 & \\
 & & & x_1 & , & & x_2 & \geq & 0 & ,\text{enteras}
\end{array}\right.
$$

92. Resolució amb arbre d'exploració incomplet.

La següent figura mostra un problema de programació lineal entera i el seu l'arbre d'exploració incomplet:

$$
\textbf{(PLE)}\left\{\begin{array}{llrlclrcrl}
\text{min} & z = & 4 & x_1 & + & 5 & x_2 & & & \\
\text{s.a. :} & & 3 & x_1 & + & & x_2 & \geq & 2 & \\
 & & & x_1 & + & 4 & x_2 & \geq & 5 & \\
 & & 3 & x_1 & + & 2 & x_2 & \geq & 7 & \\
 & & & x_1 & , & & x_2 & \geq & 0 & , \quad \text{enteras}
\end{array}\right.
$$



El tableau òptim de la relaxació lineal del subproblema (PE3) obtingut amb LINDO és:

```
THE TABLEAU
     ROW  (BASIS)          X1         X2         E1         E2         E3
       1 ART             .000       .000       .000      1.250       .000
      R1       E1        .000       .000      1.000      -.250       .000
      R2       X2        .000      1.000       .000      -.250       .000
      R3       E3        .000       .000       .000      -.500      1.000
      R4       X1       1.000       .000       .000       .000       .000
     ROW         E4
       1     2.750   -11.750
      R1    -2.750     4.750
      R2      .250      .750
      R3    -2.500      .500
      R4    -1.000     2.000
```

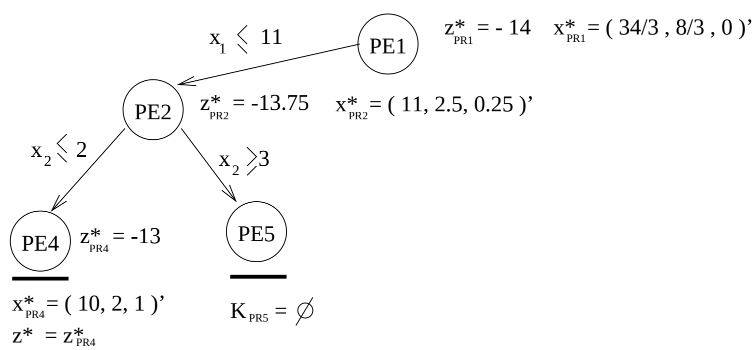
on E4 és la variable d'excés de la constricció R4 associada a la branca $x_1 \geq 2$. Resoleu el problema completant l'arbre d'exploració, resolent els subproblemes relaxats aplicant l'algorisme del simplex. Quan seleccioneu la variable de ramificació, doneu prioritat a les variables reals.

93. Arbre d'exploració incomplet *

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$
\textbf{(PLE)}\begin{cases}
\min \quad z = -x_1 - x_2 - x_3 \\
\text{subj.a :} \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3 \\
\qquad\qquad \frac{3}{2}x_2 + x_3 \leq 4 \\
\qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0\text{, enteres}
\end{cases}
$$

L'arbre d'exploració incomplet corresponent a aquest problema és:



a) Descriviu detalladament les iteracions de l'algorisme del Branch & Bound mitjançant les que s'ha realitzat l'exploració de la branca $x_1 \leq 11$.
b) Durant l'exploració de la branca $x_1 \leq 11$ s'ha trobat una incumbent en el node (PE4). Podriem assegurar, sense necessitat de completar l'arbre d'exploració, que aquesta incumbent és ja la solució òptima? Per què?
c) Resoleu el problema **(PLE)** completant l'arbre d'exploració. El tableau òptim de la rela-

xació lineal (PE1) és:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	4/3	2	4/3	34/ 3
0	1	2/3	0	2/3	8/ 3
0	0	1	2	2	14

94. Resolució gràfica*

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$\textbf{(PLE)} \begin{cases} \min\limits_{x \in \Re^2} z = -x_1 - x_2 \\ \qquad -\dfrac{1}{2}x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \qquad 2x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 \leq 9 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0, \text{ enter} \end{cases}$$

Trobeu la solució de **(PLE)**, resolent els subproblemes relaxats gràficament, i explorant primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$. Feu dues resolucions alternatives, amb dos criteris diferents de ramificació:

a) Ramificant primer en x_1.

b) Ramificant primer en x_2.

95. Resolució gràfica

Calculeu la solució òptima del següent problema de programació lineal entera aplicant l'algorisme del Branch & Bound:

$$\textbf{(PLE)} \begin{cases} \begin{array}{llrrrrrrl} \min & z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & & \\ \text{s.a.}: & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 & \\ & & & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 9/2 & \\ & & - & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & \\ & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & ,\text{enteres} \end{array} \end{cases}$$

Resoleu les relaxacions lineals dels subproblemes gràficament.

96. Resolució gràfica

Calculeu la solució òptima del següent problema de programació lineal entera aplicant l'algorisme del Branch & Bound:

$$\textbf{(PLE)} \begin{cases} \begin{array}{llrrrrrrl} \min & z = & - & 40x_1 & - & 90x_2 & & & \\ \text{s.a.}: & & & 9x_1 & + & 7x_2 & \leq & 56 & \\ & & & 7x_1 & + & 20x_2 & \leq & 70 & \\ & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & ,\text{enteres} \end{array} \end{cases}$$

Resoleu les relaxacions lineals dels subproblemes gràficament. Seguiu els següents criteris d'exploració:

- Seleccioneu com a variable de ramificació la variable de valor no enter amb índex menor.
- Exploreu sempre els últims nodes creats (exploració en profunditat o LIFO).
- Entre els nodes de la mateixa profunditat, exploreu primer l'associat a la branca $x_i \leq \lfloor x_i \rfloor$.

97. Resolució amb el simplex dual *

Resoleu el següent problema de programació entera :

$$
\textbf{(PLE)}\left\{\begin{array}{lcccccc}
\min & - & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a.:} & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 15 \\
 & - & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & & & & & & \\
 & & x_1 \geq 0 & , & x_2 \geq 0 & , & \text{enteres}
\end{array}\right.
$$

El tableau òptim de la relaxació lineal de **(PLE)** és :

$$
T^*_{PR1} = \begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2 \\
0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 25/2 \\
0 & 7/2 & 1/2 & 0 & 1 & 11/2 \\
\hline
0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 5/2
\end{array}
$$

Escolliu com a variable de ramificació les variables reals abans que les folgues. Resoleu les relaxacions lineals amb l'algorisme del símplex dual.

98. Resolució amb el simplex dual *

Considereu el següent problema de programació entera:

$$
\textbf{(PLE)}\left\{\begin{array}{llcccccccc}
\min & z = & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & \\
\text{subj.a :} & & & \frac{1}{2}x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & & & & & \frac{3}{2}x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0\text{ , enteras}
\end{array}\right.
$$

Resoleu el problema **(PE)**. El tableau òptim de la relaxació lineal de **(PE)** és:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
1 & 0 & 4/3 & 2 & 4/3 & 34/3 \\
0 & 1 & 2/3 & 0 & 2/3 & 8/3 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 14
\end{array}
$$

99. Resolució amb el simplex dual *

Resoleu el següent problema de programació entera :

$$
\textbf{(PLE)}\left\{\begin{array}{lrcrcl}
\min & -x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & 5x_1 & + & x_2 & \leq & 15 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & & & & \\
 & x_1 \geq 0 & , & x_2 \geq 0 & , & \text{enteres}
\end{array}\right.
$$

El tableau òptim de la relaxació lineal de **(PLE)** és :

$$
T^*_{PR1} = \begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
0 & 1 & 5/4 & -1/4 & 0 & 5/2 \\
1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 5/2 \\
0 & 0 & -3/2 & 1/2 & 1 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5
\end{array}
$$

Escolliu com a variable de ramificació la variable real amb valor no enter d'índex menor. Resoleu les relaxacions lineals amb l'algorisme del símplex dual.

4 Problemes de programació no lineal.

4.1 Convexitat.

100. Conjunts convexos *

Raoneu si els següents conjunts són o no convexos:
a) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \ \ b \in \mathbb{R}^m\}$
b) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, \ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \ \ b \in \mathbb{R}^m\}$
c) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
d) $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| \leq 1\}$
e) $C = C_1 \cup C_2$, on C_1 i C_2 són conjunts convexos.
f) $C = C_1 \cap C_2$, on C_1 i C_2 són conjunts convexos.

101. Funcions convexes *

Aplicant la definició de funció convexa, comproveu que:
a) Si f_1 i f_2 són funcions convexes, $f_1 + f_2$ és també una funció convexa.
b) Si f és una funció convexa, af és convexa $\forall a \geq 0$.

102. Restriccions no lineals d'igualtat

Sabem que si $g(x)$ és una funció convexa, aleshores $g(x) \leq c$ defineix un conjunt de punts convex per a tot $c \in \mathbb{R}$. Creieu que això també és cert si la restricció fos $g(x) = c$. Raoneu-ho trobant algun contraexemple.

103. Terme diagonal negatiu *

Mostreu que si una matriu quadrada H té un terme diagonal negatiu aleshores no pot ser semidefinida positiva. Recordeu que una matriu H és semidefinida positiva si $\forall x \ x^T H x \geq 0$.

104. Determinació d'uns paràmetres per garantir la convexitat *

Determineu quins valors poden prendre els paràmetres p i q de la següent funció:

$$f(x, y) = q \ln(x^2) + \sin(py)$$

per tal que garantim que sigui convexa en algun subconjunt de $\mathbb{R}^2$.

105. El mínim global *

Si apliquéssim un determinat algorisme d'optimització al problema:

$$\begin{array}{rl} \min & x^4 + 3y^2 - 2xy - 4x + 2y \\ \text{subj. a} & \\ & \ln(x+y) \geq 0 \\ & x^2 + y^2 \leq 20 \\ & x \geq 1/2 \quad y \geq 1/2 \end{array}$$

i aquest ens donés un determinat punt solució, podríem garantir que aquest correspon a un mínim global?

4.2 Optimalitat i direccions de descens.

106. Direccions de descens

Considereu el problema d'optimització no lineal amb constriccions següent :

$$\textbf{(PNL)} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + (x_1 - x_2)^3 \\ \text{s.a}: & x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dieu si les direccions $d^1 = [\,-1 \quad 1\,]'$, $d^2 = [\,1 \quad 2\,]'$, $d^3 = [\,3/2 \quad 2\,]'$ són factibles i de descens a partir del punt $x^0 = [\,0 \quad 1\,]'$ pel problema **(PNL)**. Justifiqueu la vostra resposta.

107. Direccions de descens*

Considereu el problema d'optimització no lineal amb constriccions següent :

$$\textbf{(PNL)} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 x_2 + (x_2 - x_1)^2 \\ \text{s.a}: & x_1 \geq 0 \,,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dieu si les direccions $d^1 = [\,2 \quad 0\,]'$, $d^2 = [\,-2 \quad 1\,]'$, $d^3 = [\,2 \quad 2\,]'$. són factibles i de descens a partir del punt $x^0 = [\,1 \quad 0\,]'$ pel problema (PN2). Justifiqueu la vostra resposta.

4.3 Condició d'òptim per a problemes sense constriccions.

108. Mínim analític*

Trobeu analíticament la solució dels següents problemes d'optimització sense constriccions. Indiqueu si existeix solució, si aquesta és única, i el seu caràcter (minim local, global, estricte,...):

a) $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_1 x_3$
b) $\min f(x) = e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_1} + e^{x_1^2} + x_3^2$
c) $\min f(x) = e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_1}$
d) $\min f(x) = e^{x_1 - x_2} + e^{x_1 + x_2}$

109. Punts estacionaris *

Estudieu els següents problemes de minimització sense restriccions: trobeu els punts estacionaris i comproveu si són o no mínims locals fent ús de les condicions suficients i necessàries d'optimalitat.

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \min\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + xy \\
&\text{b)} \quad \min\ x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 \\
&\text{c)} \quad \min\ -e^{-(x^4+y^4)} \\
&\text{d)} \quad \min\ x^2 - y^4
\end{aligned}$$

110. Resolució del problema de balanç de masses

Solucioneu el problema d'optimització d'una variable que obtinguereu en formular el problema 43 (podeu usar la solució proposada, si voleu). Observeu com la massa òptima M_A obtinguda correspon a la mitjana dels termes $M_{B_i} - M_{C_i}$ (és a dir, $\sum_{i=1}^{n}(M_{B_i}/n - M_{C_i}/n)$).

4.4 Exploració lineal.

111. Cerca lineal usant el mètode de Fibonacci *

Donada la funció

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 + \ln(\frac{1}{x+1})$$

comproveu que aquesta té un únic mínim a l'interval [0,5]. Un cop comprovat això, apliqueu el mètode de Fibonacci per tal de donar un interval de longitud igual o menor a 1.0 dins el qual es trobi aquest valor mínim.

4.5 Optimització sense constriccions: mètode del Gradient.

112. Direccions perpendiculars al mètode del gradient *

El mètode del gradient genera una seqüència de punts $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)^T$ per tal de minimitzar la funció $f(x)$. En el cas que la funció a minimitzar sigui quadràtica (és a dir, $f(x) = 1/2\ x^T Q x - b^T x$) es pot calcular anàliticament la longitud de pas α, i aquesta ve determinada per $\alpha = (\nabla f(x_k)\nabla f(x_k)^T)/(\nabla f(x_k) Q \nabla f(x_k)^T)$. Per a aquest cas particular, comproveu com dues direccions successives són perpendiculars (és a dir, comproveu que $\nabla f(x_k)$ i $\nabla f(x_{k+1})$ són perpendiculars).

113. Aplicació del mètode del gradient *

Donades les dues funcions següents:

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1 - 2x_2 \qquad\qquad f_2(x) = 5x_1^2 + x_2^2 - 2x_2$$

i) Comproveu que les dues tenen el mateix punt mínim.
ii) Digueu quina funció tindrà una convergència més lenta si apliquem el mètode del gradient. Raoneu la resposta.
iii) Realitzeu dues iteracions del mètode del gradient amb cada funció, prenent en ambdós casos com punt inicial $x_0 = (2 \;\; 2)^T$.
iv) Comproveu que les direccions que heu obtingut (per a cada problema) són perpendiculars.

114. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci

Realitzeu la primera iteració del métode del gradient aplicat a la resolució del problema:

$$\textbf{(PNL)} \quad \min\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1 x_2 x_3$$

Preneu com a punt inicial $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.1$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 4$ i interval d'incertessa inicial [0,1].

115. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci*

Realitzeu la primera iteració del mètode del gradient aplicat a la resolució del problema:

$$\textbf{(PNL)} \quad \min\ f(x) = x_1^2 + x_2^2 - (x_2 - x_3)^3 + x_1 x_2 x_3$$

Preneu com a punt inicial $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.1$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 4$ a l'interval inicial d'incertessa [0,0.5].

116. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci

Considereu el següent problema d'optimització no lineal sense constriccions :

$$\textbf{(PNL)} \quad \min\ f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + (x_1 - x_2)^3$$

Feu la primera iteració de l'algorisme del gradient aplicat sobre el problema **(PNL)**, prenent com a punt inicial $x^0 = [1 \quad 1]'$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.5$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 3$ i interval inicial d'incertesa [0,3].

117. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci†

Considereu el següent problema d'optimització no lineal sense constriccions :

$$\textbf{(PNL)} \quad \min\ f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 x_2 + (x_2 - x_1)^2$$

Feu la primera iteració de l'algorisme del gradient aplicat sobre el problema **(PNL)**, prenent com a punt inicial $x^0 = [1 \quad 2]'$, com a tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.5$ i feu exploració lineal aproximada per Fibonacci amb $N = 3$ i interval inicial d'incertesa [0,1/2].

118. Mètode del gradient i exploració lineal de Fibonacci

Considereu el següent problema d'optimització no lineal sense constriccions:

$$\textbf{(PNL)} \quad \min\ f(x_1,x_2) = e^{x_1} + e^{x_2} - 3x_1 - 2x_2$$

a) Resoleu el problema **(PNL)** aplicant l'algorisme del gradient amb tolerància de l'òptim $\epsilon = 0.5$, interval inicial d'incertessa [0,1] i exploració lineal de Fibonacci amb N=4. Preneu com a punt inicial $x^0 = [\,1 \quad 1\,]'$

b) Calculeu la fita superior de la taxa de convergència β de l'algorisme del gradient aplicat al problema **(PNL)** i comproveu, a partir dels resultats de l'apartat anterior, que es satisfà.

119. Mètode del gradient i exploració lineal exacta i per Fibonacci*

Donat el següent problema d'optimització no lineal sense constriccions:

$$\textbf{(PNL)} \quad \min f(x) = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2$$

a) Efectueu una passa completa del mètode del gradient, partint de $x^0 = [\,-1 \quad 0\,]'$, amb tolerància de detecció d'òptim $\epsilon = 0.5$ i fent exploració lineal exacta.

b) Feu exploració lineal de fibonacci a partir del punt $x = [\,-1 \quad 0\,]'$ en la direcció $d = [\,4 \quad 4\,]'$ amb N=4.

120. Mètode del gradient i taxa de convergència†

Considereu el problema **(PNL)** consistent en la minimització de la funció $f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - 3x_2 + x_3$.

a) Efectueu una passa del métode del gradient a partir de $x^0 = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]'$ amb exploració lineal exacta.

b) Considereu que l'aplicació del métode del gradient en la resolució de **(PNL)** a partir de x^0 convergeix a un punt extrem x^*. És x^* la solució del problema **(PNL)**? Per què? Quina és la solució del problema **(PNL)**?

c) Calculeu la fita superior a la taxa de convergència β del métode del gradient aplicat sobre **(PNL)**.

121. Mètode del gradient i taxa de convergència†

Cosidereu els següents dos problemes **(PNS)** de minimització de funcions quadràtiques:

$$\textbf{(PNS1)} \min_{x\in\Re^3} f(x) = \frac{1}{2}[\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - [\,3/2 \quad 3/2 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{(PNS2)} \min_{x\in\Re^3} f(x) = \frac{1}{2}[\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - [\,2 \quad 11 \quad 1\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

a) Efectueu una iteració del mètode del Gradient aplicat sobre el problema **(PNS1)** a partir del punt $x^0 = [\,0 \quad 0 \quad 0\,]'$. Preneu com a tolerància d'optimalitat $\epsilon = 10^{-6}$ i feu exploració lineal per Fibonacci amb $N = 3$ dins l'interval d'incertessa [0,2].

b) Si apliquem el mètode del Gradient als dos problemes a partir del mateix punt, amb quin s'arribaria a la solució òptima en menys iteracions? Justifiqueu la vostra resposta.

4.6 Condicions d'òptim per a problemes amb constriccions.

122. Corbes diferenciables*.

Considereu la constricció no lineal d'igualtat $h(x) = 0$ amb $h(x) = x_1^2 - x_2$ i la funció objectiu $f(x) = e^{x_1(x_2+1)}$. Sigui $\mathcal{S}$ la superfície de $\mathbb{R}^2$ definida per $h(x) = 0$ i $x(t)$ la corba diferenciable de $\mathcal{S}$ que té $x_1(t) = t$.

a) A quín punt de $\mathbb{R}^2$ correspon $x(0)$?

b) Calculeu el valor de $\dfrac{d}{dt} f(x(t))$ per a $t = 0$.

c) A la vista del resultat anterior, pot ser $x(0)$ un punt estacionari del problema $\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s. a: } h(x) = 0 \end{cases}$?

123. Formulació de les condicions de Kuhn i Tucker*

Formuleu les condicions necessàries de primer ordre de mínim local del següent problema d'optimització no lineal :

$$\begin{aligned} &\min f(x_1, x_2) \\ \text{s.a. :}\; &g_1(x_1, x_2) \le b_1 \\ &g_2(x_1, x_2) \ge b_2 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

amb $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

124. Condicions de Kuhn i Tucker*

Considereu el següent problema de programació no lineal:

$$\textbf{(PNL)} \begin{cases} \min \quad \text{f(x)} = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{subj.a :} \quad -x_1 + x_2 \ge -1 \\ \qquad\qquad x_1 + x_2 \le 2 \\ \qquad\qquad x_1 \;,\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Suposem que s'ha trobat una solució factible **(PNL)** que satisfà les condicions necessàries de primer ordre (condicions de Kuhn i Tucker). Què podem dir sobre el caràcter de mínim local o global d'aquesta solució? Justifiqueu la vostra resposta.

b) Formuleu les condicions de Khun i Tucker del problema **(PNL)**.

c) Resoleu el problema **(PNL)** usant les condicions de Kuhn i Tucker, sabent que a l'òptim es satisfà que $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$.

125. Condicions de Kuhn i Tucker*

Considereu el següent problema de programació no lineal:

$$\textbf{(PNL)} \begin{cases} \min & f(x) = (x_1x_2-3)^2 - 4x_1x_2 + 2(x_1x_3-1)^3 - \frac{15}{2}x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a}: & 6x_1^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 - 5 \le 0 \\ & x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 + x_3^2 - 4 \le 0 \end{cases}$$

a) Formuleu les condicions necessàries de primer ordre de mínim local (condicions de de Karush-Khun-Tucker) pel problema **(PNL)**.
b) Comproveu si el vector $x' = [\,0 \quad -2 \quad 1\,]$ pot ser un mínim local del problema **(PNL)**.

126. Condicions de Kuhn i Tucker

Considereu el següent problema de programació no lineal amb constriccions :

$$\begin{array}{lll} \textbf{(PNL)} & \min & f(x_1,x_2) = x_1x_2 + (x_1-x_2)^3 \\ & \text{s.a}: & (x_1+1)(x_2+1) \le 3 \\ & & x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

a) Comproveu, a partir de les condicions de Kuhn-Tucker si el punt $x^0 = [\,1 \quad 1/2\,]'$ és un mínim local del problema **(PNL)**.
b) Tenint en compte la regió factible de **(PNL)**, podem dir que es tracta d'un problema de programació convexa? Justifiqueu la vostra resposta.

127. Condicions de Kuhn i Tucker i programació convexa*

Considereu el següent problema de programació no lineal amb constriccions :

$$\textbf{(PNL)} \begin{cases} \min & f(x_1,x_2) = (x_1-1)^2x_2 + (x_2-x_1)^2 \\ \text{s.a}: & (x_1+1)(x_2+1) + 2x_1^2 + 2x_2^2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a) Formuleu les condicions de Kuhn-Tucker pel problema **(PNL)**.
b) Comproveu, a partir de les condicions de Kuhn-Tucker si el punt $x^0 = [\,0 \quad 1\,]'$ és un mínim local del problema **(PNL)**.
c) És **(PNL)** un problema de programació convexa? Justifiqueu la vostra resposta.

128. Condicions de Kuhn i Tucker i pla tangent*

Considereu el problema d'optimització no lineal següent :

$$\textbf{(PNL)} \begin{cases} \min & f(x) = e^{x_1(x_2+1)} \\ \text{s.a.} & x_1^2 - x_2 \le 0 \\ & 2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1 \le 0 \end{cases}$$

a) Formuleu les condidicions necessàries de primer ordre de **(PNL)**. Indiqueu el procediment que s'hauria de seguir si es volgués resoldre **(PNL)** a partir d'aquestes condicions. Quina seria la dificultat més rellevant d'aquest procés?.
   Considereu que GINO mostra la següent informació associada al punt $\tilde{x}$:

```
                OBJECTIVE FUNCTION VALUE

         1)          .529462

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1        -.455418           .000000
        X2         .396285          -.000007

       ROW   SLACK OR SURPLUS          PRICE
        2)         .188880           .000000
        3)        -.000009          -.241119
```

b) Usant la informació proporcionada per GINO, indiqueu si el punt $\tilde{x} = [\,-.455418 \quad .396285\,]'$ és un mínim local de **(PNL)**.
c) Trobeu una base del subespai tangent de les constriccions actives sobre $\tilde{x}$.

129. Condicions de segon ordre*

Considereu el problema d'optimització no lineal següent :

$$
\textbf{(PNL)} \left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) = e^{x_1(x_2+1)} \\ \text{s.a.} & x_1^2 - x_2 \geq 0 \\ & 2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1 \geq 0 \end{array} \right.
$$

Comproveu si el punt $x^* = [\,-1/2 \quad 1/4\,]$ és solució del problema **(PNL)**.

130. Condicions de segon ordre*

Considereu el segënt problema d'optimització amb constriccions:

$$
\textbf{(PNL)} \quad \left\{ \begin{array}{rl} \displaystyle\min_{x \in \mathbb{R}^3} & f(x) = \dfrac{x_1 x_2}{x_3 + 1} \\ \text{subj. a :} & h(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3 - 1 = 0 \end{array} \right.
$$

La solució $x^* = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]'$ és un punt estacionari de **(PNL)** amb multiplicador de Lagrange associat $\lambda^* = [\,-1/4\,]$. Comproveu si x^* és màxim, mínim o punt de sella de **(PNL)**.

131. Condincions de mínim i GINO

S'ha definit el següent problema de programació no lineal dins del paquet GINO:

```
MODEL:
   1) MIN= X1 ^ 2 - X1 / ( X2 + 1 ) ;
   2) X1 - EXP( X1 - X2 ) = 1 ;
   3) X1 - X1 * X2 < 0 ;
END
```

i el resultat proporcionat pel programa és:

```
SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  SATISFIED.

           OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)          .866781

   VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X1         1.013351           .000000
         X2         5.329532           .000008

        ROW   SLACK OR SURPLUS           PRICE
         2)          .000000         -1.894009
         3)         4.387335           .000000
```

a) Coneixent el valor de les variables a l'òptim x^* proporcionat per GINO a la taula anterior, calculeu, usant les condicions de Karush-Kuhn-Tucker, el valor dels multiplicadors de Lagrange associats a les constriccions del problema.
b) Useu les condicions de segon ordre de mínim local per a determinar si el punt x^* calculat per GINO és efectivament mínim local del problema plantejat.

132. Assumpció de complementarietat estricte

Considereu el següent problema d'optimització no lineal de dos variables:

$$
\textbf{(PNL)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\min_{x \in \mathbb{R}^2} & f(x) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \\ \text{subj. a}: & x_2 \leq 0 \end{array} \right.
$$

Comproveu que $x^* = [\,0 \quad 0\,]'$ i $\mu^* = 0$ satisfan les condicions suficients de segon ordre de mínim local, excepte l'assumpció de complementarietat estricte. És x^* un mínim local de **(PNL)**?

133. Àrea de dos quadrats *

Volem determinar l'àrea mínima de dos quadrats, els costats dels quals tenen una longitud de x_1 i x_2 respectivament, de forma que la suma d'aquestes longituds $(x_1 + x_2)$ sigui igual a un determinat valor a. Trobeu els valors x_1 i x_2 que minimitzen l'àrea que ocuparan els dos quadrats. Feu-ho de dues formes: i) primer considerant un problema sense restriccions (fent el canvi de variable $x_2 = a - x_1$); ii) en segon lloc, aplicant el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Observeu com en ambdós casos s'obté el mateix resultat. (Nota: no cal afegir les restriccions de no-negativitat $x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0$, ja que, com s'observarà, són inactives al punt òptim, i d'aquesta forma simplifiquem el problema).

134. Volum màxim d'un cilindre *

Volem construir un cilindre metàl·lic de volum màxim, de forma que la seva superfície sigui igual a 6π. Contesteu el següent:

i) Plantegeu el problema amb restriccions que cal solucionar.

ii) Solucioneu el problema usant el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Podeu eliminar les restriccions de no-negativitat sobre les dimensions del cilindre, ja que a l'òptim no són actives, com podreu observar. D'aquesta forma evitem treballar amb restriccions de desigualtat, tot simplificant el problema.

iii) Solucioneu el problema amb l'ajut del paquet Lingo (o un altre d'equivalent), considerant ara les restriccions de no-negativitat de les variables. Comenteu el que observeu (Nota: la sortida de Lingo —i de la majoria de paquets d'optimització— a part del valor de les variables i restriccions, dóna també els valors dels multiplicadors λ de les restriccions d'igualtat i μ de les de desigualtat. Lingo anomena als multiplicadors "dual price", i es troben a la vora del valor de cada restricció).

135. Obtenció de les condicions d'òptim al mètode del símplex *

(Nota: aquest problema comporta una certa dificultat. Si teniu dubtes, consulteu la solució proposada).

El problema de programació lineal $\{\min\ c^T x \ \text{ subj. a } Ax = b,\ x \geq 0\}$ (suposarem que A és de rang complet, és a dir, les restriccions són linealment independents) pot ser solucionat mitjançant l'algorisme del símplex, el qual es basa en l'obtenció de successives solucions bàsiques $x^T = (x_B^T \ \ x_N^T)$, $x_B \in \mathbb{R}^m, x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ fins a obtenir una d'òptima. Considerant una solució bàsica qualsevol no degenerada (és a dir, $x_B > 0$ i $x_N = 0$), deduiu, usant les condicions de Kuhn-Tucker, les condicions necessàries que hauria de satisfer si fos un punt òptim, i comproveu que equivalen a les ja conegudes del mètode del símplex.

136. La funció de cost d'un reactor *

S'ha estimat que el cost diari (comptabilitzant amortització, manteniment, etc.) d'un tipus de reactor és funció d'un grau de conversió que oscil·la entre 0 i 1 (com més proper a 1, millor és la qualitat del reactor) i del seu volum (en unes unitats qualsevols). Aquesta funció de cost és $cost(x, y) = e^x y^4$, on x és el grau de conversió i y és el volum. Per altra banda, el benefici del producte obtingut diàriament també és funció d'aquests dos paràmetres i ve donat per $guanys(x, y) = 100y^2(1 + x)$. Plantegem el següent problema per obtenir els valors de x i y (qualitat i volum del reactor) que ens permeten obtenir el màxim benefici amb el mínim cost:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & e^x y^4 - 100y^2(1 + x) \\ & 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \end{aligned}$$

Responeu les següents qüestions:

a) És convexa la funció objectiu del problema? Podem, doncs, garantir que l'òptim trobat és un òptim global?

b) Considerant que estem al punt $(x, y) = (0, 1)$, comproveu que la direcció de moviment $(d_x, d_y) = (1, -0.5)$ és de descens (és a dir, que verifica la condició de descens).

c) Podem escriure el problema de la següent forma equivalent

$$\min_{x,y} \quad e^x y^4 - 100y^2(1 + x) \quad \text{subjecte a} \quad x \leq 1, \quad -x \leq 0, \quad -y \leq 0$$

tenint ara tres restriccions de desigualtat. Sabent que a l'òptim $x > 0$ i $y > 0$ (és a dir, la 2a i 3a restriccions són inactives), trobeu quin punt és candidat a ser solució del problema (qualitat i volums òptims). **Nota:** com que únicament heu d'indicar quin punt és candidat, només heu d'utilitzar les condicions necessàries. I d'aquestes, considereu només les de 1r ordre per simplificar la resolució.

4.7 Optimització amb constriccions: mètode del Gradient Reduit Generalitzat.

137. Aplicació del mètode del gradient reduït *

Donat el problema de programació no lineal (amb funció quadràtica i restriccions lineals)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_3 - 3x_1 + 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{aligned}$$

realitzeu els següents apartats:

i) Comproveu que el punt $x^* = (3\ 0\ 2\ 5)^T$ i els multiplicadors $\lambda^* = (-1\ 0)^T$ i $\mu = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ (per a les restriccions d'igualtat i desigualtat respectivament), satisfan les condicions necessàries i suficients d'optimalitat del problema, amb el qual podem concloure que $x^* = (3\ 0\ 2\ 5)^T$ és l'òptim del nostre problema.

ii) Feu dues iteracions del mètode del gradient reduït començant a iterar des del punt $x^0 = (0\ 2\ 3\ 1)^T$.

iii) Feu una iteració del mètode del gradient reduït començant a iterar des del punt $x^0 = (1\ 1\ 3\ 2)^T$, i considerant que x_1 i x_2 són les variables bàsiques (o dependents).

138. Transport d'un fluid *

Disposem d'una xarxa de transport d'un fluid tal i com mostra la Fig. 2.

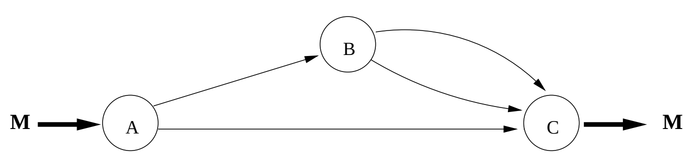


Figura 2. Xarxa de transport d'un fluid

Al node A s'injecta un flux de M lb_m/s, el qual ha de sortir pel node C. Suposem que el cost de transport de x lb_m/s per una canonada és de x^2 mils de pts, i que la capacitat de cada canonada és de M lb_m/s. Contesteu les següents qüestions

a) Plantegeu el problema que cal solucionar per trobar la política de distribució òptima per les quatre canonades.

b) Raoneu per què podem eliminar una restricció i els límits de les variables. Escriviu la nova formulació havent eliminat la restricció associada al node C, i sense límits a les variables.

c) Solucioneu el problema obtingut a l'apartat b).
d) Podem garantir que l'òptim trobat és un mínim global? Raoneu-ho.
e) Realitzeu dues iteracions del mètode del gradient reduït amb el problema formulat a l'apartat b), considerant ara els límits inferiors de les variables $x \geq 0$, i que $M = 10$ $\text{lb}_\text{m}/\text{s}$. Preneu al punt inicial els fluxos entre els nodes (A,C) i (A,B) com variables dependents (o bàsiques). Considereu que en aquest punt inicial els fluxos actuals factibles són de 10 per a la canonada que comunica A i C, i de 0 per a la resta (obvieu el fet que la base inicial és degenerada).

139. Gradient reduït generalitzat*

Considereu el següent problema d'optimització amb constriccions:

$$\textbf{(PNL)}\left\{\begin{array}{rl} \min & \dfrac{x_1x_3^2}{2} - x_1x_5 + 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 4x_4 \\ \text{subj. a:} & \dfrac{x_1^2}{2} + x_2 - x_3 + 2x_4x_5 - x_5 = -2 \\ & \dfrac{3x_1^2}{2} + x_2x_3 - 2x_2 + \dfrac{3x_4^2}{2} + x_5 = \dfrac{7}{2} \\ & \\ & \mathbf{0} \leq X \leq [\,4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4\,]' \end{array}\right.$$

Efectueu un pas complet del mètode del gradient reduït generalitzat a partir del punt $X_0 = [\,1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1/2\,]'$, trobant: el gradient reduït, la direcció d'exploració, la passa màxima i, prenent com a passa òptima la meitat de la passa màxima, un nou punt. A continuació efectueu una passa de projecció del nou punt sobre al hipersuperfície de les constriccions, segons el procediment del mètode. Comproveu que la direcció d'exploració obtinguda és de descens.

140. Gradient reduït generalitzat.

Considereu el següent problema d'optimització no lineal:

$$\textbf{(PNL)}\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}^3} & f(x) = \dfrac{x_1x_2}{x_3+1} \\ \text{subj. a :} & x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 + \dfrac{3}{2x_3} \leq 5 \end{array}\right.$$

a) Enuncieu la condició d'aturada de l'algorisme del Gradient Reduït Generalitzat. Comproveu aquesta condició pel problema **(PNL)** sobre la solució factible $x^k = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]'$
b) Si s'aplica una passa del mètode del GRG a partir del punt factible $x^k = [\,0 \quad 2 \quad 3\,]'$ amb longitud de pas $\alpha^k = 2$ s'obté el punt iterat:

$$x^{k+1} \approx [\,-0.11419 \quad 1.98611 \quad 2.94444\,]'$$

Efectueu una iteració del procés de retorn a la regió factible a partir de x^{k+1}. El vector de variables dependents a x^k és $y^k = [\,{x_1}^k \quad {x_2}^k\,]$

141. Gradient reduït generalitzat amb dues variables.

Considereu el següent problema de programació no lineal:

$$\textbf{(PNL)}\begin{cases} \min\limits_{x\in\Re^2} & f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_3 \\ \text{subj. a :} & x_1^2 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 \geq -1 \quad , \quad x_2 \leq 1 \quad , \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Efectueu una iteració completa del métode del Gradient Reduit Generalitzat a partir del punt inicial $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, fent exploració lineal exacta i amb una tolerància de proximitat a la regió factible $\epsilon = 10^{-6}$. A l'hora de seleccionar el conjunt de variables dependents les variables amb índex inferior tenen prioritat.

5 Solucions dels problemes de modelització.

5.1 Models de programació lineal i entera.

Solució del problema 1.

En aquest problema volem maximitzar els beneficis de la refineria. Aquests beneficis vénen donats pel guany obtingut en la compra de gasolina, querosè i fuel, menys els costos de compra i processat dels crus. Així, si denotem per

$$\begin{aligned} x_{c1} &= \text{barrils/dia comprats de cru C1} \\ x_{c2} &= \text{barrils/dia comprats de cru C2} \\ x_g &= \text{barrils/dia fabricats de gasolina} \\ x_q &= \text{barrils/dia fabricats de querosè} \\ x_f &= \text{barrils/dia fabricats de fuel} \end{aligned}$$

la funció objectiu a maximitzar pot ser escrita com:

$$f_{obj} = (p_g x_g + p_q x_q + p_f x_f) - \big((c_{c1} + cp_{c1})x_{c1} + (c_{c2} + cp_{c2})x_{c2}\big)$$

Les restriccions del problema ens han de relacionar el nombre de barrils de cada producte amb el de crus. La quantitat total de cru C1 requerida ve donada per:

$$x_{c1} = 0.80x_g + 0.65x_q + 0.60x_f$$

Anàlogament escriuríem l'equació per al cru C2.

Imposant els límits sobre el màxim que podem comprar i produir, el problema a solucionar pot ser formulat com:

$$\begin{aligned} \max \quad & (p_g x_g + p_q x_q + p_f x_f) - \big(c_{c1} + cp_{c1})x_{c1} + (c_{c2} + cp_{c2})x_{c2}\big) \\ \text{subj. a} & \\ & x_{c1} = 0.80x_g + 0.65x_q + 0.60x_f \\ & x_{c2} = 0.20x_g + 0.35x_q + 0.40x_f \\ & 0 \le x_{c1} \le M_{c1} \le\ , \quad 0 \le x_{c2} \le M_{c2} \\ & 0 \le x_g \le M_g\ , \quad 0 \le x_q \le M_q\ , \quad 0 \le x_f \le M_f \end{aligned}$$

La formulació anterior podria ser simplificada eliminant les variables x_{c1} i x_{c2}, substituint-les per $0.80x_g+0.65x_q+0.60x_f$ i $0.20x_g+0.35x_q+0.40x_f$ respectivament. El nou problema tindria ara només 3 variables.

Cal fer notar que en aquest problema pot donar-se el cas que el nombre de barrils comprats/fabricats no sigui un nombre enter. En aquest cas això no és un problema. De fet podem pensar que és factible produir o comprar una fracció de barril. Fins i tot si aquesta suposició no pot ser feta, podríem arrodonir la solució fraccionària fins obtenir una entera. En aquest cas la solució entera no podríem assegurar que és òptima, però donat que el nombre de barrils comprats/fabricats és elevat, segur que ens donaria un valor de funció objectiu molt proper a l'òptim.

Solució del problema 2.

Considerem les n^2 variables x_{ij}, que podran prendre els valors 0 si la persona i no està assignada a la tasca j, o 1 en cas contrari. Ara directment podem formular el problema com:

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \\ \text{subj. a} \quad & \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, ..., n \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i,j = 1, ..., n \end{aligned}$$

En aquest cas les equacions $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ forcen a que cada una de les tasques només pugui ser realitzada per una persona. Per la seva banda, les equacions $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ ens obliguen a que una persona només pugui fer una tasca. Cal afegir que les restriccions $x_{ij} \in \{0,1\}$ poden ser substituïdes en aquest cas per $x_{ij} \geq 0$, donada l'estructura de la matriu de restriccions del problema (aquesta verifica que el determinant de qualsevol base sempre val +1 o -1, amb el qual les solucions que troben sempre seran enteres, i per tant $x_{ij} \in \{0,1\}$)

Solució del problema 3.

Considerem el següent conjunt de variables:

x_{jki} representarà les unitats de producte fabricades per la planta $j = 1, ..., N$, amb el mètode $k = 1,2$, i durant l'any $i = 1, ..., I$.

La funció objectiu ha de considerar els costos de producció, per a cada planta, mètode i any. La funció objectiu queda com:

$$f(x_{jki}) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{2} v_{jk}\left(\sum_{i=1}^{I} x_{jki}\right)$$

A continuació cal formular les restriccions del problema. El primer grup de restriccions ve donat pel fet que cal satisfer cada any la demanda D_i. Això simplement s'escriu:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{2} x_{jki} = D_i \qquad \forall\ i = 1, ..., I$$

El segon grup de restriccions ens representa el límit tècnic de producció de cada planta amb cada mètode. Això s'escriu directament com:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{jki} \leq M_{kj} \qquad \forall\ k = 1, 2 \ \ j = 1, ..., N$$

Pel que fa a les variables, directament indiquem que la producció de cada planta amb cada mètode ha de ser no negativa:

$$x_{jki} \geq 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \ \ k = 1, 2 \ \ i = 1, ..., I$$

La formulació final del problema pot ser escrita com:

$$\begin{aligned} &\min_{x_{jki}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{2} v_{jk}\left(\sum_{i=1}^{I} x_{jki}\right) \\ &\text{subj. a} \\ &\qquad \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{2} x_{jki} = D_i \qquad \forall\ i = 1, ..., I \\ &\qquad \sum_{i=1}^{I} x_{jki} \leq M_{kj} \qquad \forall\ k = 1, 2 \ \ j = 1, ..., N \\ &\qquad x_{jki} \geq 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \ \ k = 1, 2 \ \ i = 1, ..., I \end{aligned}$$

Solució del problema 4.

Denotarem per $x_i, i = 1, ..., 4$ el tant per u que s'ha d'extreure de cada túnel i (treballem en tant per u en comptes de tant per cent per comoditat). Llavors, el cost total a minimitzar d'extracció d'una tona ve determinat per:

$$f_{obj} = 7000x_1 + 6500x_2 + 6000x_3 + 6300x_4$$

Per la seva banda, el tant per cent de residus i de coure vindrà determinat per les equacions

$$0.30x_1 + 0.40x_2 + 0.20x_3 + 0.35x_4$$

i

$$0.20x_1 + 0.22x_2 + 0.10x_3 + 0.18x_4$$

respectivament.

També haurem d'incorporar la restricció:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

que garanteix que la suma de tot l'extret de cada túnel correspon a la producció total.

El problema finalment formulat queda com:

$$\begin{aligned}
\min_{x_i} \quad & 7000x_1 + 6500x_2 + 6000x_3 + 6300x_4 \\
\text{subj. a} \quad & \\
& 0.30x_1 + 0.40x_2 + 0.20x_3 + 0.35x_4 \leq 0.29 \\
& 0.20x_1 + 0.22x_2 + 0.10x_3 + 0.18x_4 \geq 0.19 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4
\end{aligned}$$

Solució del problema 5.

Aquest problema no és més que una generalització del problema de l'assignació de personal. Considerant les $m \cdot n$ variables x_{ij}, que ens indicaran la quantitat de producte transportada des de la planta productora i fins al centre consumidor j, el problema el podem formular com:

$$\begin{aligned}
\min_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\
\text{subj. a} \quad & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, ..., m \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, ..., n \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

La funció objectiu ens minimitza el cost total de transport del producte. Les equacions $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ impliquen que tot el que surt de les plantes productores fins al centre consumidor j ha de ser igual a la quantitat de producte requerit b_j. Anàlogament, les equacions $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$ ens indiquen que tot el que arriba als centres consumidors des de la planta productora i ha de ser igual a la quantitat de producte a_i emmagatzemada en aquesta planta.

En el cas que $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ (tenim més producte emmagatzemat del que els centres de consum requereixen) podríem considerar un nou centre de consum fictici (el $m+1$), amb un consum $b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$, i ara ja tenim un problema balancejat on podríem aplicar la formulació anterior.

En el cas que $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$ clarament no podríem satisfer la demanda dels centres consumidors. Podríem, però, considerar com en el cas anterior una planta de producció fictícia (la $n+1$) considerant que emmagatzema un total de $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$ unitats, i intentar de satisfer ara la demanda possible amb cost mínim.

Solució del problema 6.

Les variables que cal determinar són:

$$t_{A1} = \text{dies de fabricació del producte 1 a la planta A}$$
$$t_{A2} = \text{dies de fabricació del producte 2 a la planta A}$$
$$t_{B1} = \text{dies de fabricació del producte 1 a la planta B}$$
$$t_{B2} = \text{dies de fabricació del producte 2 a la planta B}$$

La funció objectiu a maximitzar és el rendiment que obtindrà la companyia de la venda de les quantitats de cada un dels productes fabricats a les dues plantes. La quantitat de producte que fabrica és el producte dels dies de fabricació per la quantitat produïda diàriament. Per tant podem escriure:

$$f_{obj} = \sum_{i=1}^{2} t_{Ai} M_{Ai} B_{Ai} + t_{Bi} M_{Bi} B_{Bi}$$

Les úniques restriccions que tenim són que no superem el límit de cada un dels productes L_1 i L_2:

$$t_{Ai} M_{Ai} + t_{Bi} M_{Bi} \leq L_i \qquad i = 1, 2$$

i que el nombre de dies de fabricació a cada planta correspongui a un any:

$$\begin{aligned} t_{A1} + t_{A2} &= 365 \\ t_{B1} + t_{B2} &= 365 \end{aligned}$$

Finalment, el problema a solucionar queda com:

$$\begin{aligned} & \max \quad \sum_{i=1}^{2} t_{Ai} M_{Ai} B_{Ai} + t_{Bi} M_{Bi} B_{Bi} \\ & \text{subj. a} \\ & \qquad t_{Ai} M_{Ai} + t_{Bi} M_{Bi} \leq L_i \qquad i = 1, 2 \\ & \qquad t_{A1} + t_{A2} = 365 \\ & \qquad t_{B1} + t_{B2} = 365 \\ & \qquad t_{A1} \geq 0 \quad t_{A2} \geq 0 \quad t_{B1} \geq 0 \quad t_{AB2} \geq 0 \end{aligned}$$

Es podria considerar que en un mateix dia no volem produir els dos tipus de producte, per problemes de gestió interna de cada planta. Això es podria indicar obligant a que les variables t_{Ai} i t_{Bi} fossin enteres (si no hi ha valors fraccionaris, podem evitar canviar la producció a la meitat d'una jornada laboral).

Solució del problema 7.

Considerem dos grups de variables:

i) x_{jki} representarà les unitats de producte fabricades per la planta $j = 1, ..., N$, amb el mètode $k = 1, 2$ i durant l'any $i = 1, ..., I$.

ii) y_{jk} serà una variable binària (prendrà només valors 0 o 1) i ens indicarà si la planta $j = 1, ..., N$ utilitza o no el mètode $k = 1, 2$ (valdrà 0 si no l'utilitza, 1 si l'utilitza).

La funció objectiu ha de considerar els costos fixes d'implantació de cada mètode de fabricació, i els variables de producció, per a cada planta (els costos fixes només es comptabilitzen un cop, els costos de producció s'han de sumar per a cada any). A més, els costos fixes han de venir afectats per les variables y_{jk} que ens indiquen si s'ha implantat o no aquell mètode en aquella planta. La funció objectiu finalment queda com:

$$f(y_{jk}, x_{jki}) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{k=1}^{2} \left[y_{jk} f_{jk} + \sum_{i=1}^{I} v_{jk} x_{jki} \right] \right\}$$

A continuació cal formular les restriccions del problema. La primera d'elles és que cal satisfer cada any la demanda D_i. Això simplement s'escriu:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} x_{jki} = D_i \qquad \forall\ i = 1, ..., I$$

La següent restricció que cal garantir és que no podem implantar el primer mètode més de M_1 vegades. Això simplement s'escriu:

$$\sum_{j=1}^{N} y_{j1} \leq M_1$$

Pel que fa a les variables, directament indiquem que y_{jk} són variables de decisió binàries, i que la producció x_{jki} ha de ser positiva:

$$\begin{aligned} y_{jk} &\in \{0, 1\} \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \\ x_{jki} &\geq 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \quad i = 1, ..., I \end{aligned}$$

Amb la formulació anterior, però, pot ocórrer que tinguem valors de x_{jki} positius quan $y_{jk} = 0$ (fabriquem unitats de producte amb un mètode que no hem instal·lat). Hem de garantir, llavors, que $y_{jk} = 0 \Rightarrow x_{jki} = 0 \ \ \forall\ i = 1, ..., I$. Aquesta implicació pot ser formulada com:

$$(1 - y_{jk}) x_{jki} = 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2 \quad i = 1, ..., I$$

Podem sumar les I restriccions anteriors de cada parell jk, i obtenim les noves restriccions equivalents (equivalents ja que $x_{jki} \geq 0$):

$$(1 - y_{jk}) \sum_{i=1}^{I} x_{jki} = 0 \quad \forall\ j = 1, ..., N \quad k = 1, 2$$

Finalment, només ens cal veure quina implicació tenen els dos supòsits a) i b). El cas a) (només un mètode a cada planta) es formula simplement indicant:

$$y_{j1} + y_{j2} = 1 \quad \forall\ j = 1, ..., N$$

El cas b), donat que podem tenir els dos mètodes dins d'una planta, es formula com:

$$y_{j1} + y_{j2} \geq 1 \quad \forall\ j = 1, ..., N$$

Per tant la formulació final pot ser escrita com:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_{jki},y_{jk}} & \sum\limits_{j=1}^{N}\left\{\sum\limits_{k=1}^{2}\left[y_{jk}f_{jk}+\sum\limits_{i=1}^{I}v_{jk}x_{jki}\right]\right\} \\
\text{subj. a} & \\
& \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{2}x_{jki}=D_i \qquad \forall\ i=1,...,I \\
& \sum\limits_{j=1}^{N}y_{j1}\leq M_1 \\
& (1-y_{jk})\sum\limits_{i=1}^{I}x_{jki}=0 \quad \forall\ j=1,...,N \quad k=1,2 \\
& y_{j1}+y_{j2}=1 \text{ (si a)} \quad / \quad y_{j1}+y_{j2}\geq 1 \text{ (si b)} \quad \forall\ j=1,...,N \\
& y_{jk}\in\{0,1\} \quad \forall\ j=1,...,N \quad k=1,2 \\
& x_{jki}\geq 0 \quad \forall\ j=1,...,N \quad k=1,2 \quad i=1,...,I
\end{array}
$$

Solució del problema 8.

Les variables d'aquest problema són les unitats de gas que circulen per cada una de les 6 canonades del gasoducte. Aquestes variables seran denotades per x_{AB}, x_{AC}, x_{BD}, x_{BE}, x_{CD} i x_{DE}. La funció objectiu que hem de minimitzar clarament ve donada per la suma total de transport de gas a totes les canonades:

$$f_{obj}=c_{AB}x_{AB}+c_{AC}x_{AC}+c_{BD}x_{BD}+c_{BE}x_{BE}+c_{CD}x_{CD}+c_{DE}x_{DE}$$

Les restriccions del problema han de reflectir l'estructura de la xarxa. Llavors tindrem per a cada node una equació que expressi el següent:

$$\text{flux de sortida} - \text{flux d'entrada} = \text{injecció al node}$$

on la injecció al node serà positiva si és un centre de producció de gas, o negativa si és un centre de consum. Per exemple, per al node C tindrem l'equació:

$$x_{CD}-x_{AC}=-I_C$$

Cal fer notar que podem escollir un altre criteri de signes, és a dir, podem considerar els fluxos de sortida com negatius i els d'entrada com positius. En aquest cas, però, caldria també modificar el criteri de signes de les injeccions a cada node, i ara tindríem que als centres de producció la injecció seria negativa i als de consum positiva. Com que això darrer no sembla gaire lògic, per això usarem aquí el criteri de signes abans comentat.

Finalment, i considerant els límits de transport a cada canonada, el problema pot ser formulat com:

$$\begin{aligned}
&\min \quad c_{AB}x_{AB}+c_{AC}x_{AC}+c_{BD}x_{BD}+c_{BE}x_{BE}+c_{CD}x_{CD}+c_{DE}x_{DE}\\
&\text{subj. a}\\
&\qquad x_{AB}+x_{AC}=I_A\\
&\qquad x_{BD}+x_{BE}-x_{AB}=I_B\\
&\qquad x_{CD}-x_{AC}=-I_C\\
&\qquad x_{DE}-x_{BD}-x_{CD}=-I_D\\
&\qquad -x_{BE}-x_{DE}=-I_E\\
&\qquad 0\le x_{AB}\le u_{AB}\quad 0\le x_{AC}\le u_{AC}\quad 0\le x_{BD}\le u_{BD}\\
&\qquad 0\le x_{BE}\le u_{BE}\quad 0\le x_{CD}\le u_{CD}\quad 0\le x_{DE}\le u_{DE}
\end{aligned}$$

Si escrivim les restriccions del problema anterior de forma matricial podem adonar-nos de la estructura tan particular que té la matriu de restriccions del problema (la qual és comuna a tots els problemes amb estructura de xarxa):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{AB}\\ x_{AC}\\ x_{BD}\\ x_{BE}\\ x_{CD}\\ x_{DE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A\\ I_B\\ -I_C\\ -I_D\\ -I_E \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu de restriccions s'anomena "matriu de xarxa", o "matriu d'incidències nodes-arcs". Podem veure que per cada columna (arc de la xarxa) tenim només dues posicions diferents de zero: una amb un 1 a la fila corresponent al seu node origen, i una altra amb un -1 a la fila associada amb el node destí. Aquesta estructura tan especial fa que hi hagi especialitzacions del mètode del símplex per a la resolució de problemes de fluxos en xarxes. Aquestes especialitzacions són molt més eficients que l'algorisme general del símplex.

Solució del problema 9.

Per formular els dos apartats usarem dos tipus de variables:

- y_i $i=1,...,n$, indicarà si la companyia construeix o no la planta i, i podrà prendre els valors 0 (no es construeix) o 1 (es construeix).
- x_{ij} indicarà el nombre d'unitats que seran subministrades al centre j des de la planta i.

Passem ara a solucionar els dos apartats de l'enunciat del problema:

a)

La companyia vol minimitzar el cost total de transport del producte i de construcció de les plantes. Aquesta funció de cost no és més que:

$$f_{obj}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}f_iy_i$$

Pel que fa a les restriccions, s'ha de garantir en primer lloc el proveïment de cada centre de consum:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad j = 1, ..., m$$

El següent que cal imposar és que només hi hagi subministrament des d'aquelles plantes que s'hagin construït. Una possible forma d'imposar aquestes restriccions seria:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \big(\sum_{j=1}^{m} b_j \big) \quad i = 1, ..., n$$

A l'equació anterior el terme $\sum_{j=1}^{m} b_j$ és constant, i podria ser substituït per qualsevol valor M sempre que $M \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$. Si fos menor no deixaríem que una planta subministrés la totalitat del producte (quan l'enunciat del problema no ens ha eliminat pas aquesta possibilitat).

La formulació definitiva del problema seria:

$$\begin{aligned}
\min_{x_{ij}, y_i} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i \\
\text{subj. a} \quad & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, ..., m \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \big(\sum_{j=1}^{m} b_j \big) \qquad i = 1, ..., n \\
& x_{ij} \geq 0 \quad y_i \geq 0 \qquad i = 1, ..., n \;\; j = 1, ..., m
\end{aligned}$$

b)

Si existeix un límit a_i sobre el que cada planta pot produir, només hem de substituir a la formulació anterior les restriccions

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \big(\sum_{j=1}^{m} b_j \big) \qquad i = 1, ..., n$$

per les noves

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i a_i \qquad i = 1, ..., n$$

Solució del problema 10.

Segons la Taula 3 de l'enunciat del problema, la xarxa de distribució pot ser representada segons la Fig. 3. En aquest cas els camions es troben associats a arcs i les plantes a nodes.

Denotarem per x_i^k, $i = 1, ..., 5$, $k = 1, 2$ els kg de producte k que transporta el camió i. Donat que la funció objectiu que hem de minimitzar correspon al cost de transport dels dos

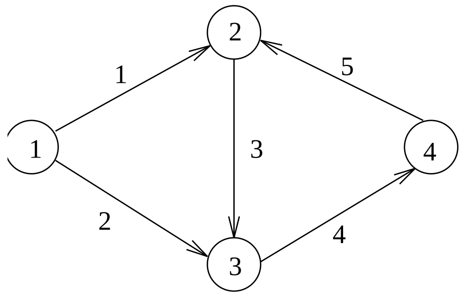


Figura 3. Topologia de la xarxa de distribució.

productes dins els cinc camions, la podem escriure com:

$$f_{obj} = \sum_{i=1}^{5} \sum_{k=1}^{2} c_i^k x_i^k$$

A continuació, a l'igual que es va fer al problema 8, cal que tot el que surt d'una planta menys tot el que hi arriba sigui igual al que consumeix o produeix, i això per a cada un dels dos productes. La diferència que hi ara respecte el problema del gasoducte és que allà només teníem un producte (el gas), mentre que aquí en tenim dos. Llavors caldrà escriure el balanç de fluxos de la xarxa separadament per a cada producte. La xarxa, però, sobre la que circulen els productes és la mateixa, i per això l'estructura de les restriccions serà també la mateixa per a cada producte. Així, per al producte 1 tindrem les restriccions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \\ x_5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \\ P_4^1 \end{pmatrix}$$

les quals poden també ser escrites en forma matricial com $Ax^1 = P^1$ (on $x^1 = (x_1^1\ x_2^1\ x_3^1\ x_4^1\ x_5^1)^T$ i $P^1 = (P_1^1\ P_2^1\ P_3^1\ P_4^1)^T$). Per la seva banda, per al segon producte tindrem les restriccions següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{pmatrix}$$

que en forma matricial poden ser escrites com $Ax^2 = P^2$, on x^2 i P^2 es defineixen de forma anàloga a com abans s'ha fet amb x^1 i P_1.

Només ens cal imposar ara les restriccions per evitar que superem les capacitats de cada camió. Llavors crearem una nova restricció per a cada camió del tipus:

$$x_i^1 + x_i^2 \leq M_i \quad i = 1, ..., 5$$

Tenint en compte que totes les variables x_i^k han de ser no negatives (ja que representen kg de producte transportat), la formulació final del problema queda com:

$$\begin{aligned} \min_{x_i^k} \quad & \sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{2} c_i^k x_i^k \\ \text{subj. a} \quad & \\ & Ax^k = P^k \quad k = 1,2 \\ & x_i^1 + x_i^2 \le M_i \quad i = 1,...,5 \\ & x_i^k \ge 0 \quad i = 1,...,5 \;\; k = 1,2 \end{aligned}$$

Solució del problema 11.

A l'igual que en casos anteriors, podem formular aquest problema fent ús d'una xarxa. En aquest cas, i a diferència dels exercicis previs, el nusos i arcs de la xarxa no es troben associats a punts geogràfics i trajectes entre punts, sinó que corresponen a instants temporals i transicions entre un instant i un altre. Així, podem plantejar el problema a través de la xarxa de la Fig. 4.

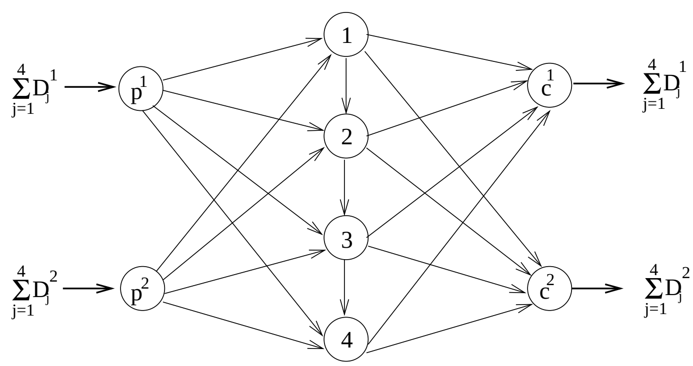


Figura 4. Xarxa associada amb la demanda estacional de productes.

Els dos nodes p^i són els nodes productors, mentre que c^i són els nodes de consum. Els nodes centrals $j, j = 1, ..., 4$, representen el magatzem al llarg dels quatre trimestres del nostre període d'estudi (un any en aquest cas). El flux que circula pels arcs (p^i, j) representa unitats de producte fabricats per la planta i al trimestre j. Els arcs (p^1, j) només poden transportar quantitats del producte 1, i tenen una capacitat de U_j^1 kg, i un cost de C_j^1 pts/kg. Els arcs (p^2, j) transporten unitats de producte 2 (amb costos C_j^2 pts/kg i capacitats U_j^2). Per satisfer la demanda tenim els arcs (j, p^i), que només només poden subministrar unitats del producte i, amb un cost 0 i capacitat D_j^i. Finalment, els arcs $(j, j+1)$ comparteixen els dos productes, i representen la quantitat total conjunta que s'emmagatzema d'un trimestre per a l'altre. El cost de cada unitat "transportada" per aquests arcs és de T pts/kg, i la seva capacitat màxima és de M kg (la capacitat del magatzem). El problema podria ser ara formulat com als exercicis previs on apareixia una estructura de xarxa. Es deixa al lector la formulació final del problema.

Solució del problema 12.

Per comoditat considerem que un reactor aturat es troba al règim de producció 0, i per a la resta de règims codifiquem amb un 1 el règim baix, amb un 2 el règim mig, i amb un 3 el règim alt. La producció i cost de funcionament de cada reactor j amb cada règim i es denoten per p_{ij} i c_{ij} respectivament (on $p_{0j} = c_{0j} = 0$). Definint les variables $x_{ijl} \in \{0,1\}$ que indiquen si el dia $l = 1,...,7$ el reactor $j = 1,...,r$ està al nivell $i = 0,...,3$ (0 si no està, 1 si està), tenim la següent possible formulació:

$$\min \quad \sum_{l=1}^{7}\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{r} c_{ij}x_{ijl}$$

subj. a

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{r} p_{ij}x_{ijl} \geq D \qquad \forall l = 1,...,7 \ \ \text{(per a tot dia de la setmana)}$$

$$\sum_{i=0}^{3} x_{ijl} = 1 \qquad \forall j = 1,...,r,\ \forall l = 1,...,7 \ \ \text{(per a tot reactor i dia de la setmana)}$$

$$\sum_{l=1}^{7} x_{0jl} \geq 1 \qquad \forall j = 1,...,r \ \ \text{(per a tot reactor)}$$

$$x_{ijl} \in \{0,1\}$$

El primer grup de restriccions garanteixen la satisfacció de la demanda diària. El segon grup de restriccions asseguren que cada reactor es trobarà cada dia en un i només un règim de funcionament. Finalment, el tercer grup de restriccions obliguen a que cada reactor es trobi aturat, com a mínim, un dia a la setmana.

Solució del problema 13.

- **Variables:**
  - ∗ x_{1A}: quantitat d'avions tipus 1 que volen a la ciutat A.
  - ∗ x_{1B}: quantitat d'avions tipus 1 que volen a la ciutat B.
  - ∗ x_{2A}: quantitat d'avions tipus 2 que volen a la ciutat A.
  - ∗ x_{2B}: quantitat d'avions tipus 2 que volen a la ciutat B.
  - ∗ x_{3A}: quantitat d'avions tipus 3 que volen a la ciutat A.
  - ∗ x_{3B}: quantitat d'avions tipus 3 que volen a la ciutat B.
- **Funció objectiu:** $z = 230x_{1A} + 580x_{1b} + \ldots + 38x_{3B}$
- **Constriccions:**
  - ∗ *Nombre màxim d'avions:*

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 8$$
$$x_{2A} + x_{2B} \leq 15$$
$$x_{3A} + x_{3B} \leq 11$$

  - ∗ *Demanda:*

$$45x_{1A} + 7x_{2A} + 5x_{3A} \geq 20$$
$$45x_{1B} + 7x_{2B} + 5x_{3B} \geq 28$$

  - ∗ *Capacitat torre de control:* $x_{1A} + x_{1B} + \frac{1}{2}x_{2A} + \frac{1}{2}x_{2B} + \frac{1}{3}x_{3A} + \frac{1}{3}x_{3B} \leq 5$

- **Formulació final:**

$$
\textbf{(P)}\left\{
\begin{array}{ll}
\min & z = 230x_{1A} + 580x_{1b} + \ldots + 38x_{3B} \\
\text{s.a.:} & \\
& x_{1A} + x_{1B} \leq 8 \\
& x_{2A} + x_{2B} \leq 15 \\
& x_{3A} + x_{3B} \leq 11 \\
& 45x_{1A} + 7x_{2A} + 5x_{3A} \geq 20 \\
& 45x_{1B} + 7x_{2B} + 5x_{3B} \geq 28 \\
& x_{1A} + x_{1B} + \dfrac{1}{3}x_{2A} + \dfrac{1}{3}x_{2B} + \dfrac{1}{3}x_{3A} + \dfrac{1}{3}x_{3B} \leq 5 \\
& x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B}, x_{3A}, x_{3B} \geq 0 \quad , \quad \text{enteres}
\end{array}
\right.
$$

Solució del problema 14.

- **Variables:** x_{ij}: nre. d'alumnes del districte i assignats al centre j ($x_{ij} \geq 0$, enteres). No cal distingir entre estudiants blancs i negres ja que, segons l'enunciat, es mantenen les mateixes proporcions que existeixen als districtes. Si es defineixen dues variables diferents per a distingir entre races (x_{ij}^b i x_{ij}^n) aleshores cal imposar la constricció:

$$
\frac{x_{ij}^b}{x_{ij}^b + x_{ij}^n} = \frac{n_i^b}{n_i^n + n_i^b} \rightarrow \left[1 - \left(\frac{n_i^b}{n_i^n + n_i^b}\right)\right] x_{ij}^b - \left(\frac{n_i^b}{n_i^n + n_i^b}\right) x_{ij}^n = 0
$$

- **Funció objectiu:** $\min z = \displaystyle\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij}$
- **Constriccions**
  - ∗ *Escolarització de tots els alumnes:* $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = n_i^b + n_i^n \quad , \quad i = 1, 2 \ldots, 10$
  - ∗ *Capacitat de les escoles:* $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \leq c_j \quad , \quad j = 1, 2, 3$
  - ∗ *Balanç racial:* la proporció d'alumnes blancs i negres al centre j és:

$$
f_j^b = \frac{\displaystyle\sum_{1=1}^{10} \left(\frac{n_i^b}{n_i^n + n_i^b}\right) x_{ij}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_{ij}} \quad ; \quad f_j^n = \frac{\displaystyle\sum_{1=1}^{10} \left(\frac{n_i^n}{n_i^n + n_i^b}\right) x_{ij}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_{ij}}
$$

Les constriccions de balanç racial imposen:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2} - \theta \leq f_j^b \leq \dfrac{1}{2} + \theta \\
\dfrac{1}{2} - \theta \leq f_j^n \leq \dfrac{1}{2} + \theta
\end{array}
\right\} \quad , \quad j = 1, 2, 3 \tag{1}
$$

Donat que s'ha de satisfer que $f_j^b + f_j^n = 1$, el conjunt de constriccions (1) és redundant, ja que:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \theta \leq f_j^b \Rightarrow f_j^n \leq \frac{1}{2} + \theta \\ \frac{1}{2} - \theta \leq f_j^n \Rightarrow f_j^b \leq \frac{1}{2} + \theta \end{array}\right\} \quad j = 1,2,3$$

Així doncs, només cal imposar les primeres desigualtats de les constriccions (1). Tal com s'han expressat aquestes constriccions són no lineals. Cal expressar-les com a constriccions lineals:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \theta \leq f_j^b \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2} - \theta - \frac{n_i^b}{n_i^n + n_i^b} \right) x_{ij} \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \theta \leq f_j^n \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2} - \theta - \frac{n_i^n}{n_i^n + n_i^b} \right) x_{ij} \leq 0 \end{array}\right\} \quad \forall j$$

- **Formulació final:**

$$\textbf{(P)} \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.:} & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = n_i^b + n_i^n \quad , \quad i = 1, 2 \ldots, 10 \\ & \left.\begin{array}{r} \sum_{j=1}^{10} x_{ij} \leq c_j \\ \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2} - \theta - \frac{n_i^b}{n_i^n + n_i^b} \right) x_{ij} \leq 0 \\ \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2} - \theta - \frac{n_i^n}{n_i^n + n_i^b} \right) x_{ij} \leq 0 \end{array}\right\} j = 1,2,3 \end{array} \right.$$

Solució del problema 15.

- **Variables de decisió:**
  - ∗ x_{11} : Quantitat de producte 1 produït el mes 1 a la màquina 1.
  - ∗ x_{12} : Quantitat de producte 1 produït el mes 1 a la máquina 2.
  - ∗ x_{21} : Quantitat de producte 1 produït el mes 2 a la máquina 1.
  - ∗ x_{22} : Quantitat de producte 1 produït el mes 2 a la máquina 2.
  - ∗ y_{11} : Quantitat de producte 2 produït el mes 1 a la máquina 1.
  - ∗ y_{12} : Quantitat de producte 2 produït el mes 1 a la máquina 2
  - ∗ y_{21} : Quantitat de producte 2 produït el mes 2 a la máquina 1.
  - ∗ y_{22} : Quantitat de producte 2 produït el mes 2 a la máquina 2.

  Totes són no negatives.
- **Constriccions de disponibilitat de màquines:**
  - ∗ Màquina 1, mes 1 : $4x_{11} + 7y_{11} \leq 500$ (1)
  - ∗ Màquina 1, mes 2 : $4x_{21} + 7y_{21} \leq 500$ (2)
  - ∗ Màquina 2, mes 1 : $3x_{12} + 4y_{12} \leq 500$ (3)
  - ∗ Màquina 2, mes 2 : $3x_{22} + 4y_{22} \leq 500$ (4)

- **Constriccions de demanda màxima**
  - ∗ Producte 1, mes 1 : $x_{11} + x_{12} \leq 100$ (5)
  - ∗ Producte 1, mes 2 : $x_{21} + x_{22} \leq 190$ (6)
  - ∗ Producte 2, mes 1 : $y_{11} + y_{12} \leq 140$ (7)
  - ∗ Producte 2, mes 2 : $y_{11} + y_{12} \leq 130$ (8)
- **Funció objetiu:**

$$z = 55(x_{11} + x_{12}) + 12(x_{21} + x_{22}) + 65(y_{11} + y_{12}) + 32(y_{21} + y_{22})$$

- **Formulació:**

$$\textbf{(P)} \begin{cases} \max & z \\ \text{s.a. :} & \\ & (1), \ldots, (8) \\ & x_{ij}, y_{ij} \geq 0 \ , \ i = 1,2 \ , \ j = 1,2 \end{cases}$$

Solució del problema 17.

- **Variables de decisió:**
  - ∗ x_A : treballadors classe A dedicats a la tasca I.
  - ∗ x_{AB} : grups (1A+2B) dedicats a ls tasca I.
  - ∗ y_A : treballadors classe A dedicats a la tasca II.
  - ∗ y_B : treballadors classe B dedicats a la tasca II.
  - ∗ y_{BC} : grups (1B+3C)II dedicats a la tasca II.

  Totes les variables són no negatives i enteres.
- **Funció objectiu:** $\min z = 1000x_A + 2000x_{AB} + 1000y_A + 500y_B + 1100y_{BC}$
- **Constriccions:**
  - ∗ *Sindicals:*
    - ▷ Treballadors classe A: $x_A + x_{AB} + y_A \leq 30$
    - ▷ Treballadors classe B: $2x_{AB} + y_B + y_{BC} \leq 40$
    - ▷ Treballadors classe C: $3y_{BC} \leq \dfrac{x_A + 3x_{AB} + y_A + y_B + 4y_{BC}}{4}$
  - ∗ *Hores de producció:*
    - ▷ Tasca I: $40x_A + 100x_{AB} \geq 1000$
    - ▷ Tasca II: $40y_A + 30y_B + 90y_{BC} \geq 2000$

- **Formulació final:**

$$
\textbf{(P)}\begin{cases}
\min z = 1000x_A + 2000x_{AB} + 1000y_A + 500y_B + 1100y_{BC} \\
\quad \text{suj. a:} \\
\qquad x_A + x_{AB} + y_A \leq 30 \\
\qquad 2x_{AB} + y_B + y_{BC} \leq 40 \\
\qquad x_A + 3x_{AB} + y_A + y_B - 8y_{BC} \geq 0 \\
\qquad 40x_A + 100x_{AB} \geq 1000 \\
\qquad 40y_A + 30y_B + 90y_{BC} \geq 2000 \\
\\
\qquad x_A, x_{AB}, y_A, y_B, y_{BC} \geq 0 \quad , \quad \text{enteres}
\end{cases}
$$

Solució del problema 18.

- **Variables de decisió:**
  - ∗ x_i : nombre de TTC que comencen el seu torn el dia i, sent l'índex 1 l'associat al dilluns, el 2 al dimarts, etc.
  - ∗ y_j : nombre de TTP que comencen el seu torn el dia j.

  Totes les variables són enteres i no negatives.
- **Funció objectiu**
  - ∗ *Cost setmanal dels TTC :* $1500\left(\frac{\text{pts}}{\text{h}}\right) 8\left(\frac{\text{h}}{\text{dia}}\right) 5\left(\frac{\text{dies}}{\text{TTC}}\right) \sum_{i=1}^{7} x_i \text{ (TTC)}$
  - ∗ *Cost setmanal dels TTP :* $1000\left(\frac{\text{pts}}{\text{h}}\right) 4\left(\frac{\text{h}}{\text{dia}}\right) 5\left(\frac{\text{dies}}{\text{TTP}}\right) \sum_{j=1}^{7} y_j \text{ (TTP)}$
  - ∗ *Funció objectiu :* $z = 60000\sum_{i=1}^{7} x_i + 20000\sum_{j=1}^{7} y_j$
- **Constriccions:**
  - ∗ *Necessitats laborals diàries:* Sigui b_i , $i = 1, \ldots, 7$ el nombre de TTC necessaris cada dia de la setmana. Això equival a dir que el dia i–èssim a l'oficina de correus necessita cobrir $8b_i$ hores de treball. Aquestes hores han de ser cobertes amb els TTC i TTP que treballin aquest dia. Fixem-nos en el dilluns, per exemple. Els treballadors actius el dilluns seran tots els que no hagin començat a treballar en el torn del dimarts (descansen diumenge i <u>dilluns</u>) o dimecres (descansen <u>dilluns</u> i dimarts). Així doncs, la constricció de associada al dilluns és :

$$
8 \times \left(\frac{\text{h}}{\text{TTC}}\right) \times \text{(TTC dilluns)} + 4 \times \left(\frac{\text{h}}{\text{TTP}}\right) \times \text{(TTP dilluns)} =
$$

$$
= \left[8\left(x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7\right)\right]\text{h} + \left[4\left(\text{y}_1 + \text{y}_4 + \text{y}_5 + \text{y}_6 + \text{y}_7\right)\right]\text{h} \geq 8\left(\frac{\text{h}}{\text{TTC}}\right) 17\text{(TTC)}
$$

treient les unitats i formulant les equacions de la resta de dies tenim :

$$\begin{array}{l} 8(x_1 \quad\quad +x_4+x_5+x_6+x_7) + 4(y_1 \quad\quad +y_4+y_5+y_6+y_7) \geq 136 \\ 8(x_1+x_2 \quad\quad +x_5+x_6+x_7) + 4(y_1+y_2 \quad\quad +y_5+y_6+y_7) \geq 104 \\ 8(x_1+x_2+x_3 \quad\quad +x_6+x_7) + 4(y_1+y_2+y_3 \quad\quad +y_6+y_7) \geq 120 \\ 8(x_1+x_2+x_3+x_4 \quad\quad +x_7) + 4(y_1+y_2+y_3+y_4 \quad\quad +y_7) \geq 152 \\ 8(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \quad\quad) + 4(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 \quad\quad) \geq 112 \\ 8(\quad +x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \quad) + 4(\quad +y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 \quad) \geq 128 \\ 8(\quad\quad +x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) + 4(\quad\quad +y_3+y_4+y_5+y_6+y_7) \geq 88 \end{array}$$

∗ *Límit de TTP:* El total d'hores treballades per TTP al llarg de la setmana és :

$$\mathrm{HTTP} = 4\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{dia}}\right) \times 5\left(\frac{\mathrm{dies}}{\mathrm{TTP}}\right) \times \mathrm{n^o\ TTP}$$

El total d'hores treballades per TTC al llarg de la setmana és :

$$\mathrm{HTTC} = 8\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{dia}}\right) \times 5\left(\frac{\mathrm{dies}}{\mathrm{TTC}}\right) \times \mathrm{n^o\ TTC}$$

El valor de HTTP no pot excedir el 25% del total d'hores treballades a la setmana :

$$\mathrm{HTTP} \leq 0.25(\mathrm{HTTP} + \mathrm{HTTC}) \qquad ; \qquad \frac{3}{4}\mathrm{HTTP} - \frac{1}{4}\mathrm{HTTC} \leq 0$$

Substituïnt per les variables de decisió i simplificant :

$$-2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + 3(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7) \leq 0$$

- **Formulació final**

$$\begin{array}{ll} \min & z = 60000(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\ & \quad +20000(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7) \\ \text{subj. a :} & -2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) + 3(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7) \leq 0 \\ & 8(x_1 \quad\quad +x_4+x_5+x_6+x_7) + 4(y_1 \quad\quad +y_4+y_5+y_6+y_7) \geq 136 \\ & 8(x_1+x_2 \quad\quad +x_5+x_6+x_7) + 4(y_1+y_2 \quad\quad +y_5+y_6+y_7) \geq 104 \\ & 8(x_1+x_2+x_3 \quad\quad +x_6+x_7) + 4(y_1+y_2+y_3 \quad\quad +y_6+y_7) \geq 120 \\ & 8(x_1+x_2+x_3+x_4 \quad\quad +x_7) + 4(y_1+y_2+y_3+y_4 \quad\quad +y_7) \geq 152 \\ & 8(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \quad\quad) + 4(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 \quad\quad) \geq 112 \\ & 8(\quad +x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \quad) + 4(\quad +y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 \quad) \geq 128 \\ & 8(\quad\quad +x_3+x_4+x_5+x_6+x_7) + 4(\quad\quad +y_3+y_4+y_5+y_6+y_7) \geq 88 \\ & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \quad y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0 \text{, enteres} \end{array}$$

Solució del problema 19.

- **Variables:**
  $x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4$: proporció en què intervenen els quatre disolvents
- **Funció Objectiu:** modelitza el cost per litre del compost químic:

$$z = 16x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 11x_4$$

- **Constriccions:**
  - ∗ Contingut mínim de clor: $180x_1 + 120x_2 + 90x_3 + 60x_4 \geq 90$
  - ∗ Contingut màxim de amoníac: $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 4$
  - ∗ Constrició de mescla: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
- **Formulació final:**

$$
\textbf{(P)}\begin{cases}
\min \quad z = 16x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 11x_4 \\
\quad \text{s.a.:} \quad 180x_1 + 120x_2 + 90x_3 + 60x_4 \geq 90 \\
\qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 4 \\
\qquad\qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{cases}
$$

Solució del problema 20.

- **Variables de decisió**
  - ∗ $x_{1,2}$: Tm/mes de caixes de cartró destinades a PR classe 2 que es reciclen per destintat
  - ∗ $y_{1,2}$: idem, per dispersió d'asfalt.
  - ∗ $x_{2,2}$: Tm/mes de paper seda destinades a PR classe 2 que es reciclen per destintat
  - ∗ $y_{2,2}$: idem, per dispersió d'asfalt.
  - ∗ $x_{3,1}$: Tm/mes de paper continu destinades a PR classe 1 que es reciclen per destintat
  - ∗ $y_{3,1}$: idem, per dispersió d'asfalt.
  - ∗ $x_{3,3}$: Tm/mes de paper continu destinades a PR classe 3 que es reciclen per destintat
  - ∗ $y_{3,3}$: idem, per dispersió d'asfalt.
  - ∗ $x_{4,1}$: Tm/mes de paper de llibres destinades a PR classe 1 que es reciclen per destintat
  - ∗ $y_{4,1}$: idem, per dispersió d'asfalt.
  - ∗ $x_{4,2}$: Tm/mes de paper de llibres destinades a PR classe 2 que es reciclen per destintat
  - ∗ $y_{4,2}$: idem, per dispersió d'asfalt.

  Definim el conjunt de parells d'indexos corresponents a combinacions àptes de paper residual-paper reciclat : $\mathcal{A} = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2)\}$

  Totes les variables són no negatives i continues : $x_{i,j}, y_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}$
- **Funció objectiu:** Definim el vector p de preus de paper residual $p = [\,500 \quad 600 \quad 800 \quad 1000\,]'$. L'objectiu del programa lineal serà la minimització de la següent funció de costos de compra i processat : $z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} ((2000 + p_i)x_{i,j} + (1500 + p_i)y_{i,j})$
- **Constriccions:**
  - ∗ *Constriccions de capacitat del procés:* $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{i,j} \leq 3000 \quad ; \quad \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} y_{i,j} \leq 3000$
  - ∗ *Constriccions de demanda:* les constriccions de demanda es poden expressar com de $\geq$ o de $=$, puig la funció objectiu pretén minimitzar una funció de costos.

$$
\begin{aligned}
0.9(0.3x_{3,1} + 0.4x_{4,1}) + 0.85(0.3y_{3,1} + 0.4y_{4,1}) &\geq 500 \quad \text{Classe 1} \\
0.9(0.15x_{1,2} + 0.2x_{2,2} + 0.4x_{4,2}) + 0.85(0.15y_{1,2} + 0.2y_{2,2} + 0.4y_{4,2}) &\geq 500 \quad \text{Classe 2} \\
0.9(0.3x_{3,3}) + 0.85(0.3y_{3,3}) &\geq 600 \quad \text{Classe 3}
\end{aligned}
$$

- **Formulació final:**

$$
\begin{array}{lr}
\min & z = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} ((2000+p_i)x_{i,j} + (1500+p_i)y_{i,j}) \\
\text{s.a.:} & \\
& \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{i,j} \le 3000 \\
& \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} y_{i,j} \le 3000 \\
& 0.27x_{3,1} + 0.36x_{4,1} + 0.255y_{3,1} + 0.34y_{4,1} \ge \ 500 \\
& 0.135x_{1,2} + 0.18x_{2,2} + 0.36x_{4,2} + 0.1275y_{1,2} + 0.17y_{2,2} + 0.34y_{4,2} \ge \ 500 \\
& 0.27x_{3,3} + 0.255y_{3,3} \ge \ 600
\end{array}
$$

Solució del problema 21.

- **Variables de decisió:**

$$
i = 1,\ldots,5 \left\{ \begin{array}{ll}
x_i \ge 0 & \text{nre. de tècnics qualificats al començament del mes } i. \\
y_i \ge 0 & \text{nre. de tècnics 1er mes de formació al començament del mes } i. \\
z_i \ge 0 & \text{nre. de tècnics 2on mes de formació al començament del mes } i.
\end{array}\right.
$$

x_i, y_i, z_i enteres

- **Funció Objectiu:** Costos laborals: $z = \sum_{1=1}^{5} 200000x_i + 10000(y_i + z_i)$
- **Constriccions:**
  - ∗ Cada mes els tècnis qualificats han de fer front a les hores de demanda d_i i a la formació de nous tècnics:

$$
\begin{array}{ll}
160x_i \ge d_i + 50y_i + 10z_i \quad , & i = 1,\ldots,5 \\
160x_i - 50y_i - 10z_i \ge d_i \quad , & i = 1,\ldots,5 \qquad (1)
\end{array}
$$

  - ∗ Les variables x_i, y_i i z_i han de coordinar-se:

$$
x_i = 0.95(x_{i-1} + z_{i-1}) \quad ; \quad x_1 = 50 \qquad (2)
$$

$$
z_i = y_{i-1} \qquad (3)
$$

- **Formulació final:**

$$
\textbf{(P)} \left\{ \begin{array}{l}
\min \quad z = \displaystyle\sum_{1=1}^{5} 200000x_i + 10000(y_i + z_i) \\
s.a \\
\left.\begin{array}{r}
160x_i - 50y_i - 10z_i \ge d_i \\
x_i - 0.95x_{i-1} + 0.95z_{i-1} = 0 \\
z_i - y_{i-1} = 0 \\
x_i, y_i, z_i \ge 0 \text{ , enteres}
\end{array}\right\} i = 1,\ldots,5 \\
x_1 = 50 \quad , \quad z_1 = 0
\end{array}\right.
$$

Solució del problema 22.

- **Variables:**
  - ∗ x_1 : transistors que seran tractats pel mètode 1 cada mes.
  - ∗ x_2 : transistors que seran tractats pel mètode 2 cada mes.
  - ∗ y_0 : transistors de qualidad defectuosa, producte del mètode 1 o 2, que es refinen cada mes.
  - ∗ y_1 : transistors de qualidad G1, producte del mètode 1 o 2, que es refinen cada mes.
    Totes les variables són no negatives i enteres.
- **Funció objetiu:** $\min z = 5000x_1 + 7000x_2 + 2500y_0 + 2500y_1$
- **Constriccions:**
  - ∗ *De demanda:*
    - ▷ Demanda transistors qualitat G1 :

$$\underbrace{0.4x_1 + 0.35x_2}_{\text{resultat de la mescla}} + \underbrace{0.3y_0}_{\text{refinats D}\to\text{G1}} - \underbrace{0.4y_1}_{\text{refinats G1}\to\text{G2}} \geq 3000$$

    - ▷ Demanda transistors qualitat G2 :

$$\underbrace{0.3x_1 + 0.5x_2}_{\text{resultat de la mescla}} + \underbrace{0.05y_0}_{\text{refinats D}\to\text{G2}} + \underbrace{0.4y_1}_{\text{refinats G1}\to\text{G2}} \geq 2000$$

  - ∗ *Capacitat del forn :* $x_1 + x_2 + y_0 + y_1 \leq 20000$
  - ∗ Hem d'assegurar que no refinem una quantitat de transistors major que la produida per la mescla:

$$y_0 \leq 0.3x_1 + 0.15x_2 \quad ; \quad y_1 \leq 0.4x_1 + 0.35x_2$$

- **Formulació final**

$$\textbf{(P)} \begin{cases} \min z = 5000x_1 + 7000x_2 + 2500y_0 + 2500y_1 \\ \quad \text{s. a:} \\ \qquad 0.4x_1 + 0.35x_2 + 0.30y_0 - 0.4y_1 \geq 3000 \\ \qquad 0.3x_1 + 0.50x_2 + 0.05y_0 + 0.4y_1 \geq 2000 \\ \qquad x_1 + x_2 + y_0 + y_1 \leq 20000 \\ \qquad 0.3x_1 + 0.15x_2 - y_0 \leq 0 \\ \qquad 0.4x_1 + 0.35x_2 - y_1 \leq 0 \\ \\ \qquad x_1, x_2, y_0, y_1 \geq 0 \quad , \quad \text{enteras} \end{cases}$$

Solució del problema 23.

- **Variables:**
  - ∗ x_A, x_B, x_C: nre. de peces diàries a fabricar.
  - ∗ x_p, x_s: nre. de premses i màquines de soldar a instal·lar.

  * y_p, y_s, y_a: nre d'obrers de cada categoria.

  totes les variables són enteres i no negatives.
- **Funció objectiu:** $\max z = (250-150)x_A + (350-300)x_B + (300-200)x_C - 8(550y_p + 650y_s + 360y_a)$
- **Constriccions:**
  * *Límit de venda:* $x_A \leq 10000$, $x_B \leq 5000$, $x_C \leq 12000$
  * *Límit d'espai:* $10x_p + 12x_s \leq 10000/4 = 2500$
  * *Limitació de la producció:*

$$\frac{x_A}{500} + \frac{x_B}{1800} + \frac{x_C}{150} \leq 8x_p$$
$$\frac{x_A}{15} + \frac{x_B}{80} + \frac{x_C}{30} \leq 8x_s$$

  * *Limitació del nombre d'obrers:* $y_p \geq x_p$, $y_s \geq x_s$, $y_a \geq x_p/4 + x_s$, $y_p + y_s + y_a \leq 400$ (no seria correcte $y_a = x_p/4 + x_s$ doncs y_a és entera).
- **Formulació final:**

$$\textbf{(P)} \left\{ \begin{array}{ll} \max & z = 100x_A + 50x_B + 100x_C - 4400y_p - 5200y_s - 2880y_a \\ \text{s.a.:} & \\ & 10x_p + 12x_s \leq 2500 \\ & \frac{x_A}{500} + \frac{x_B}{1800} + \frac{x_C}{150} \leq 8x_p \\ & \frac{x_A}{15} + \frac{x_B}{80} + \frac{x_C}{30} \leq 8x_s \\ & y_p \geq x_p \\ & y_s \geq x_s \\ & y_a \geq x_p/4 + x_s \\ & y_p + y_s + y_a \leq 400 \\ & 0 \leq x_A \leq 10000 \\ & 0 \leq x_B \leq 5000 \\ & 0 \leq x_C \leq 12000 \\ & x_p, x_s, y_p, y_s, y_a \geq 0 \\ & x_A, x_B, x_C, x_p, x_s, y_p, y_s, y_a \text{ enteres} \end{array} \right.$$

Solució del problema 29.

S'introdueixen els escreixos x_{52} i x_{53} i una constricció addicional associada al nus que equilibra la xarxa :

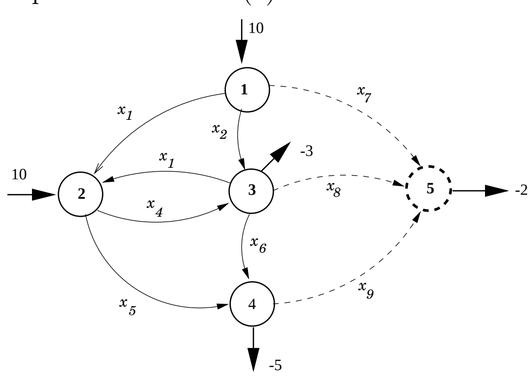
$$
\textbf{(P)}\left\{
\begin{array}{lllllllllll}
\text{min} & \text{z=} & \multicolumn{9}{l}{3x_{12}+4x_{13}+3x_{23}+5x_{24}+x_{41}+7x_{43}} \\
\text{s.a.:} & & x_{12} & + & x_{13} & - & x_{41} & & & = & 1 \\
 & & -x_{12} & + & x_{23} & + & x_{24} & - & x_{52} & = & -3 \\
 & & -x_{24} & + & x_{41} & + & x_{43} & & & = & 0 \\
 & & -x_{13} & - & x_{23} & - & x_{43} & - & x_{53} & = & -4 \\
 & & & & & & x_{52} & + & x_{53} & = & 6 \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & \multicolumn{9}{l}{x_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}}
\end{array}
\right.
$$

Solució del problema 30.

S'han d'afegir variables de folga i incorporar una nova constricció, corresponent a un nus artificial, que sigui suma de totes les constriccions, amb signe canviat:

$$
\begin{array}{ll}
 & \hspace{7cm}\text{folgues} \\
\begin{array}{l}
\text{nus 1} \\
\text{nus 2} \\
\text{nus 3} \\
\text{nus 4} \\
\\
\text{nus 5 (artificial)}
\end{array}
&
\left[\begin{array}{cccccc:ccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \cdots \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \\ \cdots \\ -2 \end{bmatrix}
\qquad (1)
$$

La xarxa associada a les equacions de xarxa (1) és:



on s'indica en línea puntejada els arcs i nus ficticis.

5.2 Models de programació no lineal.

Solució del problema 42.

En aquest cas hem de minimitzar els costos fixes c_F i els de funcionament c_f durant un any:

$$\begin{aligned} f_{obj} &= c_F + c_f \\ &= 100000P^{0.8} + n_l 6000t \\ &= 100000P^{0.8} + n_l 12000P^{0.4} \quad [\text{usant que } t = 2P^{0.4}] \end{aligned}$$

A l'expressió anterior el terme n_l representa el nombre de lots que es fa anualment.

Hem de garantir, a més, la restricció de que no superarem entre tots els lots el màxim d'hores de funcionament en un any (considerant hores de funcionament i aturades entre lots). Això ho podem expressar com

$$\begin{aligned} (t+14)n_l &\leq 320 \cdot 24 \\ (2P^{0.4}+14)n_l &\leq 7680 \end{aligned}$$

Ara tenim plantejat el problema en les variables P i n_l. L'enunciat ens demanava, però, usar només la variable P. Podem relacionar n_l i P sabent que el total de producte que hem de fabricar a l'any és de 150000 kg, i per tant, el nombre de lots processats en un any ha de ser de:

$$n_l = 150000/P$$

Llavors, el problema a solucionar pot ser finalment formulat com

$$\begin{aligned} &\min_P \quad 10^5 P^{0.8} + \frac{18 \cdot 10^8}{P} P^{0.4} \\ &\text{subj. a} \\ &\qquad (2P^{0.4}+14)\frac{15 \cdot 10^4}{P} \leq 7680 \\ &\qquad P \geq 0 \end{aligned}$$

Solució del problema 43.

Aquest és un problema on es pot aplicar la tècnica general dels mínims quadrats. Denotant per M_A la massa del flux del producte A, l'error que fem en un dels n instants de temps és $e_i = M_A + M_{B_i} - M_{C_i}$. Com que volem minimitzar la suma dels errors per als n intervals, només hem de sumar els valors de e_i, però elevant-los al quadrat (si no, podrien produir-se cancelacions per canvis de signe, les quals són eliminades en elevar al quadrat). El problema que haurem de solucionar finalment serà:

$$\min_{M_A} \sum_{i=1}^{n} (M_A + M_{B_i} - M_{C_i})^2$$

Solució del problema 44.

El problema que hem de solucionar en aquest cas és:

$$
\begin{array}{ll}
\max\limits_{n} & b(p,n) \\
\text{subj. a} & \\
& p_{min} \leq p \leq p_{max} \\
& 10 \leq n \leq 20 \\
& n \text{ enter}
\end{array}
$$

La única dificultat que té el problema anterior rau en el càlcul del pagament p que s'ha de satisfer al banc cada any en funció del nombre d'anys n que es farà el pagament, sabent que l'interès és de r. Aquest és un problema típic que cal ser solucionat sempre que es demana un préstec.

Sabem que hem de tornar el préstec en n anys. Inicialment la quantitat que es deu al banc és de

$$D_0 = 100 \text{ milions}$$

Passat el primer any, la quantitat que es deurà serà de

$$D_1 = D_0(1+r) - p$$

és a dir, el que devíem més els interessos generats, menys el pagament del primer any. Anàlogament, definiríem el que deurem al segon i successius anys, fins arribar al darrer any n, on la quantitat que es deurà al banc serà de

$$D_n = D_{n-1}(1+r) - p$$

Clarament, el que nosaltres volem és que passats els n anys s'hagi pagat tot el que es devia al banc, és a dir, que $D_n = 0$. Substituint l'expressió de D_1 dins D_2, la de D_2 dins D_3, i així successivament fins arribar a la substitució de D_{n-1} dins D_n, arribem a que podem expressar la condició $D_n = 0$ com

$$
\begin{aligned}
D_0(1+r)^n - p\sum_{i=0}^{n-1}(1+r)^i &= 0 \\
D_0 &= p\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^i} \\
D_0 &= p\frac{\frac{1}{(1+r)^{n+1}} - \frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r} - 1} \\
D_0 &= \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}p
\end{aligned}
$$

Entre el segon i tercer pas de les igualtats anteriors ha calgut realitzar la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica de raó $a = \frac{1}{1+r}$. La suma dels n primers termes de la progressió de raó a ve donada per $S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{a-1}$.

Ara, sabent que $D_0 = 100$ milions, i aillant de l'expressió anterior, directament podem escriure p en funció de n:

$$p = 100\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

i substituir aquest valor al problema de maximització formulat originalment.

Solució del problema 45.

Ens cal maximitzar els beneficis nets de la companyia durant cada un dels 5 anys de vida de l'aïllant. La funció objectiu a maximitzar pot ser formulada com:

$$f_{obj} = \text{Beneficis} - \text{Despeses}$$

Els beneficis que obté la companyia provenen de l'estalvi d'energia deguts a l'aïllament durant una hora, multiplicat per les hores de funcionament a l'any i per G (pts de guany per cada Btu estalviat). Per saber quants Btus ens estalviem en una hora cal calcular $Q_0 - Q$ (Q_0 representa les pèrdues de calor quan $x = 0$):

$$Q_0 - Q = h_c A\Delta T - \frac{A\Delta T}{x/k + 1/h_c}$$

La companyia demanarà al banc un préstec de $(c_0 + c_1 x)A$ pts (cost del m^2 per àrea total de la canonada). Usant el resultat obtingut al problema 44, tenim que el pagament P que ha de fer durant cada any el banc (amb un tipus d'interés del r%) ve donat per:

$$P = A(c_0 + c_1 x)\frac{r/100(1 + r/100)^n}{(1 + r/100)^n - 1}$$

La única restricció del problema és que el gruix de l'aïllant no pot ser negatiu ($x \geq 0$). Llavors, el problema a solucionar serà:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & \left(h_c A\Delta T - \dfrac{A\Delta T}{x/k + 1/h_c}\right) \cdot H \cdot G \;-\; A \cdot (c_0 + c_1 x) \cdot \dfrac{r/100(1 + r/100)^n}{(1 + r/100)^n - 1} \\ \text{subj. a} & x \geq 0 \end{array}$$

En aquest cas, la solució anàlitica del problema anterior pot ser calculada diferenciant la funció objectiu respecte x i igualant a 0, obtenint que x és igual a una expressió on apareix una arrel quadrada. Donat que x no pot ser negativa, directament prendríem la solució positiva de l'arrel quadrada (és la única que té un sentit físic).

Solució del problema 46.

Denotarem per $x_i,\ i = 1, ..., 10$, els kg que usarem per a cada un dels 10 ingredients del primer tipus, i per $y_i\ i = 1, ..., 5$ (on $y_i \in \{0, 1\}$) si usarem o no cada un dels ingredients del segon tipus. Hem de determinar quins són els valors de x_i i y_i que minimitzen el cost i satisfan les restriccions de pinso fabricat i greix total. Aquest problema pot ser formulat tal i com segueix:

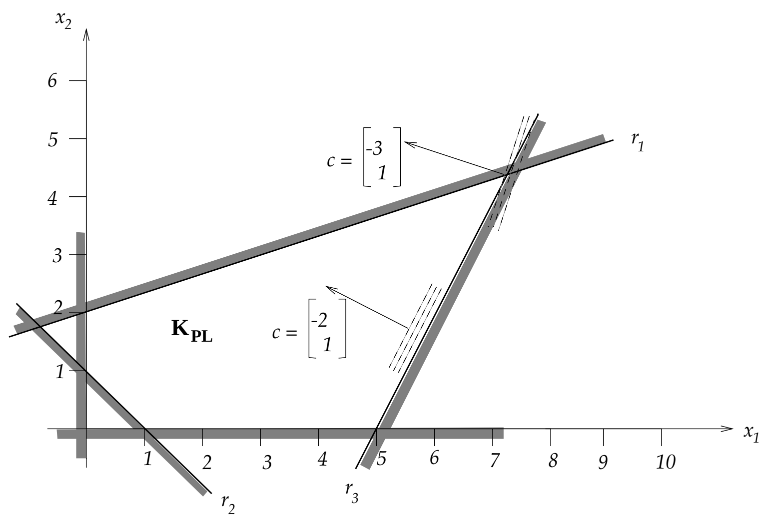
$$
\begin{aligned}
\min_{x_i, y_i} \quad & \sum_{i=1}^{10} c_i^1 x_i + \sum_{i=1}^{5} c_i^2 y_i \\
\text{subj. a} \quad & \\
& P_l \leq \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{5} p_i y_i \leq P_u \\
& G_l \leq \sum_{i=1}^{10} a_i^1 x_i + \sum_{i=1}^{5} a_i^2 p_i y_i \leq G_u \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 10 \qquad\qquad y_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, ..., 5
\end{aligned}
$$

6 Solucions dels problemes de programació lineal.

6.1 Resolució gràfica.

Solució del problema 47.

Representem gràficament la regió factible $\mathrm{K_{PL}}$:



a) ($c = [\,-3 \quad 1\,]'$) La solució es troba al vèrtex determinat per la intersecció de les rectes r_1 i r_3:

$$\left.\begin{array}{lr} r_1: & -x_1^* + 3x_2^* = \ 6 \\ r_3: & 2x_1^* - x_2^* = 10 \end{array}\right\} \boxed{x^* = \begin{bmatrix} 36/5 \\ 22/5 \end{bmatrix}}$$

El problema és factible amb solució única.

b) ($c = [\,-2 \quad 1\,]'$) En aquest cas, l'aresta del polítop associada a la recta r_3 és una aresta òptima:

$$\mathcal{X}^* = \{x \in \mathrm{K_{PL}} \mid x = \alpha \begin{bmatrix} 36/5 \\ 22/5 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ \forall \alpha \in [0,1]\}$$

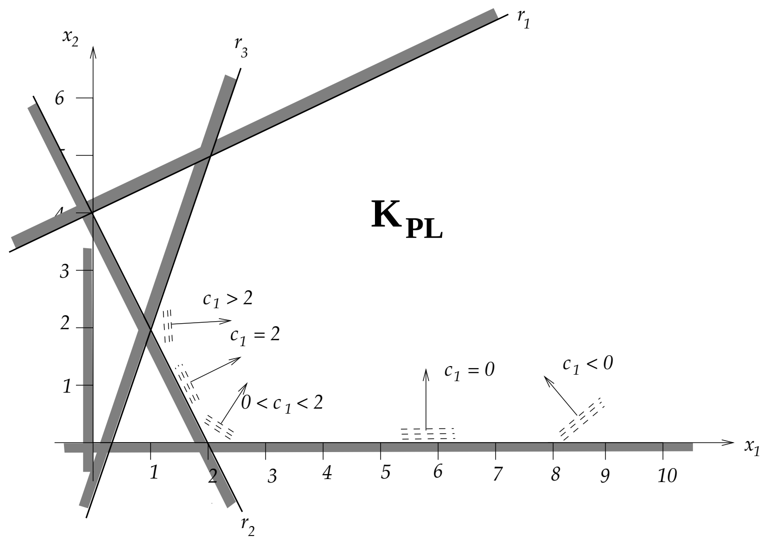
(PL) és un problema factible amb òptims alternatius.

c) Hem de trobar el valor del terme independent b_2 que fa que la recta r_2 passi pel punt intersecció $\tilde{x}$ de les rectes r_1 i r_3:

$$r_2: \quad x_1 + x_2 = b_2 \quad ; \quad \boxed{b_2 = \frac{36}{5} + \frac{22}{5} = \frac{58}{5}}$$

Solució del problema 48.

Representem gràficament la regió factible K_{PL}:



- $c_1 < 0$: problema il·limitat: $\mathcal{X}^* = \emptyset$
- $c_1 = 0$: l'aresta associada a la constricció $x_1 \geq 0$ és òptima. És un problema amb òptims alternatius:
$$\mathcal{X}^* = \{x \mid x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ \forall \alpha \geq 0\}$$
- $0 < c_1 < 2$: $x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $c_1 = 2$ l'aresta associada a la recta r_2 és òptima (òptims alternatius):
$$\mathcal{X}^* = \{x \mid x = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \ \forall \alpha [0, 1]\}$$
- $c_1 > 2$: $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solució del problema 49.

Els punts solució (x_1^*, x_2^*)de cada cas son els següents:

a) (0,2)
b) (1.5,0.5)
c) (0.8,0.6)
d) (0,2)

e) Problema il·limitat.
f) Problema infactible.

Solució del problema 50.

La Fig. 5 mostra la regió factible del problema (àrea ombrejada) delimitada per les tres restriccions r1, r2 i r3. Aquesta és clarament il·limitada. També es mostren les corbes de nivell de la funció objectiu (junt amb el vector de costos negat $-c = (-p, 1)$), en quatre situacions diferents (corresponents a diferents valors de p). Recordem que el vector de costos negat ens indica la direcció en que hem de fer avançar les corbes de nivell per minimitzar la funció objectiu.

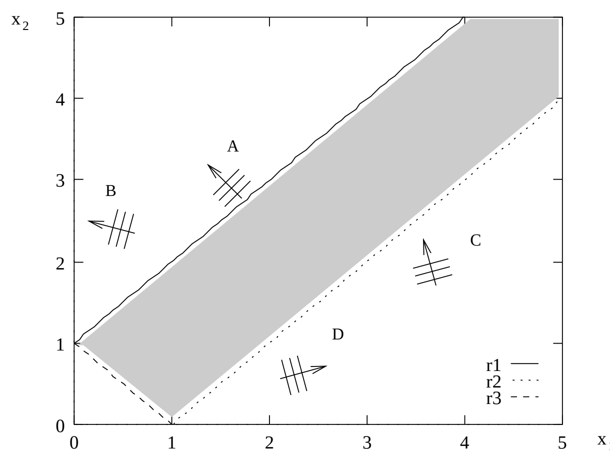


Figura 5. Regió factible i situacions segons el valor del paràmetre p.

En la situació A (funció objectiu paral·lela a $x_1 - x_2 = -1$) tenim que $p = 1$. En aquest cas qualsevol punt de $x_1 - x_2 = -1$ sobre el quadrant positiu és un òptim alternatiu, de valor de funció objectiu -1.

Per valors $p > 1$ (situació B) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen cap a l'eix $x_1 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap a l'esquerra. En aquest cas només hi ha un òptim alternatiu, que correspon amb el punt $(0, 1)$, però amb el mateix valor de funció objectiu que abans: -1.

Per valors $0 \leq p < 1$ (situació C) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen cap a l'eix $x_2 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap amunt. En aquest cas, podem fer disminuir tant com volem el valor de la funció objectiu. Ens trobem davant una situació de problema il·limitat.

Per valors $p < 0$ (situació D) les corbes de nivell de la funció objectiu s'inclinen de nou cap a l'eix $x_1 = 0$ (en el límit són paral·les a aquest eix) i el vector de costos negat $(-p, 1)$ ens empeny cap a la dreta. En aquest cas, una altra vegada ens trobem devant un problema il·limitat.

Per tant tenim:

$$\begin{cases} \text{Problema il·limitat} & \text{si } p < 1 \\ \text{Òptims alternatius} & \text{si } p = 1 \\ \text{Òptim únic} & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

Si la funció objectiu fos $px_1 + x_2$ es faria un estudi equivalent (es deixa al lector la seva resolució).

Solució del problema 51.

El problema tal i com es presenta té més de dues variables, i això dificulta molt la seva representació. Podem veure, però, que x_3 i x_4 de fet actuen com a folgues, i podem considerar que el nostre problema és en realitat:

$$\begin{aligned}
&\max \quad x_3 \\
&\text{subj. a} \\
&\qquad x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
&\qquad x_1 + x_2 \geq 1 \\
&\qquad x_3 \text{ és la folga de la primera restricció} \\
&\qquad x_4 \text{ és la folga de la segona restricció} \\
&\qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4
\end{aligned}$$

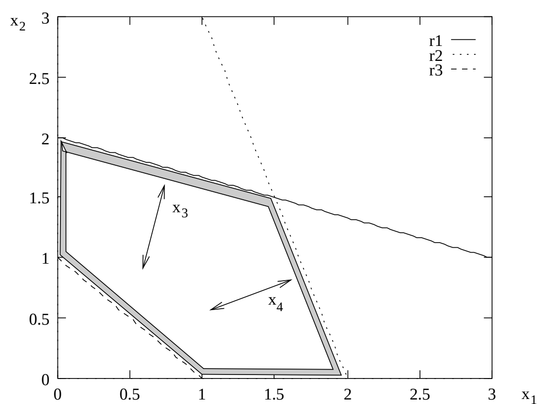


Figura 6. Regió factible i significat de les folgues x_3 i x_4

Les folgues de fet únicament ens indiquen quant allunyats estem de la frontera de la nostra regió factible (x_3 ens diu quant lluny estem de $x_1 + 3x_2 = 6$ i x_4 la distància a $3x_1 + x_2 = 6$. La Fig. 6 ens mostra precisament la regió factible (la part interior més propera a la frontera es troba ombrejada) i el significat de x_3 i x_4 (les distàncies a r1 i r2 respectivament) Observant la Fig. 6 podem comprovar que el punt més allunyat de la recta r1 és clarament el punt $(x_1, x_2) = (1, 0)$. Aquest serà doncs el que proporcionarà el valor màxim per x_3 (concretament $x_3 = 5$).

En el cas que la funció objectiu fos $\max x_4$ s'hauria de maximitzar l'altra folga. S'observa com el punt més allunyat de r2 és $(x_1, x_2) = (0, 1)$, el qual proporciona el valor màxim de la funció objectiu $x_4 = 5$.

6.2 Transformació a la forma estàndar.

Solució del problema 52.

Primer transformarem les constriccions. La primera constricció té el terme independent negatiu: es canvia el signe del dos membres:

$$-x_1 + 3x_2 = 5$$

La segona constricció està doblement afitada. Aquesta constricció es pot transformar en una constricció d'igualtat afegint una folga x_5 amb fita superior:

$$6 \leq x_1 + x_2 - 5x_4 \leq \ 7 \rightarrow x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = \ 7 \quad ; \quad 0 \leq x_5 \leq 7 - 6 = 1$$

La forma estàndar no considera fites superiors a les variables: $x_5 \leq 1$ es transforma en una constricció d'igualtat:

$$x_5 \leq 1 \rightarrow x_5 + x_6 = 1 \quad ; \quad x_6 \geq 0$$

La tercera constricció, no lineal, es pot trasformar facilment en una constricció lineal d'igualtat:

$$\frac{3x_1 + 7x_2}{3x_3} \geq \ 4 \rightarrow 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 \leq 0 \rightarrow 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 + x_7 = 0 \quad ; \quad x_7 \geq 0$$

El problema que tenim fins ara, passant la funció objectiu de min a max, és:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min & z = -6x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & -x_1 + 3x_2 = 5 \\ & x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = 7 \\ & x_5 + x_6 = 1 \\ & 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 + x_7 = 0 \\ & x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\ & x_1 \text{lliure}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

L'únic que queda per fer és tractar les variables x_1 i x_3. Primer canviem el signe de la fita de x_3 introduïnt el canvi de variable $\tilde{x}_3 = -x_3$:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min & z = -6x_1 - 5x_2 - 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & -x_1 + 3x_2 = 5 \\ & x_1 + x_2 - 5x_4 + x_5 = 7 \\ & x_5 + x_6 = 1 \\ & 3x_1 + 7x_2 + 12\tilde{x}_3 + x_7 = 0 \\ & x_2, \tilde{x}_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\ & x_1 \text{lliure} \end{cases}$$

Ara eliminem de la formulació la variable lliure x_1. De la primera constricció tenim que $x_1 =$

$3x_2 - 5$. Substituïm x_1 per aquesta expressió a tot el problema:

$$
\textbf{(PL)}\begin{cases}
\min & z = -23x_2 - 3x_4 \\
\text{s.a.:} & \\
& 4x_2 - 5x_4 + x_5 = 12 \\
& x_5 + x_6 = \ 1 \\
& 16x_2 + 12\tilde{x}_3 + x_7 = 15 \\
& x_2, \tilde{x}_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{cases}
$$

D'aquesta forma obtenim un problema amb una variable i constricció de menys. Noti's que la constant 30 provinent de la substitució $x_1 = 3x_2 - 5$ a la funció objectiu s'ha eliminat de la formulació, doncs no afecta al resultat. Un cop resolt el problema anterior les transformacions $x_3 = -\tilde{x}_3$ i $x_1 = 3x_2 - 5$ ens proporcionaran el valor òptim de les variables originals.

Solució del problema 53.

Fent els següents canvis de variable:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_3^+ - x_3^- \\
\tilde{x}_2 &= x_2 - 3
\end{aligned}
$$

(on $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$, i $x_2 \geq 3 \Rightarrow \tilde{x}_2 \geq 0$) i afegint les variables (folgues) f_1 i f_2 a la primera i segona restriccions, el problema pot ser escrit de la següent forma:

$$
\begin{array}{rl}
\max & 3x_1 + 2(\tilde{x}_2 + 3) + 3(x_3^+ - x_3^-) \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{cccccccc}
2x_1 & +(\tilde{x}_2+3) & + \ (x_3^+ - x_3^-) & +f_1 & & = & 20 \\
3x_1 & -(\tilde{x}_2+3) & +2(x_3^+ - x_3^-) & & +f_2 & = & 6 \\
x_1 \geq 0 & \tilde{x}_2 \geq 0 & x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 & 16 \geq f_1 \geq 0 & f_2 \geq 0 & &
\end{array}
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{rl}
\max & 3x_1 + 2\tilde{x}_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + 6 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{cccccccc}
2x_1 & +\tilde{x}_2 & + \ x_3^+ & - \ x_3^- & +f_1 & & = & 17 \\
3x_1 & -\tilde{x}_2 & +2x_3^+ & -2x_3^- & & +f_2 & = & 9 \\
x_1 \geq 0 & \tilde{x}_2 \geq 0 & x_3^+ \geq 0 & x_3^- \geq 0 & 16 \geq f_1 \geq 0 & f_2 \geq 0 & &
\end{array}
\end{array}
$$

Cal adonar-se que la folga f_1 té una fita superior de 16. Això és degut a que la primera restricció està limitada superior i inferiorment. Quan les restriccions es troben limitades per dalt i per baix, no hi ha prou amb afegir una folga $f \geq 0$. En aquests casos cal imposar una fita superior sobre aquesta folga, i aquesta serà sempre igual a la diferència entre els termes independents de la restricció (al nostre cas: $20 - 4 = 16$, que serà la fita superior de f_1). Si no imposem aquesta fita superior sobre f_1 el problema obtingut no seria equivalent a l'original, ja que permetriem situacions on $2x_1 + x_2 + x_3 < 4$. Una forma alternativa de solucionar el problema, sense haver de crear una folga amb una fita superior, hagués estat dividir la restricció en dues ($l \leq c^T x \leq u \equiv \{c^T x \leq u \ , \ c^T x \geq l\}$) i afegir a cada una de les dues restriccions una folga i un escreix respectivament. En aquest cas, però, afegim una restricció més al problema, i també una nova variable, complicant-lo innecessàriament.

Encara no tenim el problema en la forma estàndard, ja que la folga f_1 té una fita superior. Per eliminar-la afegim una nova folga $f_3 \geq 0$ i una nova restricció $f_1 + f_3 = 16$:

$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 2\tilde{x}_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + 6 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & +\tilde{x}_2 & +\ x_3^+ & -\ x_3^- & +f_1 & & & = & 17 \\ 3x_1 & -\tilde{x}_2 & +2x_3^+ & -2x_3^- & & +f_2 & & = & 9 \\ & & & & f_1 & & +f3 & = & 16 \end{array} \\ & x_1 \geq 0 \quad \tilde{x}_2 \geq 0 \quad x_3^+ \geq 0 \quad x_3^- \geq 0 \quad f_1 \geq 0 \quad f_2 \geq 0 \quad f_3 \geq 0 \end{array}$$

Cal fer notar que en comptes de considerar $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, es podria haver eliminat x_3 d'una restricció (després de transformar-la en restricció d'igualtat) i sustituir el seu valor a l'altra equació (tot reduint el nombre de files del problema). Es deixa al lector l'aplicació d'aquesta altra tècnica.

Solució del problema 55.

El fet de que a la funció objectiu aparegui la funció logarisme, que a les fites de variables intervingui la funció exponencial, i que les restriccions no siguin més que productes i quocients de variables, ens donen suficients arguments per considerar un canvi de variable com ara:

$$\tilde{x}_i = \ln x_i \quad i = 1, 2, 3$$

És important fer notar que la funció ln té la propietat de mantenir les desigualtats. És a dir:

$$a \geq b \Leftrightarrow \ln a \geq \ln b$$

Això és degut a que la funció ln és monòtona creixent (sempre creix). Per tant, podem aplicar la funció logarisme neperià a les restriccions de desigualtat i fites de les variables sense variar la naturalesa del problema. Per tant, el problema original pot ser escrit com:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \ln x_1 \\ \text{subj. a} & \\ & \ln(x_1x_2x_3) \geq \ln(e^5) \\ & \ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_3 \\ & \ln x_1 \leq \ln(e^2) \quad \ln x_2 \geq \ln(e^4) \\ & \ln x_3 > -\infty \end{array} \iff \begin{array}{rl} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & \tilde{x}_1 \\ \text{subj. a} & \\ & \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 \geq 5 \\ & \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = 0 \\ & \tilde{x}_1 \leq 2 \quad \tilde{x}_2 \geq 4 \quad \tilde{x}_3 \text{ lliure} \end{array}$$

Adonem-nos que el canvi de variable $\tilde{x}_i = \ln x_i$ està ben definit per a tots el valors possibles de x_i gràcies a que $x_1 > 0$ i $x_3 > 0$. Si x_1 o x_3 poguessin prendre el valor 0, no podríem definir la funció ln en aquests punts. Aquest és el motiu pel qual s'han definit les variables x_1 i x_3 com estrictament positives.

Podem simplificar el problema anterior aïllant $\tilde{x}_3$ de la segona equació (la d'igualtat), ja que $\tilde{x}_3$ és una variable lliure, obtenint:

$$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$$

Substituint el valor anterior de $\tilde{x}_3$ a la primera equació (la de desigualtat) obtenim:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &\geq 5 \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) &\geq 5 \\ 2\tilde{x}_1 &\geq 5 \\ \tilde{x}_1 &\geq 5/2 \end{aligned}$$

Hem obtingut un límit inferior de $\tilde{x}_1$, per tant. Observem, però, que $\tilde{x}_1$ tenia ja una fita superior de 2. Com que no es pot garantir alhora que $\tilde{x}_1 \geq 5/2$ i $\tilde{x}_1 \leq 2$, directament podem concloure que el nostre problema és infactible.

Solució del problema 56.

L'equació $|3x_1 - 2x_2| \leq 3$ ens està dient que $3x_1 - 2x_2$ ha de prendre valors entre -3 i 3. Per tant podem escriure aquesta restricció com:

$$-3 \leq 3x_1 - 2x_2 \leq 3$$

i ja tindríem un problema de programació lineal.

En el cas que la restricció fos $|3x_1 - 2x_2| \geq 3$, això voldria dir que $3x_1 - 2x_2$ ha de prendre valors ≥ 3 **o** ≤ -3. En el cas anterior, però, havia de prendre valors ≥ -3 **i** ≤ 3. La diferència està en que abans havíem de satisfer dues condicions alhora (per això tenim "**i**"), i ara tenim que només cal satisfer una o l'altra ("**o**"). Les condicions "**i**" són molt fàcils de tractar en programació lineal, només cal anar afegint una nova equació per a cada condició (ja que el punt solució ha de satisfer totes les restriccions del nostre problema). Les condicions "**o**" no poden ser tractades de forma tan simple. Caldria afegir variables enteres i, en aquest cas, no seria ja un problema de programació lineal.

Solució del problema 57.

El problema original

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T|x| \\ \text{subj. a} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

pot ser transformat en un d'equivalent dividint les variables x de forma

$$x = x^+ - x^- \quad x^+ \geq 0 \quad x^- \geq 0$$

En aquest cas estem considerant que els x_i^+ seran la part positiva de x_i, mentre que els x_i^- seran la part negativa de x_i (x_i^+, x_i^- i x_i fan referència a la component i-èssima del vector x^+, x^- i x respectivament). El nou problema equivalent és:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T(x^+ - x^-) \\ \text{subj. a} \quad & A(x^+ - x^-) = b \\ & x_i^+ \cdot x_i^- = 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

La darrera restricció ens obliga a que es verifiqui sempre que $x_i^+ = 0$ o $x_i^- = 0$ (o les dues condicions alhora). Si $x_i^+ > 0$, llavors x_i és positiu. Si $x_i^- > 0$, x_i serà negatiu. Aleshores, la funció objectiu $c^T(x^+ - x^-)$ equival a $c^T|x|$.

El nou problema equivalent té l'inconvenient de que no és un problema de programació lineal (degut a les restriccions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$). Tanmateix, podem mirar de solucionar aquest problema sense aquestes restriccions. Si les eliminem, el problema resultant sí que és de programació lineal. El nou problema sense les restriccions no lineals s'anomena problema "relaxat" (rep aquest nom perque és un problema menys restrictiu, més "laxe", degut a que hem eliminat unes determinades restriccions). El que farem és, a partir de la solució òptima del problema relaxat lineal, trobar una d'alternativa que satisfaci les restriccions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$ i que sigui igualment òptima. Aleshores, ja haurem vist com solucionar el problema original a través de la solució d'un problema de programació no lineal.

Considerem que x_i^{*+}, x_i^{*-} és la solucó del nostre problema relaxat

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T(x^+ - x^-) \\ \text{subj. a} \quad & A(x^+ - x^-) = b \end{aligned}$$

Podem definir una solució alternativa que satisfaci $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$ de forma

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^+ &= x_i^{*+} - m_i \\ \tilde{x}_i^- &= x_i^{*-} - m_i \end{aligned} \qquad \text{on } m_i = \min\{x_i^{*+}, x_i^{*-}\}$$

Ara comprovem que el nou punt $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ és factible i òptim per al problema relaxat:

$$\text{(Factible)} \quad A(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-) = A(x^{*+} - m - (x^{*-} - m)) = A(x^{*+} - x^{*-}) = b$$

$$\text{(Òptim)} \quad c^T(\tilde{x}^+ - \tilde{x}^-) = c^T(x^{*+} - m - (x^{*-} - m) = c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^T m \le c^T(x^{*+} - x^{*-})$$

En el darrer pas, podem garantir que $c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^T m \le c^T(x^{*+} - x^{*-})$ gràcies a que tots el valors m_i calculats són positius (ja que són el mínim de dues quantitats positives), i a que l'enunciat del problema ens diu que el vector de costos c té totes les components positives. Per tant el terme $-2c^T m$ és sempre ≤ 0.

Donat que x_i^{*+}, x_i^{*-} era l'òptim del problema relaxat, això vol dir que cap altre punt factible pot tenir un valor més petit de funció objectiu. Això vol dir que el punt alternatiu $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ té el mateix valor de funció objectiu que x_i^{*+}, x_i^{*-} (és a dir, que la desigualtat abans obtinguda $c^T(x^{*+} - x^{*-}) - 2c^T m \le c^T(x^{*+} - x^{*-})$ és de fet una igualtat). El nou punt $\tilde{x}^+, \tilde{x}^+$ és doncs òptim del problema relaxat, i satisfà les equacions $x_i^+ \cdot x_i^- = 0$. Per tant és òptim del problema no lineal, i també del problema original amb el valor absolut a la funció objectiu. Cal notar que hem solucionat el problema original mitjançant la resolució d'un problema de programació lineal, i una traslació a posteriori del punt solució d'aquest darrer.

Solució del problema 58.

La resposta és que la companyia sí podrà solucionar el problema amb els paquets de programació lineal de que disposa. El problema, però, ha de ser transformat prèviament. Una possible forma seria crear una nova variable $y \in \mathbb{R}$, que representarà el cost de producció i serà la variable a minimitzar. Donat que es vol que en un punt x el cost de producció sigui el màxim de $c_A^T x$, $c_B^T x$, i $c_C^T x$, només hem d'imposar que y sigui més gran que els tres termes anteriors.

Llavors podem escriure el problema original com:

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{subj. a} \quad & \\ & Ax = b \\ & y \geq c_A^T x \\ & y \geq c_B^T x \\ & y \geq c_C^T x \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

amb el qual queda transformat en un problema de programació lineal que ara sí pot ser solucionat per la companyia.

Solució del problema 59.

La tercera restricció ja té la desigualtat escrita de forma $\leq$. La segona desigualtat pot ser escrita com

$$a_2^T x \geq b_2 \quad \Leftrightarrow \quad -a_2^T x \leq -b_2$$

La primera restricció és d'igualtat. El conjunt de punts que satisfan $a_1^T x = b_1$ podem considerar-los com aquells que pertanyen a la intersecció dels dos semiespais:

$$\begin{aligned} a_1^T x \leq b_1 \\ a_1^T x \geq b_1 \end{aligned}$$

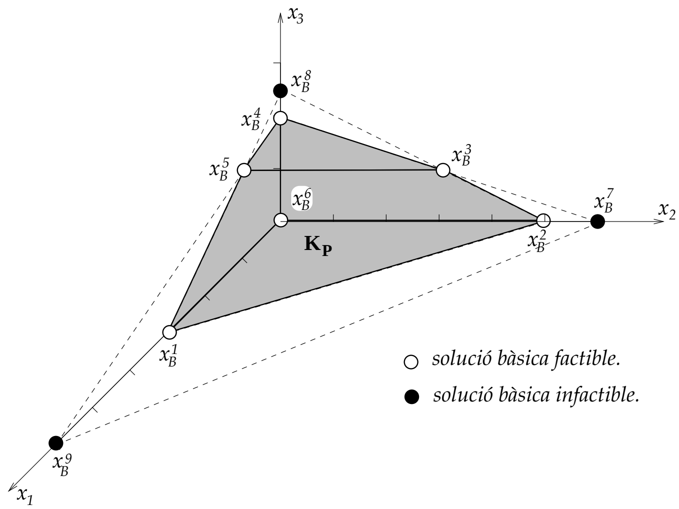
Llavors el problema original pot ser escrit amb totes les restriccions $\leq$ com:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subj. a} \quad & \\ & a_1^T x \leq b_1 \\ & - a_1^T x \leq -b_1 \\ & - a_2^T x \leq -b_2 \\ & a_3^T x \leq b_3 \end{aligned}$$

6.3 Solucions bàsiques.

Solució del problema 60.

Representem gràficament la regió factible $\mathrm{K_P}$ i els vèrtexs associats a les solucions bàsiques:



Introduïm les varibles de folga x_4 i x_5:

$$
(\mathbf{PL}) \begin{cases} \min \quad z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \quad \text{s.a.:} \\ \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 15 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}
$$

a) Solucions bàsiques factibles:

$$* \; x_B^1\text{: } \mathcal{B} = \{1,4\} \quad , \quad x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad , \quad z^1 = 15$$

$$* \; x_B^2\text{: } \mathcal{B} = \{2,4\} \quad , \quad x_B^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad z^2 = 15$$

$$* \; x_B^3\text{: } \mathcal{B} = \{2,3\} \quad , \quad x_B^3 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad z^3 = 10$$

$$* \; x_B^4\text{: } \mathcal{B} = \{3,5\} \quad , \quad x_B^4 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad z^4 = 2$$

$$* \; x_B^5\text{: } \mathcal{B} = \{1,3\} \quad , \quad x_B^5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix} \quad , \quad z^5 = 20/3$$

$$* \; x_B^6\text{: } \mathcal{B} = \{4,5\} \quad , \quad x_B^6 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} \quad , \quad z^6 = 0$$

Observant el valors de la funció objectiu z^j queda clar que la solució del problema **(PL)** és $\mathcal{X}^* = x_B^6$. Observi's que si es desitjés maximitzar la funció objectiu $z = 5x_1 + 3x_2 + x_3$ ens trobariem devant d'una solució amb òptims alternatius: el conjunt solució $\mathcal{X}^*$ en aquest cas seria el segment de recta definit per les solucions bàsiques x_B^1 i x_B^2, és a dir :

$$\mathcal{X}^* = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha x_B^1 + (1-\alpha)x_B^2 \; , \; \forall \alpha \in [0,1]\}$$

b) Solucions bàsiques infactibles:

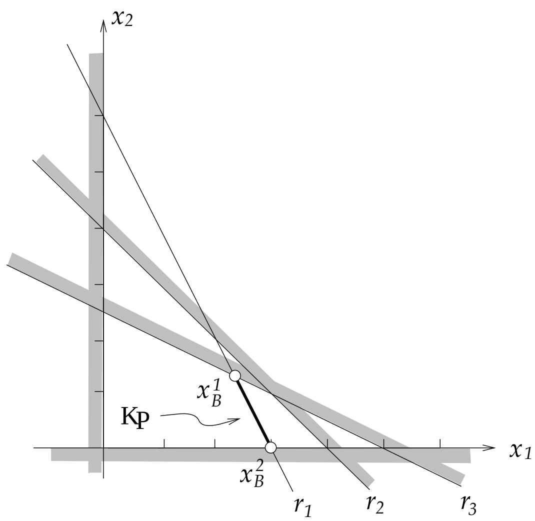
$* \; x^7_B$: $\mathcal{B} = \{2,5\}$, $x^7_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \ngeq 0$

$* \; x^8_B$: $\mathcal{B} = \{3,4\}$, $x^8_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} \ngeq 0$

$* \; x^9_B$: $\mathcal{B} = \{1,5\}$, $x^9_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} \ngeq 0$

Solució del problema 61.

a) Representem gràficament la regió factible K_P:

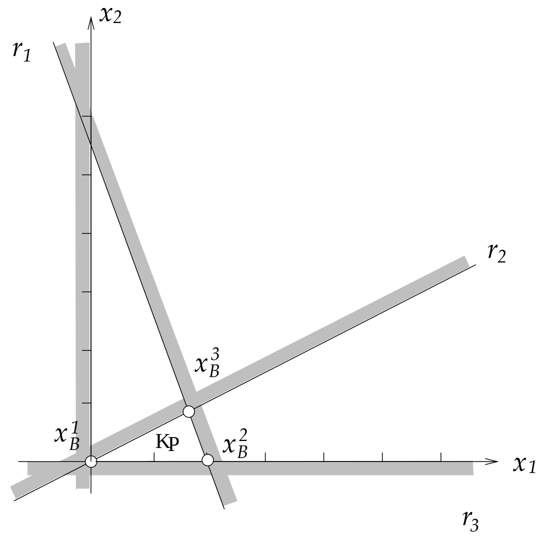


on r_1 és la recta associada a la primera constriccó, r_2 la recta associada a la segona constricció i r_3 la recta associada a la tercera constricció. Les variables x_3 i x_4 representaran les folgues de la segona i tercera constricció respectivament. En aquest cas, el polítop K_P és el segment de recta entre els dos únic punts extrems x^1_B i x^2_B:

$* \; x^1_B$: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$, $x^1_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$, $z^1 = 31/3$

$* \; x^2_B$: $\mathcal{B} = \{1,3,4\}$, $x^2_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z^1 = 15$

b) Representem gràficament la regió factible K_P:



on r_1 és la recta associada a la primera constriccó, r_2 la recta associada a la segona constricció i r_3 la recta associada a la tercera constricció. Les variables x_3 i x_4 repressentaran, respectivament, les folgues de la segona i tercera constricció. En aquest cas es produeix degeneració sobre el vèrtex situat a l'origen de coordenades: n'hi ha tres solucions bàsiques (x_B^{1a},x_B^{1b} i x_B^{1c}) associades a aquest vèrtex:

* x_B^{1a}: $\mathcal{B} = \{3,2\}$, $x_B^{1a} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1a} = 0$
* x_B^{1b}: $\mathcal{B} = \{3,1\}$, $x_B^{1b} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1b} = 0$
* x_B^{1c}: $\mathcal{B} = \{3,4\}$, $x_B^{1c} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $z^{1c} = 0$
* x_B^{2}: $\mathcal{B} = \{1,4\}$, $x_B^{2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $z^{2} = -8$
* x_B^{3}: $\mathcal{B} = \{1,2\}$, $x_B^{3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$, $z^{3} = -6$

6.4 Algorisme del símplex.

Solució del problema 62.

Per calcular una solució factible apliquem la fase I del simplex. Passem a la forma estàndar , introduïm una variable artificial a la tercera constricció i iterem amb una funció objectiu $z = x_6$, on x_6 és la variable artificial :

$$T_a^0 = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 1 & 3/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ \boxed{4} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \end{array} \qquad T_a^1 = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1/4 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & \boxed{1/2} & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/4 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -1/2 & 0 & 1/4 & 1 & 0 & -3 \end{array}$$

$$T_a^3 = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline -2 & 0 & 1 & -3/4 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Donat que $r_N \geq 0$, T_a^3 és el tableau òptim del problema artificial de la fase I. Hem assolit l'òptim de la fase I sense eliminar les infactibilitats (x_6 continua sent bàsica) $\Rightarrow$ no existeix cap solució factible.

Solució del problema 63.

a) Passem el problema a la forma estàndar introduïnt les variables de folga x_3 i x_4:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Es realitzen els càlculs previs a l'aplicació de l'algorisme del simplex:

$$\mathcal{B}^0 = \{1,2\} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r'_N = c'_N - c'_B B^{-1} N = [\,0 \quad 0\,] - [\,-1 \quad -2\,] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,-1 \quad 3\,]$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = y_0$$

- **Primera iteració:**

1.- Detecció d'òptim: $r_N = [\,-1 \quad 3\,] \not\geq 0 \Rightarrow$ no òptim.

2.- Selecció de la variable d'entrada: $r_3 = -1 \Rightarrow x_3$ v.n.b. d'entrada.

3.- Detecció prob. il·limitat: $y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \not\leq 0$

4.- Selecció de la variable de sortida:
$\dfrac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min\limits_{i=1,2,3,4} \{ \dfrac{y_{i0}}{y_{iq}} \mid y_{iq} > 0 \} = \min\{1/1\} = 1 = \dfrac{y_{10}}{y_{13}} \Rightarrow p = 1\,,\ \mathcal{B}_p = 1 \Rightarrow x_1$ v.b. de sortida.

5.- Canvi de base: $\mathcal{B} \leftarrow \{3,2\}$; $\mathcal{N} \leftarrow \{1,4\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r'_{_N} = [\,-1 \quad 0\,] - [\,0 \quad -2\,] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [\,1 \quad 2\,]$$

$$x_{_B} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **Segona iteració:**

1.- Detecció d'òptim: $r_{_N} = [\,1 \quad 2\,] \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{òptim}}$:

$\mathcal{B}^* = \{3,2\}$; $x^*_{_B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) El problema $(\widetilde{\mathbf{PL}})$ és

$$(\widetilde{\mathbf{PL}}) \begin{cases} \min & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{forma estàndar} \rightarrow (\widetilde{\mathbf{PL}}) \begin{cases} \min & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

El problema artificial associat a $(\widetilde{\mathbf{PL}})$ és:

$$(\widetilde{\mathbf{PL}}_a) \begin{cases} \min & z = x_5 \\ \text{s.a.:} & \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Resolució de $(\widetilde{\mathbf{PL}}_a)$ amb el simplex tabular:

$$\tilde{T}^0_a = \begin{array}{|ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array} \quad ; \quad \tilde{T}^1_a = \begin{array}{|ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$r_{_N} \geq 0 \Rightarrow$òptim

La base òptima de $(\widetilde{\mathbf{PL}}_a)$, $\mathcal{B}^*_a = \{1,4\}$, no conté la variable artificial $x_5 \Rightarrow \mathcal{B} = \{1,4\}$ és una base factible per a $(\widetilde{\mathbf{PL}})$. El tableau inicial $\tilde{T}^0$ corresponent a aquesta base es calcula a partir de $\tilde{T}^1_a$:

$$\tilde{T}^0 = \begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 3/2 \\ & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ \hline & 0 & -3/2 & -1/2 & 0 & 3/2 \end{array}$$

Solució del problema 64.

Forma estàndar:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = -4x_1 - 12x_2 - 3x_3 \\ \text{subj.a}: \quad \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1125 \\ \quad x_1 + x_5 = 1000 \\ \quad x_2 + x_6 = 500 \\ \quad x_3 + x_7 = 1500 \\ \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Primera iteració : solució bàsica inicial factible : $\mathcal{B} = \{4,5,6,7\}$, $B = I$. $\mathcal{N} = \{1,2,3\}$

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [\,-4 \quad -12 \quad -3\,] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_1 = -12 < 0 \Rightarrow x_2$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \nleq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- *Selecció de la variable de sortida :*$y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1125 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix}$; $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}}/y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{1125}{1}, \frac{500}{1}\} = 500 \Rightarrow \quad x_6 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- *Canvi de base :*

$$\mathcal{B} = \{4,5,2,7\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segona iteració : $\mathcal{B} = \{4,5,2,7\}\mathcal{N} = \{1,3,6\}$

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [-4 \quad -3 \quad 12] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_1 = -4 < 0 \Rightarrow$ $x_1$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nleq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- *Selecció de la variable de sortida :*$y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 625 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix}$; $y_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}}/y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{625}{1/2}, \frac{1000}{1}\} = 1000 \Rightarrow \quad x_5 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- *Canvi de base :*

$$\mathcal{B} = \{4,1,2,7\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tercera iteració : $\mathcal{B} = \{4,1,2,7\}\mathcal{N} = \{3,5,6\}$

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [-3 \quad 4 \quad 12] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_3 = -3 < 0 \Rightarrow$ $x_3$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \nleq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- *Selecció de la variable de sortida :*$y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 125 \\ 1000 \\ 500 \\ 1500 \end{bmatrix}$; $y_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}}/y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{125}{1/3}, \frac{1500}{1}\} = 375 \Rightarrow \quad x_4 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- *Canvi de base :*

$$\mathcal{B} = \{3,1,2,7\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Quarta iteració : $\mathcal{B} = \{3, 1, 2, 7\} \mathcal{N} = \{4, 5, 6\}$

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [\,9 \quad -\frac{1}{2} \quad 3\,] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- *Selecció variable d'entrada :* $r_5 = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x_5$variable d'entrada.

3.- *Detecció pb. il.limitat :*

$$y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \nleq 0 \quad \text{no es detecta pb. il.limitat}$$

4.- *Selecció de la variable de sortida :*$y_0 = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 375 \\ 1000 \\ 500 \\ 1125 \end{bmatrix}$; $y_5 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3,4} \{\frac{y_{i0}}{y_{iq}} / y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{1000}{1}, \frac{1125}{3/2}\} = 750 \Rightarrow \quad x_7 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- *Canvi de base :*

$$\mathcal{B} = \{3, 1, 2, 5\} \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Quinta iteració : $\mathcal{B} = \{3, 1, 2, 5\} \mathcal{N} = \{4, 6, 7\}$

1.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = [\,8 \quad 4 \quad \frac{1}{3}\,] \geq 0 \Rightarrow$ òptim

$x_B = B^{-1}b = [\,x_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_5\,]' = [\,1500 \quad 250 \quad 500 \quad 750\,]'$

Solució del problema 65.

Solucionem cada un dels apartats. Ens caldrà conèixer la inversa de la matriu B:

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) El valor de les variables bàsiques a l'òptim és de

$$x_B^* = B^{-1}b = (\,4 \quad 1/3 \quad 1/3\,)^T$$

La quarta variable no bàsica té un valor de 0.

b) La solució dual y pot ser calculada com

$$y^{*T} = c_B^T B^{-1} = (\,2/3 \quad -1/3 \quad 2/3\,)$$

c) Si x_4 ha de ser no bàsica s'ha de garantir que el seu cost reduït ρ_4 no sigui positiu. Per tant tenim:

$$0 \leq \rho_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = c_4 - (\,2/3 \quad -1/3 \quad 2/3\,) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_4 - 4/3$$

Llavors $c_4 \geq 4/3$ per garantir que x_4 és no bàsica.

d) Per veure si continua essent òptima només hem de veure si $\tilde{x}_B = B^{-1}\tilde{b} \geq 0$, ja que el vector de termes independents no intervé en la determinació dels costos reduïts i només ens pot afectar fent-nos perdre la no-negativitat de les variables. Observem que

$$\tilde{x}_B = B^{-1}\tilde{b} = (\,4 \quad 2/3 \quad 2/3\,)^T \geq 0$$

i per tant la base continua essent òptima. La diferència entre la funció objectiu amb b i amb $\tilde{b}$ és de

$$c_B^T \tilde{x}_B - c_B^T x_B^* = 4 + 4/3 - (4 + 2/3) = 2/3$$

que correspon exactament amb l'increment del vector b

$$\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

multiplicat per la solució dual ($y^{*T} = (\,2/3 \quad -1/3 \quad 2/3\,)$):

$$y^{*T} \Delta b = 2/3 = c_B^T \tilde{x}_B - c_B^T x_B^*$$

Es deixa al lector que comprovi com aquest efecte es manté per al nou vector de termes independents perturbat $\hat{b}$.

Solució del problema 67.

Primer hem d'aplicar la fase I per trobar un punt inicial factible, a partir del qual iterarem. Afegint les variables artificials x_5, x_6 i x_7, de costos 1, i multiplicant per -1 a ambdós costats de la primera restricció (per tal de tenir el terme de la dreta positiu), el problema a solucionar a la fase I és:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,\ldots,x_7} & x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & 2x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & & & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & & +x_6 & & = & 6 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & = & 5 \end{array} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7 \end{array}$$

Directament obtenim la solució (bàsica): $x_i = 0,\ i = 1, \ldots, 4,\ x_5 = 3,\ x_6 = 6,\ x_7 = 5$. A partir d'aquest punt inicial factible, les taules del símplex que anem obtenint successivament són (es marca amb un requadre el pivot a cada iteració):

Iteracions de la Fase I

Iteració 0

$\boxed{2}$	2	-1	-1	1	0	0	3
1	2	3	0	0	1	0	6
2	2	1	1	0	0	1	5
-5	-6	-3	0	0	0	0	-14

Iteració 1

1	$\boxed{1}$	-0.5	-0.5	0.5	0	0	1.5
0	1	3.5	0.5	-0.5	1	0	4.5
0	0	2	2	-1	0	1	2
0	-1	-5.5	-2.5	2.5	0	0	-6.5

Iteració 2

1	1	-0.5	-0.5	0.5	0	0	1.5
-1	0	$\boxed{4}$	1	-1	1	0	3
0	0	2	2	-1	0	1	2
1	0	-6	-3	3	0	0	-5

Iteració 3

0.875	1	0	-0.375	0.375	0.125	0	1.875
-0.25	0	1	0.25	-0.25	0.25	0	0.75
$\boxed{0.5}$	0	0	1.5	-0.5	-0.5	1	0.5
-0.5	0	0	-1.5	1.5	1.5	0	-0.5

Iteració 4

0	1	0	-3	1.25	1	-1.75	1
0	0	1	1	-0.5	0	0.5	1
1	0	0	3	-1	-1	2	1
0	0	0	0	1	1	1	0

Hem obtingut una solució factible del problema original on els valors de les variables artificials són 0. Ara podem iniciar la fase II a partir de la base òptima obtinguda a la fase I.

Iteracions de la Fase II

Iteració 0

1	0	0	$\boxed{3}$	1
0	1	0	-3	1
0	0	1	1	1
0	0	0	-1	0

Iteració 1

1/3	0	0	1	1/3
1	1	0	0	2
-1/3	0	1	0	2/3
1/3	0	0	0	1/3

Hem arribat a un punt on el cost reduït de la variable no bàsica és positiu. El valor mínim de la funció objectiu és de $-1/3$ i l'òptim assolit és:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 2/3 \quad x_4 = 1/3$$

Solució del problema 68.

Donat que hi ha una restricció de desigualtat, abans de res afegim una folga x_5 per tenir el problema en forma estàndard:

$$\begin{array}{rl}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5} & x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{ccccccc}
x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 4 \\
2x_1 & -x_2 & +x_3 & & & = & 5 \\
x_1 & -2x_2 & & +x_4 & & = & 3
\end{array} \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 5
\end{array}$$

Ara ens hem d'adonar que directament ja podem obtenir una solució bàsica i factible:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 3 \quad x_5 = 4$$

Per tant ens podem estalviar la fase I i les taules que obtenim són (es marca el pivot usat a cada iteració amb un requadre):

Iteració 0

1	1	0	0	1	4
$\boxed{2}$	-1	1	0	0	5
1	-2	0	1	0	3
-1	0	0	0	0	-5

Iteració 1

0	$\boxed{1.5}$	-0.5	0	1	1.5
1	-0.5	0.5	0	0	2.5
0	-1.5	-0.5	1	0	0.5
0	-0.5	0.5	0	0	-2.5

Iteració 2

0	1	-1/3	0	2/3	1
1	0	1/3	0	1/3	3
0	0	-1	1	1	2
0	0	1/3	0	1/3	-2

L'òptim del nostre problema és doncs:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 0$$

Solució del problema 69.

Les solucions de cada problema són:
a)

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0.5 \quad x_4 = 0$$

b) Problema infactible.
c) Problema il·limitat.
d)

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 1/3 \quad x_3 = 1/3$$

6.5 Anàlisi post-òptima.

Solució del problema 71.

a) Una solució bàsica és òptima si és factible primal i dual.
Factibilitat primal: la solució bàsica $x = [\, x_B \;\; | \;\; 0\,]'$ amb $x_B = B^{-1}b$ satisfà $Ax = b$

per construcció. Serà factible primal si $x_B \geq 0$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad x_B \geq 0 \Rightarrow \text{factible primal.}$$

Factibilitat dual: $x = [\, x_B \mid 0\,]'$ serà factible dual si $r_N \geq 0$:

b)

$$(\mathbf{D}) \begin{cases} \max\limits_{\lambda} \quad z_{(D)} = 20\lambda_1 + 40\lambda_2 + 15\lambda_3 \\ \text{subj.a :} \quad 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 10 \\ \qquad 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 2 \\ \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \leq 3 \\ \qquad \lambda_1 \; , \; \lambda_2 \leq 0 \\ \qquad \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

El valor de les variables duals λ ja ha estat calculat a l'apartat anterior:

$$\lambda' = [\, -1 \quad 0 \quad 4\,] \begin{cases} \lambda_1 = -1 \leq 0 & \text{correcte} \\ \lambda_2 = \;\; 0 \leq 0 & \text{correcte} \\ \lambda_3 = \;\; 4 \geq 0 & \text{correcte} \end{cases}$$

c) Desitgem provocar una disminució dels costos de 10 unitats, és a dir, $\Delta z = -10$. El valor de la funció objectiu pot ser modificat a través de variacions del vector de termes independents. No es permet de modificar les dues primeres components, la qual cosa obliga a disminuir el valor de la funció objectiu modificant b_3:

$$\Delta z = \lambda' \Delta b = [\, -1 \quad 0 \quad 4\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = 4\Delta b_3 = -10 \quad \Rightarrow \quad \Delta b_3 = -2.5$$

La disminució de z repercuteix en la demanda que es por satisfer, fent que disminueixi fins a un valor de $\hat{b}_3 = b_3 + \Delta b_3 = 12.5$. Aquest nou valor de b_3 conserva la factibilitat primal:

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 12.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 5 \\ 22.5 \end{bmatrix} \quad \geq 0 \quad \Rightarrow \text{factible Primal}$$

d) La modificació de c_1 només pot afectar al cost reduït de la variable x_1, donat que no és bàsica. Convé produir x_1 a partir del valor de c_1 que provoqui un cost reduit negatiu:

$$r_1 = c_1 - \lambda' a_1 = c_1 - [\, -1 \quad 0 \quad 4\,] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 - 1 < 0 \quad ; \quad c_1 < 1$$

c_1 haurà de disminuir per sota de $c_1 = 1$ per tal que convingui la seva fabricació.

e) El tableau del simplex associat a la base B és:

$$T = \begin{array}{|c|c|c} \text{I} & Y = B^{-1}N & y_0 = B^{-1}b \\ \hline 0 & r'_N = c'_N - \lambda' N & -z_0 \end{array}$$

En el nostre cas:

Solució del problema 72.

a) La solució bàsica associada a la base $\mathcal{B}^*$ és :

$$x^*_B = {B^*}^{-1} b = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solució dual associada a x^*_B és :

$$\lambda' = c'_B {B^*}^{-1} = [\,-2 \quad -1 \quad -4\,] \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix} = [\,-11/10 \quad -9/20 \quad -1/4\,]$$

Comprovem ara el teorema de la folga complementària:

$\underline{x_i(c_j - \lambda' a_j) = 0 \quad i = 1, \ldots, m}$

$x_1 = 2 \Rightarrow c_1 - \lambda' a_1 = 0 \quad ; \quad -2 - 1 \times (\frac{-11}{10}) - 2 \times (\frac{-9}{20}) - 0 \times (\frac{-1}{4}) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ correcte

$x_2 = 2 \Rightarrow c_2 - \lambda' a_2 = 0 \quad ; \quad -4 - 3 \times (\frac{-11}{10}) - 1 \times (\frac{-9}{20}) - 1 \times (\frac{-1}{4}) = -4 + 4 = 0 \Rightarrow$ correcte

$x_3 = 1 \Rightarrow c_3 - \lambda' a_3 = 0 \quad ; \quad -1 - 0 \times (\frac{-11}{10}) - 0 \times (\frac{-9}{20}) - 4 \times (\frac{-1}{4}) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow$ correcte

$\underline{\lambda_j(b_j - a^j x) = 0}$

$\lambda_1 = -11/10 \Rightarrow x_5 = b_1 - a^1 x = 0$: x_5 no básica=> correcte.

$\lambda_2 = \ -9/20 \Rightarrow x_6 = b_2 - a^2 x = 0$: x_6 no básica=> correcte.

$\lambda_3 = \ -1/4 \ \Rightarrow x_7 = b_3 - a^3 x = 0$: x_7 no básica=> correcte.

b) La formulació del problema artificial $(\widehat{\mathbf{PL}}_a)$ és:

$$(\widehat{\mathbf{PL}}_a) \left\{ \begin{array}{lllllllllllllll} \min & \mathrm{z_a} = & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ \text{subj.a :} & & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 8 & & \text{R1} \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & & & & x_6 & = & 6 & & \text{R2} \\ & & & & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_7 & = & 6 & & \text{R3} \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & & & \geq & & 0 & \end{array} \right.$$

i el tableau del simplex incial per a $(\widehat{\mathbf{PL}}_a)$ és:

$$T_a^0 = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -3 & -5 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}$$

c) Càlcul de l'interval d'estabilitat de b_2:

$$\hat{x}_B = B^{*-1}\begin{bmatrix} 8 \\ b_2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{5} + \frac{3}{5}b_2 \\ \frac{-8}{10} + \frac{6}{4} + \frac{b_2}{20} \\ \frac{16}{5} - \frac{b_2}{5} \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{ interval d'estabilitat: } \quad \underline{\frac{8}{3} \leq b_2 \leq 16}$$

$b_2 = 20 > 16 \quad \Rightarrow$ es perd la factibilitat primal. En una iteració del simplex dual s'obté el nou òptim:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	0	0	-1/5	-1/5	3/5	0	52/5
0	0	1	3/20	-1/10	1/20	1/4	17/10
0	1	0	2/5	2/5	$\boxed{-1/5}$	0	-4/5
0	0	0	7/20	11/10	9/20	1/4	193/10

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	3	0	1	1	0	0	8
0	1/4	1	1/4	0	0	1/4	3/2
0	-5	0	-2	-2	1	0	4
0	9/4	0	5/4	2	0	1/4	35/2

Solució òptima associada a $b_2 = 20$: $x_B^* = [\,x_1 \quad x_3 \quad x_6\,]' = [\,8 \quad 3/2 \quad 4\,]'$

d) Interessa produir x_8 si el seu cost reduït és negatiu:

$$r_8 = c_8 - \lambda' a_8 = -8 - [\,\frac{-11}{10} \quad \frac{-9}{20} \quad \frac{-1}{4}\,]\begin{bmatrix} 10 - 2\theta \\ 20 - \theta \\ 1 - 5\theta \end{bmatrix} = \frac{49}{4} - \frac{78}{20}\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta > \frac{245}{78}$$

Interessa produir x_8 a partir de $\theta = \frac{245}{78}$

Solució del problema 73.

a) La base estarà formada per tres variables. De les variables del nostre problema la x_1 i la x_3 són no nules i, conseqüentment, bàsiques. La tercera variable bàsica s'ha de buscar entre les folgues:

  * $x_5 = 9 - x_1 - 2x_2 = 9 - 2 = 7 > 0 \Rightarrow$ bàsica.
  * $x_6 = 2 - 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \Rightarrow$ no bàsica.

Si totes dues folgues haguessin estat nul·les la solució bàsica seria degenerada. La solució bàsica òptima és doncs:

$$x^*_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

La matriu bàsica i la seva inversa són:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad {B^*}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

b) Si $x^*_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$ és solució òptima, llavors els vector de costos reduïts és no negatiu: $r_2 \geq 0$ i $r_4 \geq 0$:

$$\lambda' = c'_B B^{-1} = [\,2 \quad 4 \quad 0\,] \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = [\,0 \quad -1/2 \quad 7/2\,]$$

$$r_2 = c_2 - \lambda' a_2 = c_2 - [\,0 \quad -1/2 \quad 7/2\,] \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = c_2 - 5/2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{c_2 \geq 5/2}$$

$$r_4 = c_4 - \lambda' a_4 = c_4 - [\,0 \quad -1/2 \quad 7/2\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = c_4 - 1/2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{c_4 \geq 1/2}$$

c) La nova variable x_5 (no confondre-la amb la folga de la primera constricció) serà bàsica si el seu cost reduït associat és negatiu ($r_5 < 0$) i si és possible fer la pivotació amb alguna variable bàsica ($y_5 = {B^*}^{-1} a_5 \not\leq 0$):

$$r_5 = c_5 - \lambda' a_5 = 3 - [\,0 \quad -1/2 \quad 7/2\,] \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{-1/2 < 0}$$

$$y_5 = {B^*}^{-1} a_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 31/4 \end{bmatrix} \underline{\not\leq 0}$$

Així doncs, x_5 esdevindrà varible bàsica al nou òptim.

Solució del problema 75.

a) Per a demostrar que una solució no és la millor possible s'han de comprovar les condicions d'optimalitat. Donat que $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ i $x_3 \neq 0$, aquestes s'han de prendre com a variables bàsiques. L'enunciat ens dona la inversa de la matriu bàsica corresponent a l'ordenació $\mathcal{B} = \{3, 1, 2\}$:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -032258 & -0.16129 & 1.29032 \\ -0.1935 & 0.40322 & -0.22580 \\ 0.5161 & -0.24193 & -0.06451 \end{bmatrix}$$

* *Factibilitat primal:* es comprova la condició de factibilitat primal $x_B \geq 0$:

* *Factibilitat dual:* es comprova la condició de factibilitat dual $r' = c'_N - c'_B B^{-1} N \geq 0$. Es calcula previament el vector $\lambda = c'_B B^{-1}$:

  i, seguidament, els costos reduïts:

b) $\mathcal{B} = \{3, 1, 2\}$, $\mathcal{N} = \{4, 5, 6\}$

Primera iteració :

1.- Detecció d'òptim :$r'_N = [-39.4758 \quad -4.193 \quad -0.4032] \ngeq 0 \Rightarrow$ no òptim

2.- Selecció variable d'entrada :$r_q = \min_{j \in \mathcal{N}}\{r_j\} = r_4 = -39.475 \Rightarrow x_4$variable d'entrada

3.- Detecció pb. il.limitat :

$$y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} -1.2096 \\ -1.4758 \\ 3.6854 \end{bmatrix} \nleq 0 \quad \text{no il.limitat}$$

4.- Selecció variable de sortida : $x_B = \begin{bmatrix} 0.4830 \\ 0.2903 \\ 0.2258 \end{bmatrix}$; $y_4 = \begin{bmatrix} -1.2096 \\ -1.4758 \\ 3.6854 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{p4}} = \min_{i=1,2,3}\{\frac{y_{i0}}{y_{i4}} \mid y_{i4} > 0\} = \min\{\frac{0.2258}{3.6854}\} = \frac{y_{30}}{y_{34}} \Rightarrow \quad x_{B3} = x_2 \text{ v.b. de sortida}$$

5.- Canvi de base : pivotació $x_4 \leftrightarrow x_2$:

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \backslash \{2\} \cup \{4\} = \{3, 1, 4\}$: aquesta base ja correspón a la solució òptima del tableau T^*:

$$x^*_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.558 \\ 0.381 \\ 0.061 \end{bmatrix} \quad ; \quad r^*_N = \begin{bmatrix} 10.711 \\ 1.335 \\ 2.188 \end{bmatrix} \quad ; \quad z^* = 21.291$$

c) Interessa introduir el nou carbó a la mescla òptima si el seu cost reduït és negatiu:

$$r_5 = c_5 - \lambda' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 15 - 19.7702 = -4.7702 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{millora la funció objectiu}}$$

Si x_5 entrés a la base milloraria la funció objectiu. Cal comprovar però que x_5 pot entrar a la base:

$$y_5 = B^{*-1} a_5 = \begin{bmatrix} 0.8753 \\ 0.0678 \\ 0.0569 \end{bmatrix} \nleq 0 \Rightarrow \boxed{\text{pot entrar a la base}}$$

Així doncs, interessa canviar la proporció de mescla introduïnt el nou carbó.

d) Comprovem si les normatives dels EUA i Japó fan variar l'optimalitat de $\mathcal{B}^* = \{3, 1, 4\}$:

$$* \text{ EUA: } \tilde{x}_B = {B^*}^{-1}\tilde{b} = {B^*}^{-1}\begin{bmatrix}1.1\\1.5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.7396\\0.2223\\0.3807\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva la factibilitat primal}}.$$

$$* \text{ Japó: } \tilde{x}_B = {B^*}^{-1}\tilde{b} = {B^*}^{-1}\begin{bmatrix}2.0\\2.5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.3610\\0.5405\\0.0985\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva la factibilitat primal}}.$$

Calculem ara la variació en la funció objectiu deguda a l'adequació de les proporcions òptimes a la legislació de cada pais. Haurem de fer ús del preus ombra λ:

$$\lambda' = {c_B}^* {B^*}^{-1} = [\,-1.335 \quad 2.1882 \quad 18.9168\,]$$

$* $ EUA: $\Delta z = \lambda'\Delta b = [\,-1.335 \quad 2.1882 \quad 18.9168\,]\begin{bmatrix}-0.4\\-0.5\\0\end{bmatrix} = -0.5602 < 0 \Rightarrow$ millora els costos de producció.

$* $ Japó: $\Delta z = \lambda'\Delta b = [\,-1.335 \quad 2.1882 \quad 18.9168\,]\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0\end{bmatrix} = 0.4267 > 0 \Rightarrow$ empitjora els costos de producció.

Decidim exportar als EUA, doncs la seva legislació admet unes proporcions òptimes amb uns costos de producció més baixos ($20.7308 \cdot 10^4$pts/Tm) que al Japó ($21.7177 \cdot 10^4$pts/Tm).

Solució del problema 76.

a) S'analitza la variació de la funció objectiu per increment del terme independent b_1 (llet de cabra): $\Delta z = \lambda_1 \Delta b_1$. De la taula òptima s'obté $\lambda_1 = -r_4 = -30 \Rightarrow$ un litre addicional de llet de cabra provoca un increment en el benefici total de $\Delta z = 30$pts$\Rightarrow$ el preu màxim que estariem disposats a pagar per un litre addicional de llet de cabra searia l'original (20pts) més $\Delta z = 30$: $\boxed{\text{50pts/l}} \Rightarrow \boxed{\text{no comprariem a 60pts/l}}$.

b) La tercera constricció no és activa, com mostra el fet que la seva variable d'excés x_6 sigui bàsica. Així doncs, si s'eliminés no afectaria la planificació òptima.

c) Si el preu venda del formatge 1 passes de 190pts a 320pts llavors el cost c_1 passaria de $c_1 = -30$ a $c_1 = -160$. Calculem els cost reduït de la variable x_1: $r_1 = -160 - [\,-30 \quad 0 \quad 0\,]\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix} = -10 < 0 \Rightarrow$ pèrdua de la factibilitat dual: es reoptimitza amb el simplex primal:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
$\boxed{3/2}$	0	-1/2	1/2	0	1	25	
-4	0	3	-1	1	0	50	$x_1 <\!-\!> x_6$
5/2	1	1/2	1/2	0	0	425	
-10	0	10	30	0	0	25500	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	0	-1/3	1/3	0	2/6	50/3
0	0	5/3	1/3	1	8/6	350/3
0	1	4/3	-1/3	0	-5/3	1150/3
0	0	20/3	12/3	0	20/3	77000/3

Nova planificació òptima: $\boxed{x^*_B = [\,x_1 \quad x_5 \quad x_2\,]' = [\,50/3 \quad 350/3 \quad 1150/3\,]'}$

d) Per tal que els formatges 1 i 2 entressin a formar part conjuntament de la planificació òptima haurien d'entrar a la base. Per tal que aquest canvi de base no afectés al benefici total caldria que es produís una situació on tant la base actual $\mathcal{B} = \{6, 5, 2\}$ com la nova base, amb x_3 com a variable bàsica fossin solucions òptimes alternatives. Això es pot aconsseguir portant el coeficient c_3 fins a un dels seus extrems del seu interval d'estabilitat:

∗ *Interval d'estabilitat de c_3:* $r_3 = c_3 - \lambda' a_3 = c_3 - [\,-30 \quad 0 \quad 0\,]\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix} = c_3 + 30 \geq 0.$

L'interval d'estabilitat de c_3 és $\boxed{c_3 \geq -30}$.

Si $c_3 = -30$ s'obté $r_3 = 0 \Rightarrow$ òptims alternatius. Podem entrar x_3 a la base sense que la funció objectiu augmenti. De la taula òptima s'obté $y_3 = [\,-1/2 \quad 3 \quad 1/2\,]'$ i $y_0 = [\,25 \quad 50 \quad 425\,]'$. La variable de sortida correspon al $\min_{1\leq i\leq 3}\{\frac{y_{i0}}{y_{i3}} | y_{i3} > 0\} = \min\{40/3, 2 \times 425\} = 40/3 \Rightarrow x_5$ variable bàsica de sortida $\Rightarrow$ nova base : $\mathcal{B} = \{6, 3, 2\}$

Solució del problema 77.

a) Primer es comprova si les modificacions introduïdes al vector de termes independents fan perdre l'optimalitat de la base:

∗ $\mathcal{B}^* = \{3, 5, 2\}$. B^{*-1} es pot obtenir de les columnes del tableau òptim associades a les dues folgues `SLK 2` i `SLK 3` i a la variable x_1, doncs aquesta variable té columna $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ al tableau inicial:

$$B^{*-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \texttt{SLK 2} & \texttt{SLK 3} & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

∗ $\Delta b_R = \begin{bmatrix}1/2\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\tilde{x}_B = B^{*-1}(b+\Delta b_R) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}9.5\\20\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\6\\2\end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva l'optimalitat de } \mathcal{B}^*}$$

$$* \ \Delta b_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_B = B^{*-1}(b+\Delta b_E) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{es conserva l'optimalitat de } \mathcal{B}^*}$$

Es calculen ara els costos marginals o preus ombra λ:

$$\lambda' = c'_B B^{*-1} = [\,-3 \quad 0 \quad -2.5\,] \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [\,-2 \quad 0 \quad -1\,]$$

Ampliació planta de refinat: $\Delta z = \lambda_1 \Delta b_1 = -2 \times 1/2 = -1$ milions. S'obté un increment de beneficis d'un milió de pessetes amb una inversió de 1.5 milions: no interessa.
Ampliació de la planta d'embassat: la constricció d'embassat no és activa. Això implica que un canvi de b_2 que conservi la factibilitat primal de $\mathcal{B}^*$ no afectarà mai al valor de la funció objectiu (els preus ombra de les constriccions inactives són sempre nuls). Així doncs, tampoc interessa invertir en aquesta planta.

b) Addició de x_6 amb $c_6 = -6$, $a_6 = [\,2 \quad 1.5 \quad 1\,]'$. Hem de comprovar la conservació de la fectibilitat dual:

$$r_6 = c_6 - \lambda' a_6 = -6 - [\,-2 \quad 0 \quad -1\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{interessa produir } x_6}$$

Solució del problema 78.

a) Transformant el problema a la seva forma estàndard obtenim la següent formulació:

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 - cx_2 - x_3 \\ \text{subjecte a} & \\ & \begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & 8 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 3 \end{array} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots 5, \end{array}$$

on $x_1^* = 3$, $x_2^* = x_3^* = 0$.
Per determinar el rang de valors de c cal estudiar com varien els costos reduïts $\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ en funció de c. Donat que no podem usar les taules del símplex, hem d'usar el símplex en forma matricial. Per tant hem de determinar la base òptima. Sabem que x_1 es básica a l'òptim perquè té un valor positiu. Calculem els valor de les folgues a l'òptim per determinar quina acompanyarà a x_1 a la base:

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot 3 - 0 + 0 + x_4 = 8 & \Rightarrow & x_4^* = 2 \\ 3 + 0 + 0 + x_5 = 3 & \Rightarrow & x_3^* = 0. \end{array}$$

Les variables básiques són, per tant, $\mathcal{B} = \{x_1, x_4\}$, de forma que les matrius B i N, i vectors

c_B i c_N són:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}^T \qquad c_N = \begin{pmatrix} -c & -1 & 0 \end{pmatrix}^T .$$

Usant les matrius i vectors anteriors, el vector ρ obtingut és:

$$\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = \begin{pmatrix} -c+2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Per a que la base actual continui essent òptima s'ha de garantir que $\rho \geq 0$, i per tant tenim que $c \leq 2$.

b) Sabem que la variació de la funció objectiu respecte el vector de termes independents b ve donada per

$$\frac{\partial \text{fobj}}{\partial b} = c_B^T B^{-1}.$$

Usant l'expressió de c_B i B que hem obtingut a l'apartat a), tenim que

$$\frac{\partial \text{fobj}}{\partial b} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

El nou vector de termes independents és $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 7.5 & 3.5 \end{pmatrix}^T$. Observem que amb aquest nou vector la base actual continua essent òptima:

$$B x_B = \tilde{b} \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 3.5 \geq 0, \; x_4^* = 0.5 \geq 0.$$

Així doncs, la variació de la funció objectiu Δfobj vindrà donada per:

$$\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \text{fobj} = (c_B B^{-1}) \cdot \Delta b = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = -1.$$

És a dir, la funció objectiu disminueix en una unitat.

Solució del problema 79.

a) Denotant per x_1 i x_2 el nombre d'hores impartides als curssos 1 i 2 respectivament, el problema obtingut pot ser formulat com:

$$\begin{array}{rll} \min & 5x_1 + P x_2 & \\ \text{subj. a} & 4x_1 + 2x_2 \leq 120 & \text{[restricció hores de preparació]} \\ & x_1 + x_2 \leq 40 & \text{[restricció hores d'impartició]} \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Transformant a la forma estàndard s'obté:

$$\begin{array}{rl} \min & 5x_1 + Px_2 \\ \text{subj. a} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 120 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 40 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, ..., 4 \end{array}$$

b) Considerem inicialment la taula següent (amb una solució bàsica i factible):

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{4} & 2 & 1 & 0 & 120 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 40 \\ \hline \text{-}5 & -P & 0 & 0 & \text{-}0 \end{array}$$

Podem millorar la funció objectiu entrant x_1 a la base i fent sortir la variable bàsica associada al mínim del "ratio test" ($\min\{120/4, 40\} = 30$), en aquest cas x_3. Pivotem i obtenim la següent taula:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 & 30 \\ 0 & \boxed{1/2} & \text{-}1/4 & 1 & 10 \\ \hline 0 & 5/2 - P & 5/4 & 0 & 150 \end{array}$$

Si $P \leq 5/2$, l'òptim és $x_1^* = 30$, $x_2^* = 0$. Si $P > 5/2$, però, encara podem millorar la funció objectiu. En aquest cas entrarem x_2 a la base i sortirà x_4 (proporciona el mínim del "ratio test" $\min\{30/(1/2), 10/(1/2)\} = 20$). La nova taula és:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \boxed{1/2} & \text{-}1 & 20 \\ 0 & 1 & \text{-}1/2 & 2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & (5 - P)/2 & 2P - 5 & 100 + 20P \end{array}$$

El cost reduït $\rho_4 = 2P - 5$ és sempre positiu si $P > 5/2$. Pel que fa a $\rho_3 = (5 - P)/2$, si $P < 5$ aquest cost reduït és ≥ 0, de forma que l'òptim del nostre problema ve donat per $x_1^* = 20$, $x_2^* = 20$. Si $P > 5$ podem continuar iterant ($\rho_3 < 0$), entrant x_3 a la base i fent sortir x_1. La nova taula és:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & \text{-}2 & 40 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 40 \\ \hline -5 + P & 0 & 0 & P & 40P \end{array}$$

Ara per a valors $P \geq 5$ la solució obtinguda $x_1^* = 0$, $x_2^* = 40$ ja és òptima.

Resumint, el nombre d'hores òptim per a cada curs en funció de P és el següent:

x_1^* hores al curs C1	x_2^* hores al curs C2	valor de P
30	0	$P \leq 2.5$ mil pts/h
20	20	$5 \geq P \geq 2.5$ mil pts/h
0	40	$P \geq 5$ mil pts/h

c) La representació gràfica dels resultats obtinguts a l'apartat b) es deixa al lector.

d) Si $P = 3$ ens trobem en la situació $2.5 \le P \le 5$ de l'apartat b). Utilitzant la taula òptima obtinguda en aquest cas, i usant un valor de $P = 3$ tenim

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & (5-P)/2 & 2P-5 & 100+20P \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 160 \end{array}$$

Quan es modifica la component b_i del vector de termes independents b sabem que la funció objectiu varia segons $y_i = (c_B^T B^{-1})_i$. En aquest cas $y^T = c_B^T B^{-1}$ pot ser directament obtingut de la taula del símplex, a partir dels costos reduïts de les folgues (usant que els seus costos son 0, i que les seves columnes dins la matriu de restriccions són columnes de la matriu identitat):

$$\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (\,0 \quad 0\,) - c_B^T B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -c_B^T B^{-1} N = -y^T \;\Rightarrow\; y^T = -\rho = (\,-1 \quad -1\,)\,.$$

És a dir, si augmentem en una unitat la primera o segona restricció obtenim el mateix guany de mil pts (passem de 160000 a 161000 pts). És indiferent, per tant, augmentar el nombre d'hores d'impartició o el preparació. El que sí que varia són les hores impartides en cada cas. Si passem de 120 a 121 hores de preparació, el nombre d'hores impartides a cada curs és de

$$x^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 121 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.5 \\ 19.5 \end{pmatrix}.$$

Si passem de 40 a 41 hores obtenim

$$x^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 120 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

6.6 Dualitat.

Solució del problema 81.

a)

$$\textbf{(PL)} \left\{ \begin{array}{lllll} \max & 2x_1 & +x_2 & & \\ \quad \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & = 2 & \Rightarrow \lambda_1 \text{ lliure} \\ & 2x_1 & -x_2 & \ge 3 & \Rightarrow \lambda_2 \le 0 \\ & x_1 & -x_2 & \le 1 & \Rightarrow \lambda_3 \ge 0 \\ & x_1 \ge 0 & & & \\ & \Downarrow & \Downarrow & & \\ & a_1'\lambda \ge c_1 & a_2'\lambda = c_2 & & \end{array} \right.$$

$$\boxed{\textbf{(D)}\left\{\begin{array}{llllll} \min & 2\lambda_1 & 3\lambda_2 & \lambda_3 & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & \lambda_1 & 2\lambda_2 & \lambda_3 & \geq 2 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & = 1 \\ & & \lambda_2 \leq 0, & \lambda_3 \geq 0 & \end{array}\right.}$$

b)

$$\textbf{(PL)}\left\{\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 2 & \Rightarrow \lambda_1 \geq 0 \\ & x_1 & & -x_3 & \geq 1 & \Rightarrow \lambda_2 \geq 0 \\ & & x_2 & +x_3 & = 1 & \Rightarrow \lambda_3 \text{ lliure} \\ & 2x_1 & +x_2 & & \leq 3 & \Rightarrow \lambda_4 \leq 0 \\ & & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & & \\ & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & & \\ & a_1'\lambda = c_1 & a_2'\lambda \leq c_2 & a_3'\lambda \leq c_3 & & \end{array}\right.$$

$$\boxed{\textbf{(D)}\left\{\begin{array}{lllllll} \max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +3\lambda_4 & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & & +2\lambda_4 & = 2 \\ & \lambda_1 & & +\lambda_3 & +\lambda_4 & \leq 4 \\ & \lambda_1 & -\lambda_2 & +\lambda_3 & & \leq 6 \\ & \lambda_1 \geq 0, & \lambda_2 \geq 0, & & \lambda_4 \leq 0 & \end{array}\right.}$$

Solució del problema 82.

a) $\mathcal{B}^0 = \{1,3,7\}$

$*$ *Factibilitat primal :*

$$x_B^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 36 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{factible primal}}$$

$*$ *Factibilitat dual :*

Algorisme del simplex primal :

Primera iteració :

1.- Detecció de òptim : $r_N' = [\,-1 \quad 7 \quad 4 \quad 12\,] \ngeq 0 \;\Rightarrow$ no òptim

2.- Selecció variable d'entrada : $r_2 = -1 < 0 \Rightarrow\;$ $x_2$variable d'entrada.

3.- Detecció pb. il.limitat : $y_2 = B^{-1}a_2 = [\,2 \quad 1 \quad 1\,]' \nleq 0 \quad$ no il.limitat

4.- *Selecció variable de sortida :* $x_B = \begin{bmatrix} 17 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$; $y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{y_{p0}}{y_{pq}} = \min_{i=1,2,3}\{\frac{y_{i0}}{y_{iq}}/y_{iq} > 0\} = \min\{\frac{17}{2}, \frac{2}{1}, \frac{9}{1}\} = \frac{2}{1} \Rightarrow \quad x_3 \text{ v.b. de salida}$$

5.- *Canvi de base :* $\mathcal{B} = \{1, 2, 7\}$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Segona iteració :

6.- *Detecció d'òptim :* $r'_N = c'_N - c'_B B^{-1} N = [\,1 \quad 7 \quad 6 \quad 11\,] \geq 0 \;\Rightarrow\;$ òptim

$x^*_B = B^{-1} b = [\,x_1 \quad x_2 \quad x_7\,]' = [\,13 \quad 2 \quad 7\,]'$

b) Problema artificial de la fase I : x_5, x_6 i x_7 són els escreixos de la forma estàndar i x_8 i x_9 les variables artificials de la fase I.

$$(\mathbf{PL}_a)\left\{\begin{array}{llcccccccccccccc} \min & z_a = & x_8 & + & x_9 & & & & & & & & & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & + & x_8 & \geq & 17 \\ & & 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_6 & & & \geq & 36 \\ & & x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & - & x_7 & + & x_9 & \geq & 8 \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ & & x_i \geq 0 & , & \forall i & & & & & & & & & & \end{array}\right.$$

$$T^0_a = \begin{array}{|ccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -2 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -25 \end{array}$$

c) $\hat{x}_B = B^{*-1}\hat{b} = [\,13 \quad 2 \quad -1\,]' \Rightarrow$ pèrdua de la factibilitat primal de $\mathcal{B}^* \Rightarrow$ reoptimització amb l'algorisme del símplex dual :

$$\hat{T}^0 = \begin{array}{|ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & 11 & 0 & -498 \end{array} \qquad x_7 \leftrightarrow x_3$$

$$\hat{T}^1 = \begin{array}{|ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 12 & 1 & -499 \end{array}$$

Solució del problema 83.

a) La folga de la primera constricció és bàsica $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_1 = 0}$.

$$x_3 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_3 = c_3$$
$$x_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 + 2\lambda_3 = c_1$$
$$\begin{array}{l} \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = -3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\lambda_2 = -5/3} \\ \\ \boxed{\lambda_3 = -2/3} \end{array} \right.$$

b)

$$z_{(\mathrm{P})} = c^\top x = c_1 x_1 + c_3 x_3 = -3\frac{14}{3} - \frac{13}{3} = -\frac{55}{3}$$
$$z_{(\mathrm{D})} = \lambda^\top b = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = -\frac{5}{3}9 - \frac{2}{3}5 = -\frac{55}{3}$$

c.1) x_7 entrarà a la base si *1)* $r_7 < 0$ i *2)* $\exists\, i$ t.q. $y_{7i} > 0$.

$$r_7 = c_7 - \lambda^\top a_7 = -1 - \alpha\,[\,0 \quad -\tfrac{5}{3} \quad -\tfrac{2}{3}\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + \frac{7}{3}\alpha$$

$$r_7 = \frac{7}{3}\alpha - 1 < 0 \qquad \Rightarrow \alpha < \frac{3}{7}$$

x_7 entrarà a la base $\Leftrightarrow \exists \quad i$ t.q. $y_{7i} > 0$:

$$y_7 = B^{-1} a_7 = B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha/3 \\ \alpha/3 \\ 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \forall \alpha > 0 \quad y_{7i} > 0 \quad i = 1,2,3$$

$$\boxed{0 < \alpha \leq \tfrac{3}{7}}$$

c.2)

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$Y = B^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 2/9 \\ 1 & 2/3 & -1/3 & 1/9 \\ 3 & 1 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$
$$r_N = c_N - \lambda^\top N = [\,3 \quad 5/3 \quad 2/3 \quad -2/9\,]$$
$$z = c_B B^{-1} b = -55/3$$

$$T^0 = \begin{array}{|ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 2/9 & 14/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/9 & 13/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & \boxed{2/3} & 13 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 & 5/3 & 2/3 & -2/9 & 55/3 \end{array}$$

$$T^1 = \begin{array}{|ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/6 & 1/2 & -1/3 & 0 & 13/6 \\ 0 & 9/2 & 0 & 3/2 & 3/2 & 0 & 1 & 39/2 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 1/3 & 2 & 2/3 & 0 & 68/3 \end{array}$$

$$\boxed{r_N \geq 0 \Rightarrow \text{òptim}}$$

Solució del problema 84.

- Formulació del problema a resoldre a la fase I. Introducció de variables de folga (x_4), escreix (x_3) i artificials (x_5,x_6) :

$$(\mathbf{PL}_a)\left\{\begin{array}{lllllllllllllll} \min & z_{\mathrm{I}} = & & x_5 & + & x_6 & & & & & & & & & \\ \text{subj.a :} & & & 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & = & 6 \\ & & & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 3 \\ & & & 3x_1 & + & x_2 & & & & & & & + \; x_6 & = & 3 \\ & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , \; x_6 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

- Fase I :

$$T_a^1 = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \quad ; \quad T_a^2 = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & \boxed{5/3} & -1 & 0 & 1 & -4/3 & 2 \\ 0 & \boxed{5/3} & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ \hline 0 & -5/3 & 1 & 0 & 0 & 7/3 & -2 \end{array}$$

- S'ha de notar que en la segona iteració es produeix empat entre x_5 (artificial) i x_4 (folga). És lògic treure de la base la variable artificial, donat que busquem una solució sense variables artificials a la base. El tableau resultant de la pivotació $x_2 \leftrightarrow x_5$ és l'indicat a la taula $3a$, i el de la pivotació $x_2 \leftrightarrow x_4$ a la taula $3b$.

$$T_a^{3a} = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & 1 & -3/5 & 0 & 3/5 & -4/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/5 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad ; \quad T_a^{3b} = \begin{array}{|cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 & 6/5 \\ 1 & 0 & 0 & -1/5 & 0 & 3/5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

òptim de $(\mathbf{PL}_a)$, s.b.f. de **(PL)**

òptim de $(\mathbf{PL}_a)$, NO s.b.f. de **(PL)**

- La taula T_a^{3a} és òptima ($r \geq 0$) i conté una solució bàsica factible de **(PL)**, donat que la suma d'infactibilitats és zero ($z_a = 0$). La base està formada per les variables x_2, x_4 i x_1, amb valors :

$$x_B = [\,x_2, \quad x_4, \quad x_1\,]' = [\,6/5, \quad 0, \quad 3/5\,]'$$

- El tableau T_a^{3b}, tot i ser òptim ($r \geq 0$) i tenir suma d'infactibilitats nul.la ($z_a = 0$) *no conté una solució bàsica factible de* **(PL)** donat que a la base hi resta una variable artificial, x_5. Per tal d'obtenir una s.b.f. a partir de la taula $3b$ caldria pivotar x_5 amb x_4, recuperant així la taula $3a$.

b)

$$\textbf{(D)} \begin{cases} \min \quad z_{(D)} = & 6\lambda_1 + 3\lambda_1 + 3\lambda_3 \\ \text{subj.a :} & 4\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \geq -4 \\ & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \geq -1 \\ & \lambda_1 \leq 0 \quad , \quad \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) El valor de les variables duals del problema **(PL)** expressat com a problema de minimització ($\hat{\lambda}$) pot ser llegit directament del tableau òptim a partir dels costos reduïts de les variables de folga, escreix o artificials amb un eventual canvi de signe :

$$\hat{\lambda}_1 = r_3 = 0 \quad , \quad \hat{\lambda}_2 = -r_4 = -1/5 \quad , \quad \hat{\lambda}_3 = -r_6 = 7/5$$

Aquests valors corresponen al problema **(PL)** expressat com a problema de minimització. Els valors de les variables duals pel problema **(PL)** expressat com a problema de maximització, λ, s'obté canviant de signe el vector $\hat{\lambda}$: $\lambda' = -\hat{\lambda}'$

d) Calculem el cost reduït de x_3 :

$$r_3 = \hat{c}_3 - \hat{\lambda}' a_3 = 1 - [\,0, \quad -1/5, \quad 7/5\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1/5 \; < 0 \Rightarrow \boxed{\text{no es conserva l'optimalitat}}.$$

Solució del problema 85.

En aquest cas tenim un problem amb restriccions de $\leq$. Suposem que sabem com transformar problemes amb restriccions de $=$ i de $\geq$. Mirem com, a partir d'aquests dos casos, com podem obtenir el dual d'un problema amb restriccions de $\leq$.

i) Sabent que el dual d'un problema lineal amb restriccions d'igualtat ve donat per:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & A^T y \leq c \\ & y \text{ lliure} \end{array}$$

Llavors podem convertir el problema original en un d'igualtat afegint les folgues s, que tindran un cost 0, tal i com segueix:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + 0s \\ \text{subj. a} & \\ & Ax + s = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Ara, el dual del problema anterior és directament:

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & (\, A^T \,)\, y \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ & y \text{ lliure} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & A^T y \leq c \\ & y \leq 0 \end{array}$$

ii) En aquest segon cas en basarem en el fet que el primal d'un problema amb restriccions de $\geq$ ve donat per:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{subj. a} & \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Aleshores podem transformar el nostre problema original a la forma amb $\geq$:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

I ara el seu dual serà:

$$\begin{array}{ll} \max & -b^T \tilde{y} \\ \text{subj. a} & \\ & -A^T \tilde{y} \leq c \\ & \tilde{y} \geq 0 \end{array}$$

Ara fent el canvi de variable $y = -\tilde{y}$, podem escriure finalment el dual del nostre problema original com:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{subj. a} \quad & \\ & A^T y \leq c \\ & y \leq 0 \end{aligned}$$

que correspon amb la formulació de l'apartat i).

Ara cal comprovar que $y^T = c_B^T B^{-1}$ és un punt factible dual, on c_B i B són respectivament els costos i matriu bàsica al punt òptim del problema primal original. Només hem de veure si el vector y^T abans definit satisfà que $y^T A \leq c^T$ i $y \leq 0$. Si considerem A dividida en $A = (B \;\; N)$ (B és la matriu bàsica i N la matriu no bàsica) aleshores:

$$y^T A = c_B^T B^{-1}(B \;\; N) = (c_B^T \;\; c_B^T B^{-1} N) \leq (c_B^T \;\; c_N^T)$$

A l'expressió anterior queda garantit que $c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T$ degut a que els costos reduïts del problema primal ρ han de garantir a l'òptim que $\rho \geq 0$. Recordem que $\rho^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$. Aleshores tenim que

$$0 \leq \rho^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \quad \Longrightarrow \quad c_B^T B^{-1} N \leq c_N^T$$

Ja hem vist una de les dues condicions que ha de satisfer y per ser factible dual. Ara ens falta la segona: $y \leq 0$. Suposem que, per exemple, la component i-èssima de y (y_i) és positiva, i arribarem a una contradicció. Per tant, garantirem que $y \leq 0$. Per veure això hem de tenir present que la columna de $Ax + s = b$ associada amb la i-èssima folga no és més que la i-èssima columna de la matriu identitat (que denotarem per e_i). A més el cost d'aquesta folga és 0. Aleshores, donat que $y_i > 0$, el cost reduït ρ_i de la i-èssima folga és:

$$\rho_i = 0 - y^T e_i = -y_i < 0$$

Però aleshores, la solució actual no pot ser òptima, donat que tenim una $\rho_i < 0$. Això contradiu el que havíem considerat sobre l'optimalitat dels vectors c_B i B. Per tant, no pot ser que cap $y_i > 0$.

Solució del problema 86.

El dual (D) del problema original (P) sabem que ve donat per (és el dual en forma asimètrica):

$$(D) \qquad \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{subj. a} \quad & \\ & A^T y \leq c \\ & y \text{ lliure} \end{aligned}$$

Ara hem d'escriure (D) d'alguna forma que ens permeti obtenir el seu dual de forma directa. Introduint el canvi de variable $y = u - v,\; u \geq 0 \;\; v \geq 0$, i sabent que el $\max\; b^T y \;\equiv\; -\min\; -b^T y$, podem escriure (D) de forma:

$$(D)\quad \begin{array}{ll} -\min & -b^T(u-v) \\ \text{subj. a} & \\ & A^T(u-v) \le c \\ & u \ge 0 \quad v \ge 0 \end{array} \iff (D)\quad \begin{array}{ll} -\min & \begin{pmatrix} -b^T & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{pmatrix} -A^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \ge -c \\ & u \ge 0 \quad v \ge 0 \end{array}$$

El dual de (D), que anomenarem (DD), és conegut i ve donat per (usant el dual en forma simètrica):

$$(DD)\quad \begin{array}{ll} -\max & -c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{pmatrix} (-A^T)^T \\ (A^T)^T \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} -b^T \\ b^T \end{pmatrix} \\ & x \ge 0 \end{array} \iff (DD)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rcr} -Ax & \le & -b^T \\ Ax & \le & b^T \end{array} \\ & x \ge 0 \end{array}$$

Ara només cal adonar-se que les restriccions $-Ax \le -b^T$ i $Ax \le b^T$ equivalen de fet a $Ax = b$, amb el qual garantim que $(DD) \equiv (P)$.

Solució del problema 87.

Abans de res escriurem el dual del problema presentat a l'enunciat (usem el dual en forma simètrica, ja que el problema primal té restriccions de $\ge$), i el transformem de forma que la funció objectiu s'hagi de minimitzar:

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \max & -y_1 - y_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrcr} -2y_1 & -y_2 & \le & 4 \\ -2y_1 & +4y_2 & \le & -8 \end{array} \\ & y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \end{array} \iff (D)\quad \begin{array}{ll} -\min & y_1 + y_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrcr} -2y_1 & -y_2 & \le & 4 \\ -2y_1 & +4y_2 & \le & -8 \end{array} \\ & y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \end{array}$$

Ara mirem de solucionar el problema primal. Convertint les restriccions en restriccions de $\le$, i afegint les folgues primals x_3 i x_4, el problema primal queda com:

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & 4x_1 - 8x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 1 \\ x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = & 1 \end{array} \\ & x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{array}$$

Tenim una base factible incial directament fent que $x_3 = 1$ i $x_4 = 1$. Iterant a partir d'aquest punt, les taules del símplex que obtenim són (es marca el pivot amb un requadre):

Iteració 0

2	$\boxed{2}$	1	0	1
1	-4	0	1	1
4	-8	0	0	0

Iteració 1

1	1	0.5	0	0.5
5	0	2	1	3
12	0	4	0	4

El valor òptim de funció objectiu que hem obtingut és de -4.

Ara mirem de solucionar el problema dual (D). Primer de tot afegirem les folgues duals y_3 i y_4, convertint les restriccions en restriccions de =. Ara, però, no sembla immediat trobat una solució factible inicial (podem fer que $y_3 = 4$, però no que $y_4 = -8$). Per tant, multiplicarem la segona restricció per -1, afegirem una variable artificial y_5, i realitzarem una fase I amb el problema:

$$\begin{array}{ll} \min & y_5 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrrrcl} -2y_1 & -y_2 & +y_3 & & & = & 4 \\ 2y_1 & -4y_2 & & -y_4 & +y_5 & = & 8 \end{array} \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 5 \end{array}$$

Les taules de la fase I són:

Iteracions de la Fase I del problema dual

Iteració 0

-2	-1	1	0	0	4
$\boxed{2}$	-4	0	-1	1	8
-2	4	0	1	0	-8

Iteració 1

0	-5	1	-1	1	12
1	-2	0	-0.5	0.5	4
0	0	0	0	1	0

Hem obtingut un put factible per al problema dual: $y_1 = 4,\ y_2 = 0,\ y_3 = 12, y_4 = 0$. Ara iterem a partir d'aquest punt amb el problema dual original, eliminant la variable artificial y_5 (fase II):

Iteracions de la Fase II del problema dual

Iteració 0

1	-2	0	-0.5	4
0	-5	1	-1	12
0	3	0	0.5	-4

Observem com la solució factible inicial ja és òptima. El valor de la funció objectiu dual és de 4. Recordem però, que hem de negar aquest valor, ja que vàrem transformar el problema dual de $\max b^T y$ a $-\min -b^T y$. Per tant la solució del dual és de -4. Aquest valor correspon amb el del problema primal, tal i com s'ha de garantir sempre. A més, observant les taules òptimes primals i duals, podem adonar-nos d'una una clara simetria: els valors de les variables primals bàsiques apareixen com a costos reduïts de les variables duals no bàsiques (i viceversa), els costos reduïts de les variables primals no bàsiques corresponen als valors de les variables duals bàsiques (i viceversa), i els termes no bàsics de la taula primal òptima apareixen transposats i negats com a termes no bàsics a la taula dual òptima.

Solució del problema 88.

a) Abans de res cal que obtinguem la taula del símplex associada amb el punt òptim. Inicialment podem considerar la solució inicial factible formada per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 6, 20, 6)$, amb la base formada per $\{x_3, x_4, x_5\}$. Despres només cal realitzar dues iteracions per fer entrar $\{x_1, x_2\}$ a la base, fent sortir $\{x_3, x_4\}$. Les taules que obtenim en aquest procés són:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 20 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
\hline
-p & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\quad \xrightarrow[\text{surt } x_3]{\text{entra } x_1} \quad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -6 \\
0 & 11 & 4 & 1 & 0 & 44 \\
0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 18 \\
\hline
0 & -1-2p & -p & 0 & 0 & -6p
\end{array}
\quad \longrightarrow
$$

$$
\xrightarrow[\text{surt } x_4]{\text{entra } x_2} \quad
\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -3/11 & 2/11 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 4/11 & 1/11 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 10/11 & -3/11 & 1 & 6 \\
\hline
0 & 0 & (4-3p)/11 & (1+2p)/11 & 0 & 4+2p
\end{array}
$$

Per tant $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, i $x_5^* = 6$.

El valor de la funció objectiu és directament:

$$c^T x^* = -px_1^* - x_2^* = -2p - 4$$

b) Les variables bàsiques a l'òptim són x_1,x_2 i x_5. Per tant, la base B i la seva inversa B^{-1} són:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

El valor òptim de les variables no-bàsiques es 0 directament: $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$. El valor x_B^* de les variables bàsiques es troba solucionant:

$$x_B^* = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Per tant $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$, i $x_5^* = 6$.

El valor de la funció objectiu és directament:

$$c^T x^* = -px_1^* - x_2^* = -2p - 4$$

c) Sabem que un problema primal (P) $\{\min c^T x \text{ s.a. } Ax = b \;\; x \geq 0\}$ té associat el problema dual (D) $\{\max b^T y$ s.a. $A^T y \leq c \;\; y$ lliure$\}$. Per tant, el dual del problema original és:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -px_1 - x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrcr} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_4 & = & 20 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_5 & = & 6 \end{array} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,...,5 \end{array} \Rightarrow (D) \quad \begin{array}{ll} \max\limits_{y_1,y_2,y_3} & 6y_1 + 20y_2 + 6y_3 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rrrcr} -y_1 & +4y_2 & +2y_3 & \leq & -p \\ 2y_1 & +3y_2 & -y_3 & \leq & -1 \end{array} \\ & y_i \leq 0 \quad i = 1,2,3 \end{array}$$

Ara hem de trobar la solució òptima dual, de dues formes diferents: primer, usant la taula òptima calculada a l'apartat a), i, en segon lloc, sense tenir en compte aquesta informació.
1) Tenim en compte la taula òptima.
Les variables duals y_1, y_2 i y_3 estan associades amb les folgues x_3, x_4 i x_5 (ja que aquestes tenen costos 0 i les seves columnes són columnes de la matriu identitat), i els seus valors al punt òptim s'obtenen prenent, amb signe contrari, els costos reduïts ρ de x_3, x_4 i x_5 de la taula òptima. Per tant tenim directament que $y_1^* = -(4-3p)/11$, $y_2^* = -(1+2p)/11$ i $y_3^* = 0$.
2) No tenim en compte la taula òptima.
Les variables duals poden ser calculades directament a partir de la base òptima del problema primal i dels costos de les variables bàsiques fent:

$$y^T = c_B^T B^{-1} = (\,-p \quad -1 \quad 0\,)\, B^{-1} = (\,(3p-4)/11 \quad (-1-2p)/11 \quad 0\,)$$

Observem com coincideix amb la solució obtinguda directament de la taula del símplex.

Ara podem calcular el valor de la funció objectiu dual $b^T y$:

$$b^T y = 6y_1 + 20y_2 + 6y_3 = 6(3p-4)/11 + 20(-1-2p)/11 + 6 \cdot 0 = (-44-22p)/11 = -4-2p$$

S'observa com coincideix amb el valor de la funció objectiu primal a l'òptim, ja que sempre es verifica que $c^T x^* = b^T y^*$.

d) La solució primal actual continuarà essent òptima sempre que es verifiqui que els costos reduïts ρ de x_3 i x_4 continuen essent no negatius (el vector ρ ha estat calculat a l'apartat a) anterior). És a dir, s'ha de satisfer que:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{x_3} = (4-3p)/11 \geq 0 \Rightarrow p \leq 4/3 \\ \rho_{x_4} = (1+2p)/11 \geq 0 \Rightarrow p \geq -1/2 \end{array} \right. \Rightarrow p \in [-1/2, 4/3]$$

Si $p = -1/2$ o $p = 4/3$ aleshores podríem realitzar una pivotació, però no milloraríem el valor de la funció objectiu. Ens trobaríem davant un cas d'òptims alternatius.

e) Per poder representar gràficament el problema en $\mathbb{R}^2$ cal eliminar primer les variables de folga x_3, x_4 i x_5, obtenint aleshores un problema amb només les variables x_1 i x_2 i 3 restriccions de desigualtat. La Fig. 7 mostra la regió factible del problema primal. Aquesta regió factible es troba delimitada per les 3 restriccions (r1, r2 i r3 a la gràfica) i els eixos coordenats.

La Fig. 7 també presenta la funció objectiu quan $p = 1$ en el moment en que talla al punt més extrem possible dins la regió factible. Aquest punt és el $(2,4)$, i aquesta és la solució del problema per $p = 1$, amb un valor de funció objectiu de -6.

També es mostren a la gràfica les funcions objectius quan $p = -1/2$ i $p = 4/3$ (rectes $x_2 = x_1/2 + K$ i $x_2 = -3x_1/4 + K$ respectivament). Es veu clarament com aquestes rectes són

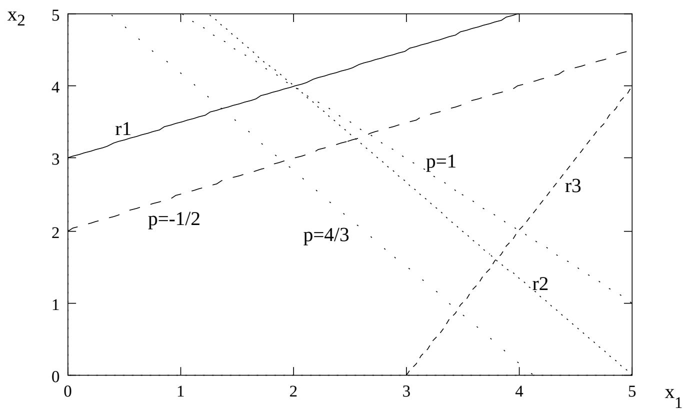


Figura 7. Regió factible i funció objectiu per $p = 1$, $p = -1/2$ i $p = 4/3$.

paral·leles a les restriccions r1 i r2, amb el qual si ens allunyéssim cap a l'exterior de la zona factible les rectes $p = -1/2$ i $p = 4/3$ se solaparien amb r1 i r2, amb el qual obtindríem molts punts òptims alternatius. Això ratifica el vist a l'apartat anterior.

f) Per solucionar el nou problema quan es modifica el terme de la dreta, abans de res cal comprovar si la base actual B (formada per les columnes de x_1, x_2 i x_5) continua essent òptima. Llavors comprovarem els nous valors d'aquestes variables amb el nou terme de la dreta:

$$x_B = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el nou punt és factible. Com que un canvi en el terme de la dreta no ens modifica el valor actual de $\rho = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$, tenim que aquesta solució és òptima (no cal fer cap pivotació amb els valors actuals de ρ). Per tant, la solució òptima del nou problema ve donada directament per $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (2, 4, 0, 0, 0)$.

7 Solucions dels problemes de programació lineal entera.

Solució del problema 93.

a)
- **Inicialització** $L := \{(PE1)\}$
- **Primera iteració** es processa (PE1)
  - $*$ *Relaxació* Es resol (PR1) : $x^*_{PR1} = (34/3, 8/3, 0)'$, $z^*_{PR1} = -14$
  - $*$ *Eliminació* no es pot eliminar.
  - $*$ *Separació* es selecciona com a variable de ramificació x_1 i es crean els subproblemes (PE2) ($x_1 \leq 11$) i (PE3) ($x_1 \geq 11$) : $L = \{(PE2), (PE3)\}$
- **Segona iteració** s'explora la branca $x_1 \leq 11$ (PE2)
  - $*$ *Relaxació* Es resol (PR2) : $x^*_{PR2} = (11, 5/2, 11/4)'$, $z^*_{PR2} = -13.75$.
  - $*$ *Eliminació* no es pot eliminar
  - $*$ *Separació* es selecciona com a variable de ramificació x_2 i es crean els subproblemes (PE4) ($x_2 \leq 2$) i (PE5) ($x_2 \geq 3$). $L = \{(PE4), (PE5), (PE3)\}$.
- **Tercera iteració** s'explora la branca $x_2 \leq 2$ (PE4)
  - $*$ *Relaxació* es resol (PR4) : $x^*_{PR4} = (10, 2, 1)'$, $z^*_{PR4} = -13$.
  - $*$ *Eliminació* x^*_{PR4} entera$\Rightarrow$ solució de (PE4). Hem obtingut la primera incumbent. $z^* := z^*_{PR4}$, $x^* := x^*_{PR4}$. S'elimina (PE4) de la llista : $L = \{(PE5), (PE3)\}$.
- **Quarta iteració** s'explora la branca $x_2 \geq 3$ (PE5)
  - $*$ *Relaxació* es resol (PR5) : problema infactible.
  - $*$ *Eliminació* (PR5) no factible $\Rightarrow$ s'elimina (PE5). $L = \{(PE3)\}$

b) Cap solució factible del problema (PE) pot tenir un valor de funció objectiu menor que la fita inferior proporcionada per $z^*_{PR1} = -14$. Tampoc és possible igualar aquest valor, donat que (PR1) no té òptims alternatius que puguin correspondre a solucions enteres. El vector de costos és enter, la qual cosa indica que z adoptarà valors enters per a tota solució entera. De tot això es dedueix que el menor valor possible de z serà -13, el que demostra que la solució associada a la incumbent trobada a (PE4) és òptima.

c)

1.- $L = \{(PE3)\} \neq \emptyset$

2.- Seleccionem (PE3).

3.- Resolució de la relaxació lineal (PR3).

Afegim a (PR1) la constricció $x_1 \geq 12 \Rightarrow -x_1 + f_1 = -12$, on f_1 és variable bàsica de valor negatiu $f_1 = \frac{-2}{3}$. El tableau del simplex s'obtindrà a partir del tableau òptim de la relaxació lineal de (PE1) amb la inclusió d'una nova fila, corresponent a la constricció afegida:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	
1	0	4/3	2	4/3	0	34/ 3
0	1	2/3	0	2/3	0	8/ 3
0	0	4/3	2	4/3	1	-2/ 3
0	0	1	2	2	0	14

La solució associada a aquest tableau és factible dual però no es factible primal, havent-se de reoptimitzar usant el simplex dual, Tanmateix, en intentar trobar una variable no bàsica per a pivotar amb f_1 no es troba cap candidata, donat que $y_{3j} \geq 0 \quad \forall j$, fet que indica que (PR3) és infactible.

4.- (PR3) és infactible $\Rightarrow$ s'elimina de la llista : $L := \emptyset$

1.- $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució òptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^*_{PR4} = [\,10 \quad 2 \quad 1\,]} \quad ; \quad \boxed{z^*_{PE} := z^* = -13}$$

Solució del problema 94.

a) Criteris de ramificació: 1) ramificar primer en x_1, 2) explorar primer la branca $x_i \leq \lfloor x_1^* \rfloor$.

- **Primera iteració** $L := \{(PE1)\}$, $z^* = +\infty$. Es processa (PE1)
  - ∗ *Relaxació:* Es resol gràficament (PR1). Observant la regió factible de (PR1) K_{PR1} i l'orientació del vector de costos c (Fig. 8) es determina que la solució x^*_{PR1} és el vèrtex associat a la intersecció entre les rectes r_1 i r_2:

$$x^*_{PR1} = \begin{bmatrix} 2.842 \\ 2.210 \end{bmatrix}$$

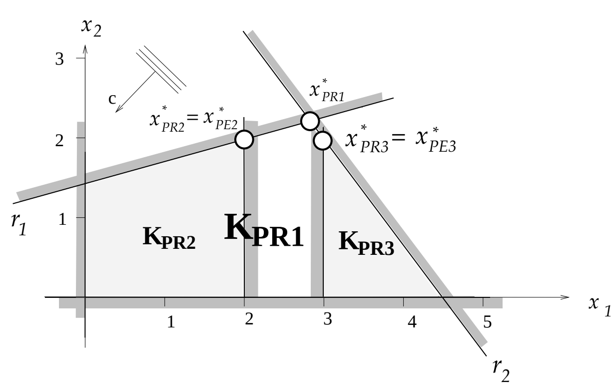


Figura 8 : Resolució gràfica ramificant primer en x_1.

  - ∗ *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$no es pot eliminar.
  - ∗ *Separació:* variable de ramificació $x_1 = 2.842 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_1 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}$; $L = \{(PE2), (PE3)\}$

- **Segona iteració** $L = \{(PE2),(PE3)\}, z^* = +\infty$. Es processa (PE2)
  - ∗ *Relaxació:* Es resol gràficament (PR2). Observant la Fig. 8) es determina que la solució x^*_{PR2} és:

$$x^*_{PR2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - ∗ *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR2} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar.
    - ▷ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -4$, $x^* := x^*_{PE2} = [\,2 \quad 2\,]'$
    - ▷ Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$
- **Tercera iteració** $L = \{(PE3)\}$, $z^* = -4$. Es processa (PE3)
  - ∗ *Relaxació:* Es resol gràficament (PR3). Observant la Fig. 8) es determina que la solució x^*_{PR3} és:

$$x^*_{PR2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - ∗ *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR3} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR3} = x^*_{PE3} \Rightarrow$ es pot eliminar.
    - ▷ Inicialització de la incumbent : $z^* := \min\{z^*, z^*_{PE3}\} = z^*_{PE3} = -5$, $x^* := x^*_{PE3} = [\,3 \quad 2\,]'$
    - ▷ Actualització de la llista : $L := \emptyset$
- **Quarta iteració** $L = \emptyset$. L'òptim és:

$$\boxed{x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \; , \; z^* = -5}$$

b) Criteris de ramificació: 1) ramificar primer en x_2, 2) explorar primer la branca $x_i \leq \lfloor x^*_1 \rfloor$.

- **Primera iteració** $L := \{(PE1)\}$, $z^* = +\infty$. Es processa (PE1)
  - ∗ *Relaxació:* mateixa solució que a l'anterior apartat (Fig. 9)

$$x^*_{PR1} = \begin{bmatrix} 2.842 \\ 2.210 \end{bmatrix} \; , \; z^*_{PR1} = -5.052 \Rightarrow z^*_{PE} \geq -5 = \underline{z}^*_{PE}$$

  - ∗ *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$no es pot eliminar.
  - ∗ *Separació:* variable de ramificació $x_1 = 2.842 \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_2 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}; L = \{(PE2),(PE3)\}$
- **Segona iteració** $L = \{(PE2),(PE3)\}$. Es processa (PE2)
  - ∗ *Relaxació:* la Fig. 9 mostra que l'òptim de la funció objectiu sobre la regió factible de (PR2) $\mathrm{K}_{\mathrm{PR2}}$ s'obté sobre el punt:

$$x^*_{PR2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  - ∗ *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR2} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar.

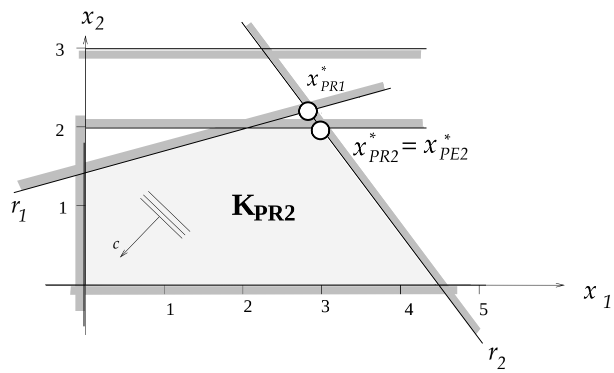


Figura 9 : Resolució gràfica ramificant primer en x_2.

$\triangleright$ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -5$, $x^* := x^*_{PE2} = [\,3 \quad 2\,]'$
$\triangleright$ Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$

Hem trobat una incumbent amb el mateix valor que la fita inferior $\underline{z}^*_{PE}$. Això implica que x^*_{PE2} és la solució del problema, i ja no caldria continuar explorant. Si procesessim el node que queda obtindriem el següent

- **Tercera iteració** $L = \{(PE3)\}$, $z^* = -5$. Es processa (PE3)
  - ∗ *Relaxació:* en afegir la constricció $x_2 \geq 3$ s'obté un problema infactible (vegi's la Fig. 9).
  - ∗ *Eliminació:*
    - $\triangleright$ $K_{PR3} = \emptyset \Rightarrow$ s'elimina (PE3)
    - $\triangleright$ Actualització de la llista : $L := \emptyset$
- **Quarta iteració** $L = \emptyset$. L'òptim és:

$$\boxed{x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \;,\; z^* = -5}$$

Solució del problema 97.

Inicialització: $L := \{(PE1)\}$
Primera iteració : es processa (PE1)
Relaxació : Es resol (PR1) :

Eliminació : $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$no es pot eliminar.

Separació : variable de ramificació $x_1 = 2.5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_1 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}$; $L = \{(PE2), (PE3)\}$

Segona iteració: s'explora la branca $x_1 \leq 2$ (PE2)
Relaxació : Es resol (PR2) : s'afegeix la restricció $x_1 \leq 2$ a (PE1) i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} :

Eliminació :

- $K_{PR2} \neq \emptyset$,

- $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar :
  - $*$ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -2$, $x^* := x^*_{PE2} = (2,0)'$
- Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$

Tercera iteració: s'explora la branca $x_1 \geq 3$ (PE3)

Relaxació : Es resol (PR3) : s'afegeix la restricció $x_1 \geq 3$ a (PE1) i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} :

$$T^0_{PR3} = \begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & f_1 & \\ \hline & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 25/2 \\ & 0 & 7/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 11/2 \\ & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ \hline & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}$$

Problema (D) il.limitat $\Rightarrow$ (PR3) infactible

Eliminació :

- $K_{PR3} = \emptyset, \Rightarrow$ s'elimina (PE3) : $L := \emptyset$.

Quarta iteració: $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució óptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^* = [\,2 \quad 0\,]' \quad ; \quad z^*_{PE} := z^* = -2}$$

Solució del problema 98.

- **Inicialització:** $L := \{(PE1)\}$
- **Primera iteració:** es processa (PE1)
  - $*$ *Relaxació:* Es resol (PR1) :
  - $*$ *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset, x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$ no es pot eliminar.
  - $*$ *Separació:* es selecciona com a variable de ramificació x_1, creant-se els subproblemes (PE2) ($x_1 \leq 11$) y (PE3) ($x_1 \geq 11$) : $L = \{(PE2),(PE3)\}$
- **Segona iteració:** s'explora la branca $x_1 \leq 11$ (PE2)
  - $*$ *Relaxació:* Es resol (PR2) : s'introdueix la constricció $x_1 \leq 11$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} aplicant l'algorisme del simplex dual.
  - $*$ *Eliminació:* no es pot eliminar.
  - $*$ *Separació:* es selecciona com a variable de ramificació x_2, creant-se els subproblemes (PE4) ($x_2 \leq 2$) y (PE5) ($x_2 \geq 3$). $L = \{(PE4),(PE5),(PE3)\}$.
- **Tercera iteració:** s'explora la branca $x_2 \leq 2$ (PE4)
  - $*$ *Relaxació:* Es resol (PR4) : s'introdueix la constricció $x_2 \leq 2$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR2} aplicant l'algorisme del simplex dual.
  - $*$ *Eliminació:* x^*_{PR4} entera$\Rightarrow$ solució de (PE4). Hem obtingut la primera incumbent.

$z^* := z^*_{PR4}$, $x^* := x^*_{PR4}$. S'elimina (PE4) de la llista : $L = \{(PE5), (PE3)\}$.

- **Quarta iteració:** s'explora la branca $x_2 \geq 3$ (PE5)
  - $*$ *Relaxació:* Es resol (PR5) : s'introdueix la constricció $x_2 \geq 3$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR2} aplicant l'algorisme del simplex dual.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	
1	0	0	0	0	1	0	11
0	1	0	-1	0	$1/2$	0	$5/2$
0	0	1	$3/2$	1	$-3/4$	0	$1/4$
0	0	0	-1	0	$1/2$	1	$-1/2$
0	0	0	$1/2$	0	$3/4$	0	$55/4$

; $f_2 \leftrightarrow x_4$;

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	
1	0	0	0	0	1	0	11
0	1	0	0	0	0	-1	3
0	0	1	0	1	0	$3/2$	$-1/2$
0	0	0	1	0	$-1/2$	-1	$1/2$
0	0	0	0	1	1	$1/2$	$27/2$

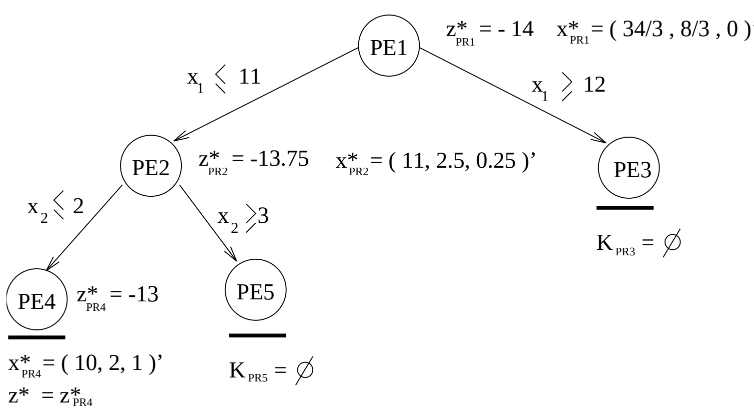
  $y_{3j} \geq 0 \forall j \in \mathcal{N} \Rightarrow$ dual il.limitat, primal infactible : $K_{PR5} = \emptyset$
  - $*$ *Eliminació:* (PR5) no factible $\Rightarrow$ s'elimina (PE5). $L = \{(PE3)\}$
- **Quinta iteració:** s'explora la branca $x_1 \geq 12$ (PE3)
  - $*$ *Relaxació:* Es resol (PR3) : s'introdueix la constricció $x_2 \geq 12$ i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} aplicant l'algoritmo del simplex dual.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	
1	0	$4/3$	2	$4/3$	0	$34/3$
0	1	$2/3$	0	$2/3$	0	$8/3$
0	0	$4/3$	2	$4/3$	1	$-2/3$
0	0	1	2	2	0	14

  Variable bàsica de sortida : $x_{B_3} = f_1$. $y_{3j} \geq 0 \; \forall j \in \mathcal{N} \Rightarrow$ dual il.limitat, primal infactible : $K_{PR3} = \emptyset$
  - $*$ *Eliminació:* (PR3) no factible $\Rightarrow$ s'elimina (PE3). $L = \emptyset$
- **Sisena iteració:** $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució òptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^* = [\,10 \quad 2 \quad 1\,]'} \quad ; \quad \boxed{z^*_{PE} := z^* = -13}$$

L'arbre d'exploració d'aquest problema és:



Solució del problema 99.

- **Inicialització** $L := \{(PE1)\}$
- **Primera iteració** es processa (PE1)
  - ∗ *Relaxació:* Es resol (PR1) :

$$T^*_{PR1} = \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline & 0 & 1 & 5/4 & -1/4 & 0 & 5/2 \\ & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 5/2 \\ & 0 & 0 & -3/2 & 1/2 & 1 & 3 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$$x^*_{PR1} = [\,5/2 \quad 5/2 \quad 0\,]' \quad ; \quad z^*_{PR1} = -5$$

  - ∗ *Eliminació:* $K_{PR1} \neq \emptyset$, $x^*_{PR1} \neq x^*_{PE1} \Rightarrow$no es pot eliminar.
  - ∗ *Separació:* variable de ramificació $x_1 = 2.75 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 2 & \text{(PE2)} \\ x_1 \geq 3 & \text{(PE3)} \end{cases}; L = \{(PE2), (PE3)\}$
- **Segona iteració** s'explora la branca $x_1 \leq 2$ (PE2)
  - ∗ *Relaxació:* Es resol (PR2) : s'afegeix la restricció $x_1 \leq 2$ a (PE1) i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} :

$$x^*_{PR2} = [\,2 \quad 3\,]' \quad ; \quad z^*_{PR2} = -5$$

  - ∗ *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR2} \neq \emptyset$,
    - ▷ $x^*_{PR2} = x^*_{PE2} \Rightarrow$ es pot eliminar.
    - ▷ Inicialització de la incumbent : $z^* := z^*_{PE2} = -5$, $x^* := x^*_{PE2} = [\,2 \quad 3\,]'$
    - ▷ Actualització de la llista : $L := \{(PE3)\}$

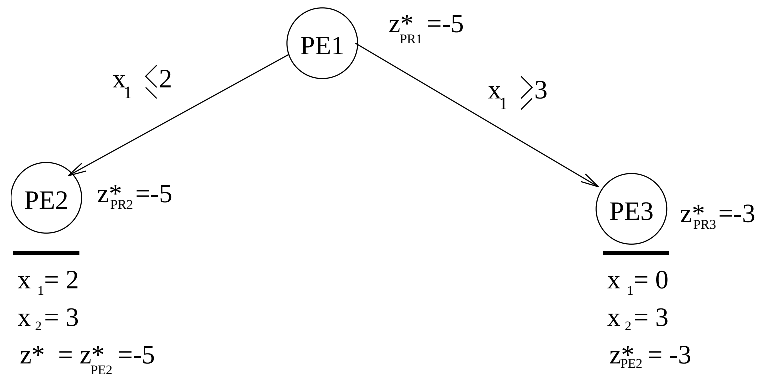
  (ATENCIÓ : $z^*_{PE2} = z^*_{PR1}$, i sabem que z^*_{PR1} és una fita inferior de z^*_{PE}. Així doncs, podem assegurar que $x^*_{PE} = x^*_{PE2}$ i no caldria explorar el nus (PE3)).
- **Tercera iteració** s'explora la branca $x_1 \geq 3$ (PE3)
  - ∗ *Relaxació:* Es resol (PR3) : s'afegeix la restricció $x_1 \geq 3$ a (PE1) i es reoptimitza a partir de T^*_{PR1} :

$$x^*_{PR3} = [\,0 \quad 3\,]' \quad ; \quad z^*_{PR2} = -3$$

  - ∗ *Eliminació:*
    - ▷ $K_{PR3} \neq \emptyset$.
    - ▷ $x^*_{PR3} = x^*_{PE3} \Rightarrow$ es pot eliminar.
    - ▷ Actualització de la incumbent : $z^*_{PE3} = -3 \not< z^* = -5 \Rightarrow$ no s'actualitza.
    - ▷ Actualització de la llista : $L := \emptyset$.
- **Sisena iteració** $L = \emptyset \Rightarrow$ la solució óptima és l'associada a la incumbent :

$$\boxed{x^*_{PE} := x^* = [\,2 \quad 3\,]' \quad ; \quad z^*_{PE} := z^* = -5}$$

L'arbre d'exploració és :



8 Solucions dels problemes de programació no lineal.

8.1 Convexitat.

Solució del problema 100.

a) Sí és convex. Es pot comprovar de diverses formes. Una d'elles és aplicant la definició de convexitat "C és convex si $\forall u, v \in C \quad \alpha u + (1-\alpha)v \in C, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$":

$$A(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha Au + (1-\alpha)Av = \alpha b + (1-\alpha)b = b$$

Per tant $\alpha u + (1-\alpha)v \in C$

b) Sí és convex. Es pot comprovar de forma anàloga al cas anterior.

c) Sí és convex. Només cal veure que els punts de $\mathbb{R}^2$ tals que $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ defineixen un cercle centrat al (0,0) de radi 1. I un cercle és un conjunt convex.

d) Sí és convex. Aquest conjunt està format per tots els punts de $\mathbb{R}^2$ que satisfan que $-1 \leq x_1 + x_2 \leq 1$. Aquests són els punts que es troben entre les rectes paral·leles $x_1 + x_2 = -1$ i $x_1 + x_2 = 1$, i clarament son un conjunt convex (tot i que no afitat).

e) No és conjunt convex. Podem trobar fàcilment un contraexemple. Suposem que C_1 és l'interval real (i convex) $[0,1]$, i que C_2 és l'interval $[2,3]$. Clarament, els punts entre 1 i 2 no pertanyen a la unió, però poden ser obtinguts de forma $\alpha 1 + (1-\alpha)2 \quad 0 \leq \alpha \leq 1$. Per tant la unió de C_1 i C_2 no és un conjunt convex.

f) Sí és conjunt convex. Es demostra fàcilment directament aplicant la definició de convexitat. Cal veure si $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_1 \cap C_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$ on $u, v \in C_1 \cap C_2$. Com que $u \in C_1$ i C_1 és convex, tenim que $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_1$. Aplicant el mateix raonament podem concloure que $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_2$. Per tant $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_1 \cap C_2$.

Solució del problema 101.

a) Hem de veure si $\forall x, y$ i $0 \leq \alpha \leq 1$ es satisfà

$$(f_1 + f_2)(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha(f_1 + f_2)(x) + (1-\alpha)(f_1 + f_2)(y)$$

Sabent que $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ i usant que f_1 i f_2 són convexes tenim:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(\alpha x + (1-\alpha)y) &= f_1(\alpha x + (1-\alpha)y) + f_2(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \\ &\leq \alpha f_1(x) + (1-\alpha)f_1(y) + \alpha f_2(x) + (1-\alpha)f_2(y) = \\ &= \alpha(f_1 + f_2)(x) + (1-\alpha)(f_1 + f_2)(y)\end{aligned}$$

b) Hem de veure si $\forall x, y$ i $0 \leq \alpha \leq 1$ es satisfà

$$af(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha a f(x) + (1-\alpha)af(y)$$

Com que f és convexa tenim directament que:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

i multiplicant a ambdós costats per a (com que $a \geq 0$ ho podem fer sense alterar el sentit de la desigualtat) tenim directament el resultat desitjat.

Solució del problema 102.

Si la restricció és $g(x) = c$, en general no es verifica que el conjunt de punts definit és convex. Per exemple, si la restricció és $x^2 = 9$ (on x^2 és una funció convexa), el conjunt de punts factibles són $\{+3, -3\}$, que clarament no és un conjunt convex.

Solució del problema 103.

Si considerem que H té el terme diagonal de la posició i negatiu ($H_{ii} < 0$) aleshores podem veure com per algun vector x no es satisfà la condició $x^T H x \geq 0$. Concretament, si prenem com x la i-èssima columna de la matriu identitat (columna que denotarem per e_i, i que té totes les components a 0, excepte la de la posició i on té un 1), aleshores tenim directament que

$$e_i^T H e_i = H_{ii} < 0$$

Per tant, H no és semidefinida positiva.

Solució del problema 104.

Per determinar la convexitat de $f(x, y)$ en funció dels paràmetres p i q caldrà estudiar els signes dels determinants dels menors principals de la hessiana $\nabla^2 f(x, y)$:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2q/x & p\cos(py) \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2q/x^2 & 0 \\ 0 & -p^2 \sin(py) \end{pmatrix}$$

I ara, per garantir que $\nabla^2 f(x, y)$ sigui semidefinida positiva (amb el qual $f(x, y)$ serà convexa), s'ha de verificar que el determinants dels dos menors principals siguin no negatius:

$$\begin{aligned}\det(\Delta_1) &= -2q/x^2 \geq 0 \\ \det(\Delta_2) &= 2p^2 q/x^2 \sin(py) \geq 0\end{aligned}$$

Hem d'observar en primer lloc que quan $x = 0$ el valor del primer determinant tendeix a $\pm\infty$. Això és degut a que la funció $\ln(x)$ tendeix a $-\infty$ en aquest punt. De fet hauríem d'imposar que $x > 0$ per tenir ben definit el signe del $\det(\Delta_1)$. Un cop comentat això, per garantir que

$\det(\Delta_1) \geq 0$ cal que $q \leq 0$.

Estudiem ara el segon determinant. El terme $2p^2q/x^2$ sempre és no positiu (donat que abans hem fixat que $q \leq 0$). Per tant si volem que $\det(\Delta_2) \geq 0$ cal que $\sin(py) \leq 0$. Això es verificarà sempre que $py \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \big([(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \cup [-2k\pi, , -(2k+1)\pi]\big)$. En aquest cas veiem que p pot prendre qualsevol valor, i, segons el valor que prengui, la regió on $f(x,y)$ és convexa variarà.

Resumint, la funció $f(x,y)$ serà convexa per valors de $q \leq 0$, per a qualsevol valor de p, i dins el subconjunt de $\mathbb{R}^2$ següent:

$$\{(x,y) \mid x > 0,\ y \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \big([(2k+1)/p\pi, (2k+2)/p\pi] \cup [-2k/p\pi, -(2k+1)/p\pi]\big)\}$$

La Fig. 10 mostra la gràfica de $f(x,y)$ per $q = -1$ i $p = 1$.

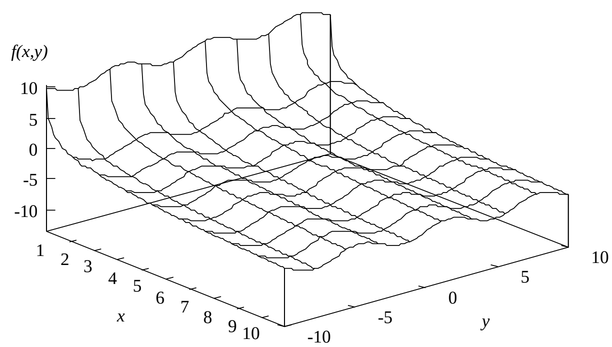


Figura 10. Gràfica de la funció $f(x,y) = q\ln(x^2) + \sin(py)$ quan $q = -1$ i $p = 1$

Solució del problema 105.

Per poder garantir que el punt solució obtingut és un mínim global s'ha de satisfer i) que el conjunt de punts Ω que defineix la regió factible sigui un conjunt convex, i ii) que la funció objectiu $f(x,y) = x^4 + 3y^2 - 2xy - 4x + 2y$ sigui convexa dins de Ω.

Anem a veure si es satisfà i). Tenim quatre restriccions. Sabem que el conjunt convex $\{z \in C \mid g_1(z) \leq c_1, \ldots, g_m(z) \leq c_m\}$ és convex si cada una de les restriccions $g_i(z)$ és convexa dins C (on C és convex). En aquest cas podem suposar que C correspon als valors de x i y majors que 1/2:

$$C = \{(x,y) \mid x \geq 1/2\ ,\ y \geq 1/2\}$$

Hem de veure llavors que ocorre amb les dues restriccions que ens queden. En primer lloc escrivim de forma $g_1(x) \leq c_1$ la primera:

$$-\ln(x+y) \leq 0$$

Ara hem de veure si $g_1(x,y)$ és una funció convexa dins C (observem que en aquest cas hem d'explicitar que és "dins C" donat que per valors tals que $x+y \leq 0$ la funcio ln no està definida; si això no passés ens podríem haver estalviat la introducció de C, i podríem haver considerat els límits simples $x \geq 1/2$ i $y \geq 1/2$ com dues restriccions qualsevols més). Per veure si és convexa cal veure si la matriu hessiana és semidefinida positiva:

$$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} -1/(x+y) & -1/(x+y) \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1/(x+y)^2 & 1/(x+y)^2 \\ 1/(x+y)^2 & 1/(x+y)^2 \end{pmatrix}$$

Ara cal comprovar el signe del determinant dels menors principals de la matriu $\nabla^2 g_1(x,y)$:

$$\det(\Delta_1) = 1/(x+y)^2 \geq 0$$
$$\det(\Delta_2) = 1/(x+y)^4 - 1/(x+y)^4 = 0$$

Com que els dos determinants són ≥ 0 tenim que $-\ln(x+y) \leq 0$ defineix un conjunt convex.

Ara hem de fer el mateix estudi amb la segona restricció $x^2 + y^2 \leq 20$:

$$\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Delta_1) = 2 \geq 0$$
$$\det(\Delta_2) = 4 \geq 0$$

Per tant $x^2 + y^2 \leq 20$ també defineix un conjunt convex dins C (en aquest cas defineix un conjunt convex a tot $\mathbb{R}^2$ de fet).

Ara finalment ens queda veure si es satisfà ii), és a dir, si la funció objectiu és convexa a $\Omega = \{(x,y) \mid \ln(x+y) \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 20,\ x \geq 1/2,\ y \geq 1/2\}$, on Ω ara ja sabem que és un conjunt convex pel que hem vist anteriorment. Estudiem la funció objectiu f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2y - 4 & 6y - 2x + 2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Delta_1) = 12x^2 \geq 0$$
$$\det(\Delta_2) = 6 \cdot 12x^2 - 4 = 72x^2 - 4$$

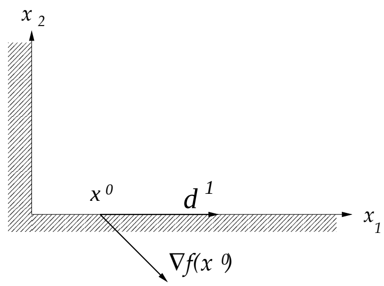
Observem com el determinant de $\nabla^2 f(x,y)$ és igual a $72x^2 - 4$. Per alguns valors (per. ex., $x = 0$) aquest determinant no pren valors positius. Tanmateix, per garantir que f és convexa dins Ω només hem d'assegurar-nos de que $72x^2 - 4$ sigui positiu dins Ω. I dins Ω els valors possibles de x sempre són superiors o iguals a $1/2$. En el cas extrem, per $x = 1/2$, tenim que $72x^2 - 4 = 72/4 - 4 = 18 - 4 \geq 0$. Per tant podem concloure que f és convexa dins Ω.

A la vista dels resultats anteriors podem garantir que l'òptim proporcionat per l'algorisme d'optimització correspon a un mínim global.

8.2 Optimalitat i direccions de descens.

Solució del problema 107.

- $d^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. La representació gràfica d'aquest primer cas és:



∗ *Factibilitat:* Els punts a partir de x^0 al llarg de d^1 es representen per:

$$x(\alpha) = x^0 + \alpha d^1 = \begin{bmatrix} 1+2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

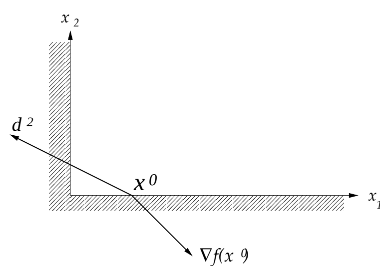
donat que $x(\alpha) \geq 0$ per a tot $\alpha \geq 0$ la direcció és factible.

∗ *Descens:* Fem el producte escalar amb el vector gradient:

$$\nabla f(x^0)d^1 = [\,2 \quad -2\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 > 0$$

donat que $\nabla f(x^0)d^1 > 0$, la direcció no és de descens.

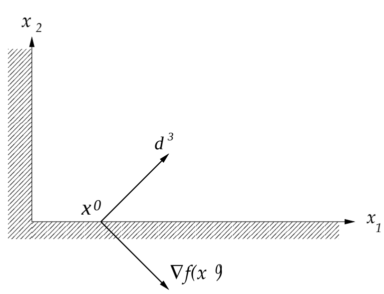
- $d^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.



∗ *Factibilitat:* $x(\alpha) = x^0 + \alpha d^2 = \begin{bmatrix} 1-2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$. Per a qualssevol valor de α entre zero i $\alpha = 1/2$ es satisfà $x(\alpha) \geq 0$, sent doncs d^1 factible.

∗ Descens: $\nabla f(x^0)d^2 = [\,2 \quad -2\,] \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 < 0$. d^2 és de descens.

- $d^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$



∗ Factibilitat: $x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1+2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} \geq 0 \forall \alpha > 0$, sent doncs factible.

∗ Descens: $\nabla f(x^0) d^2 = [\,2 \quad -2\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$. En aquest cas, per tal de saber si d^3 és de descens hem d'estudiar les segones derivades de $f(x)$ al llarg de d^3:

$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

La corbatura de $f(x)$ al llarg de d^3, $g''(\alpha)$ ens pot indicar, si la direcció és de descens ($g''(\alpha) < 0$) o d'ascens ($g''(\alpha) > 0$). En el nostre cas és:

$$g''(\alpha) = d^{3'} \nabla f(x^0) d^3 = [\,2 \quad 2\,] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Així doncs, l'estudi de la corbatura tampoc ens permet dir si la direcció és de descens.

8.3 Condició d'òptim per a problemes sense constriccions.

Solució del problema 108.

a) Calcularem primer els punts estacionaris:

Estudiem ara la convexitat de $f(x)$ sobre el punt trobat:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

la matriu Hessiana és constant: es tracta d'una funció quadràtica. Comprovem la definició de l'Hessiana:

l'Hessiana és definida positiva arreu ($f(x)$ estrictament convexa): el punt $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és un mínim global estricte de $f(x)$.

b) Punts estacionaris de f(x):

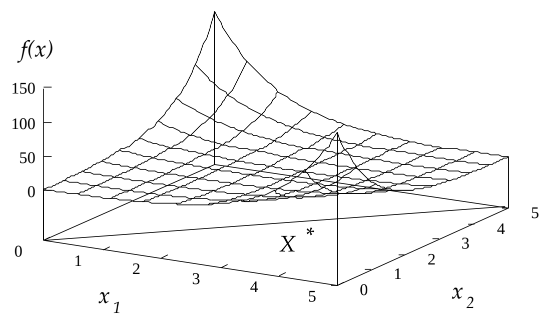
Comprovem la definició de la Hessiana sobre x^*:

b) l'Hessiana és definida positia arreu ($f(x)$ estrictament convexa): el punt $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és un mínim global estricte de $f(x)$.

c) Es calculen els punts estacionaris de $f(x)$:

En aquest cas ens trobem amb un conjunt de punts estacionaris $\mathcal{X}^*$ determinat pels punts de $\mathbb{R}^2$ amb $x_1 = x_2$. Comprovem ara la definició de la matriu Hessiana:

La matriu Hessiana és semidefinida positiva arreu ($f(x)$ és convexa): el conjunt de punt $\mathcal{X}^*$ són mínims global febles. La següent figura mostra la respresentació gràfica de la funció $f(x)$ i del conjunt $\mathcal{X}^*$:



d) Càlcul de punts estacionaris:

En aquest cas no existeixen punts estacionaris, i el conjunt solució $\mathcal{X}^*$ és buit (el problema no té solució). La funció $f(x)$ no està afitada inferiorment: per a un valor donat de x_2, la funció objectiu decreix a mida que ho fa x_1.

Solució del problema 109.

Per trobar els punts estacionaris cal solucionar $\nabla f(x) = 0$ per a cada problema, i tot seguit estudiar si $\nabla^2 f(x)$ és definida positiva als punts trobats.

a) La funció objectiu és $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y + xy$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - 4 + y & 2y - 8 + x \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observem com l'únic punt estacionari que hi ha és $(x,y) = (0,4)$. Donat que la matriu hessiana és definida positiva $\forall(x,y)$, podem concloure que el nostre punt és un mínim (i a més global, donat que la funció original és convexa a tot $\mathbb{R}^2$).

b) La funció objectiu és $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - 4 & -2y + 6 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

L'únic punt estacionari que hi ha és $(x,y) = (2,3)$. La matriu hessiana, però, no és definida positiva. Per tant no podem garantir que sigui un mínim. De fet, no ho és. Un punt estacionari on la funció té hessiana indefinida (és a dir, $\exists x, y : x^T H x > 0 \;\; y^T H y < 0$) s'anomena punt de sella, i correspon a punts on tant podem avançar en direccions que ens disminueixen com incrementen el valor de la funció objectiu. La Fig. 11 ens mostra l'aspecte de la funció $f(x,y)$ on queda clar el concepte de punt de sella (rep aquest nom perquè recorda a una "sella" de muntar).

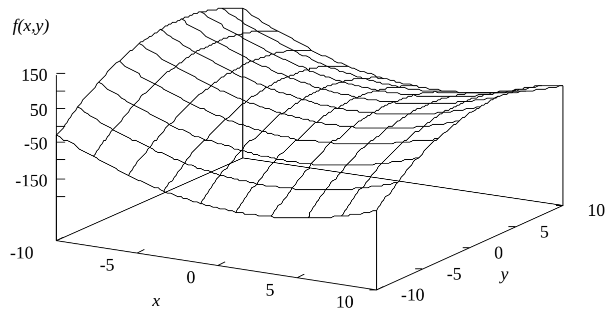


Figura 11. Gràfica de la funció $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5$

c) La funció objectiu és $f(x,y) = -e^{-(x^4+y^4)}$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x^3 e^{-(x^4+y^4)} & 4y^3 e^{-(x^4+y^4)} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} -16x^6 e^{-(x^4+y^4)} + 12x^2 e^{-(x^4+y^4)} & -16x^3y^3 e^{-(x^4+y^4)} \\ -16x^3y^3 e^{-(x^4+y^4)} & -16y^6 e^{-(x^4+y^4)} + 12y^2 e^{-(x^4+y^4)} \end{pmatrix}$$

L'únic punt estacionari que hi ha és $(x,y) = (0,0)$ (ja que el terme $e^{-(x^4+y^4)}$ sempre és positiu, i únicament podem anul·lar les components del gradient fent que $x = y = 0$). La matriu hessiana avaluada al punt $(0,0)$ és una matriu de zeros, i, per tant, és semidefinida positiva. Donat que la condició suficient per garantir que $(0,0)$ és un mínim és que $\nabla^2 f(0,0)$ sigui definida positiva, no podem garantir que aquest punt sigui un mínim local. En aquest cas, però, sí que és mínim, i a més, és mínim global. Això es pot comprovar observant la gràfica d'aquesta funció a la Fig. 12, la qual té forma de campana invertida.

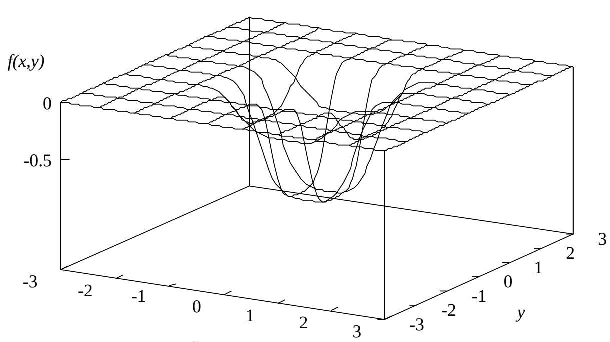


Figura 12. Gràfica de la funció $f(x,y) = -e^{-(x^4+y^4)}$

d) La funció objectiu és $f(x,y) = x^2 - y^4$. El gradient i hessiana de f són:

$$\nabla f = (\,2x \quad -4y^3\,) \qquad\qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

L'únic punt estacionari que hi ha és $(x,y) = (0,0)$. La matriu hessiana avaluada al punt $(0,0)$ és semidefinida positiva. Com al cas c) anterior, no podem garantir que $(0,0)$ sigui un mínim local (ja que $\nabla^2 f(0,0)$ no és definida positiva). En aquest cas, però, i a diferència de c), el punt $(0,0)$ no és cap mínim local (per exemple, el punt $(0,a)$ $a \in \mathbb{R}$ té un valor de funció objectiu menor).

8.4 Exploració lineal.

Solució del problema 111.

La funció $f(x) = x^2 - 3x + 5 + \ln(\frac{1}{x+1})$ a l'interval [0,5] té una gràfica com la de la Fig. 13. Clarament s'observa com té un únic mínim en aquest interval. De fet la primera i segona derivades de $f(x)$ són:

$$f'(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x+1} \qquad\qquad f''(x) = 2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

La segona derivada és sempre positiva, i per tant la funció $f(x)$ és convexa a [0,5] i només té un únic mínim en aquest interval (és a dir, és unimodal). Anul·lant la primera derivada podem observar com aquest mínim correspon al valor $x^* = (1+\sqrt{33})/4 = 1.6861$.

Un cop hem garantit que la funció $f(x)$ és unimodal a [0,5] podem aplicar la cerca de Fibonacci. En primer lloc cal determinar el nombre N d'avaluacions que ens cal fer per donar un interval d'incertesa de longitud menor o igual a 1, tal i com demana l'enunciat. L'interval original [0,5] té una longitud de $d_1 = 5$. Sabem que la longitud d_k de l'interval a cada avaluació k, al mètode de Fibonacci ve donada per

$$d_k = \frac{F_{N-k+1}}{F_N} d_1$$

A la darrera avaluació tenim que $k = N$ (per tant $F_{N-k+1} = F_1 = 1$), i que $d_k \le 1$. Tot això fa que:

$$1 \ge d_k = \frac{F_1}{F_N} 5 = \frac{5}{F_N} \quad \Rightarrow \quad F_N \ge 5 \quad \Rightarrow \quad N \ge 4$$

Per tant prendrem $N = 4$, per tal de realitzar un nombre mínim d'avaluacions. Ara ja podem aplicar la cerca de Fibonacci. Ens serà útil conèixer el valor de la funció als extrems de l'interval: $f(0) = 5$, $f(5) = 13.208$.

$k = 2$) Trobem la longitud del segon interval:

$$d_2 = \frac{F_{N-2+1}}{F_N} d_1 = \frac{3}{5} 5 = 3$$

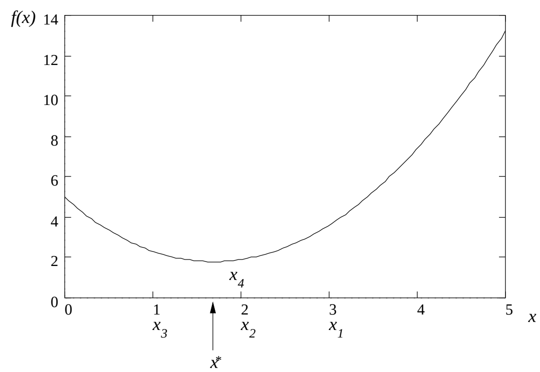


Figura 13. Gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 3x + 5 + \ln(\frac{1}{x+1})$ amb la seqüència de punts obtinguts amb la cerca lineal de Fibonacci.

Els dos primers punts a avaluar són:

$$x_1 = 0 + d_2 = 3 \qquad f(3) = 3.6137$$
$$x_2 = 5 - d_2 = 2 \qquad f(2) = 1.9014$$

Com que $f(0) > f(2)$ i $f(2) < f(3)$ escollim l'interval $[0, x_1 = 3]$ (en comptes de $[x_2 = 2, 5]$). El nou interval és de longitud $d_2 = 3$.

$k = 3)$ Trobem la longitud del tercer interval:

$$d_3 = \frac{F_{N-3+1}}{F_N} d_1 = \frac{2}{5} 5 = 2$$

El nou punt a avaluar és:

$$x_3 = x_1 - d_3 = 3 - 2 = 1 \qquad f(1) = 2.3069$$

Adonem-nos de que l'altre punt simètric $0 + d_3 = 2$ no cal tornar-lo a avaluar perquè coincideix amb el punt x_2 que ja havíem trobat anteriorment. Com que $f(1) > f(2)$ i $f(2) < f(3)$ escollim l'interval $[x_3 = 1, x_1 = 3]$ (en comptes de $[0, x_2 = 2]$). El nou interval és de longitud $d_3 = 2$.

$k = 4)$ Trobem la longitud del quart i darrer interval:

$$d_4 = \frac{F_{N-4+1}}{F_N} d_1 = \frac{1}{5} 5 = 1$$

En aquest darrer interval sempre succeeix (quan s'usa el mètode de Fibonacci) que els dos punts situats a una distància $d_4 = 1$ dels extrems [1,3], són de fet el mateix punt (que a més ja hem avaluat: $x_2 = 2$). Per tant cal introduir una petita perturbació i avaluar un punt proper a l'anterior (per exemple, perturbem amb $\epsilon = 0.01$):

$$x_4 = x_1 - d_4 - \epsilon = 3 - 1 - 0.01 = 1.99 \qquad f(1.99) = 1.8948$$

Com que $f(1) > f(1.99)$ i $f(1.99) < f(2)$ l'interval que obtindrem finalment és $[x_3 = 1, x_2 = 2.0]$ (en comptes de $[x_4 = 1.99, x_1 = 3]$). El nou interval ara és de longitud

$d_4 = 1$, amb el qual hem arribat a donar un interval d'incertesa de la longitud desitjada.

La Fig. 13 mostra els successius punts que s'han anat trobant en aplicar la cerca lineal de Fibonacci.

8.5 Optimització sense constriccions: mètode del Gradient.

Solució del problema 112.

Per simplificar la notació escriurem el gradient $\nabla f(x_k)^T$ com g_k. El gradient de la funció quadràtica ve donat per $g_k = Qx_k - b$ Per comprovar que g_k i g_{k+1} són perpendiculars només cal veure que que $g_k^T g_{k+1} = 0$. Sabent que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} g_k$$

directament obtenim el resultat anterior fent:

$$\begin{aligned} g_k^T g_{k+1} &= g_k^T (Qx_{k+1} - b) = \\ &= g_k^T \big(Q(x_k - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} g_k) - b\big) \\ &= g_k^T (Qx_k - b) - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} g_k^T Q g_k \\ &= g_k^T g_k - g_k^T g_k = 0 \end{aligned}$$

Solució del problema 113.

Podem observar com ambdues funcions poden ser escrites de forma matricial com:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} x^T Q_1 x - b_1^T x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} x^T Q_2 x - b_2^T x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i els gradients vénen donats per:

$$\begin{aligned} \nabla f_1(x)^T &= Q_1 x - b_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \\ \nabla f_2(x)^T &= Q_2 x - b_1 = \begin{pmatrix} 10x_1 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Passem ara a solucionar cada apartat.

i) Els punts mínims els trobarem anul·lant el vector gradient:

$$\nabla f_1(x)^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x^* = (0 \;\; 1)$$

$$\nabla f_2(x)^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 10x_1 = 0 \\ 2x_2 = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x^* = (0 \;\; 1)$$

S'observa com ambdues funcions tenen el mateix punt mínim.

ii) Sabem que la convergència del mètode del gradient serà millor quan més petit sigui el terme $\beta = [(\lambda_M - \lambda_m)/\lambda_M + \lambda_m)]^2$ (on λ_m és el valor propi menor i λ_M el valor propi major de la matriu Q). Podem trobar els valors propis per a Q_1 i Q_2 de la següent manera:

$$\det(Q_1 - \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_m = 1, \quad \lambda_M = 3$$

$$\det(Q_2 - \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(2-\lambda) \quad \Rightarrow \quad \lambda_m = 2, \quad \lambda_M = 10$$

Calculem ara els termes β_1 (per Q_1) i β_2 (per Q_2):

$$\beta_1 = \left(\frac{3-1}{3+1}\right)^2 = 1/4 = 0.25 \qquad \beta_1 = \left(\frac{10-2}{10+2}\right)^2 = 64/144 = 0.4444...$$

Per tant, amb la funció $f_1(x)$, a cada iteració del mètode del gradient reduim (com a poc) en una quarta part la nostra distància al punt òptim, mentre que amb la funció $f_2(x)$ reduim (com a mínim) en una mica més de la meitat aquesta mateixa distància a x^*.

iii) Realitzarem les dues iteracions del mètode del gradient per a cada $f_i(x)$. El vector gradient el denotarem, per comoditat, per $g_k = Q_i x_k - b_i$, on i serà 1 o 2 segons la funció considerada:

$f_1(x)$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
g_0 = Q_1 x_0 - b_1 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\alpha_0 = \tfrac{g_0^T g_0}{g_0^T Q_1 g_0} &= 0.33607 \\
x_1 = x_0 - \alpha_0 g_0 &= \begin{pmatrix} 0.31967 \\ 0.65574 \end{pmatrix} \\
g_1 = Q_1 x_1 - b_1 &= \begin{pmatrix} 0.29508 \\ -0.36885 \end{pmatrix} \\
\alpha_1 = \tfrac{g_1^T g_1}{g_1^T Q_1 g_1} &= 0.97619 \\
x_2 = x_1 - \alpha_1 g_1 &= \begin{pmatrix} 0.031616 \\ 1.015808 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$f_2(x)$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
g_0 = Q_2 x_0 - b_2 &= \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\alpha_0 = \tfrac{g_0^T g_0}{g_0^T Q_2 g_0} &= 0.10080 \\
x_1 = x_0 - \alpha_0 g_0 &= \begin{pmatrix} -0.015968 \\ 1.798403 \end{pmatrix} \\
g_1 = Q_2 x_1 - b_2 &= \begin{pmatrix} -0.15968 \\ 1.59681 \end{pmatrix} \\
\alpha_1 = \tfrac{g_1^T g_1}{g_1^T Q_2 g_1} &= 0.48095 \\
x_2 = x_1 - \alpha_1 g_1 &= \begin{pmatrix} 0.060831 \\ 1.030415 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Observem com en ambdós casos la seqüència generada s'apropa a $x^* = (0 \;\; 1)^T$.

iv) Per comprovar que les direccions obtingudes són perpendiculars, només cal veure que $g_1^T g_0 = 0$ (per a les dues funcions). Per a $f_1(x)$ tenim que

$$g_1^T g_0 = \begin{pmatrix} 0.29508 & -0.36885 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0.29508 - 4 \cdot 0.36885 \approx 0$$

Per la seva banda per a $f_2(x)$:

$$g_1^T g_0 = \begin{pmatrix} -0.15968 \\ 1.59681 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = -20 \cdot 0.15968 + 2 \cdot 1.59681 \approx 0$$

Solució del problema 115.

Càlcul de la direcció de decens::

Es calcula en primer lloc la direcció de moviment del mètode del gradient:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - (x_2 - x_3)^3 + x_1 x_2 x_3 \quad ; \quad x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x)' = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 x_3 \\ 2x_2 - 3(x_2 - x_3)^2 + x_1 x_3 \\ 3(x_2 - x_3)^2 + x_1 x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Direcció de moviment del mètode del gradient: $\boxed{d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$

Exploració lineal::

A continuació es realitza exploració lineal per Fibonacci amb $N = 4$ i interval d'incertessa $[0,\, 0.5]$, de londitud inicial $d_1 = 0.5$. La funció univaluada sobre la que s'aplicarà Fibonacci és:

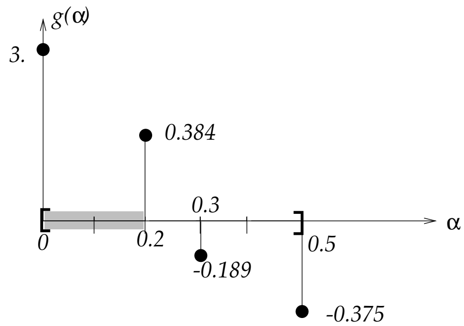
$$\begin{aligned} g(\alpha) &= f(x^0 + \alpha d^0) = f(-3\alpha + 1, 3\alpha - 1, \alpha - 1) \\ g(\alpha) &= -17\alpha^3 + 33\alpha^2 - 19\alpha + 3 \end{aligned}$$

El seu valor sobre els extrems de l'interval d'incertessa és $g(0) = 3$, $g(0.5) = -0.375$. Els valors dels números de Fibonacci que s'usaran són:

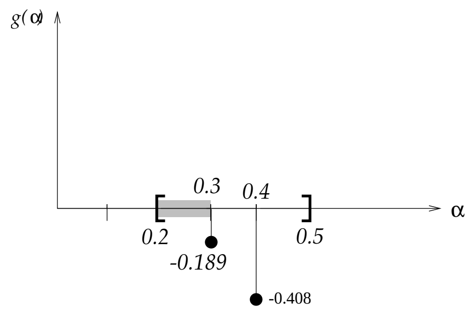
$$F_0 = F_1 = 1 \quad ; \quad F_2 = 2 \quad ; \quad F_3 = 3 \quad ; \quad F_4 = 5$$

i les iteracions del procés són:

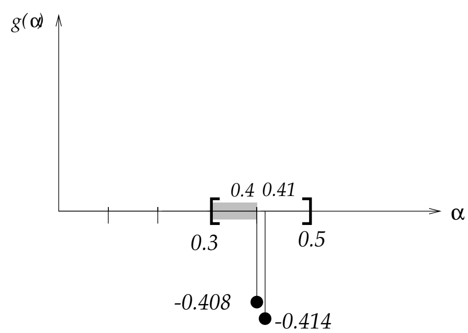
- **Primera iteració:**
  - $\alpha_1 = 0 + \frac{F_3}{F_4} d_1 = \frac{3}{5} 0.5 = 0.3 \quad ; \quad g(0.3) = -0.189$
  - $\alpha_2 = 0.5 - \frac{F_3}{F_4} d_1 = 0.5 - 0.3 = 0.2 \quad ; \quad g(0.2) = 0.384$
  - $g(0.2) > g(0.5)$: es descarta $[0, 0.2[$. El nou interval d'incertessa és $[0.2, 0.5]$.



- **Segona iteració:**
  - $\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{F_2}{F_4} d_1 = 0.4 \quad ; \quad g(0.4) = -0.408$
  - $g(0.4) < g(0.5)$: es descarta $[0.2, 0.3[$. El nou interval d'incertessa és $[0.3, 0.5]$



- **Tercera iteració:**
  - $\alpha_4 = \alpha_1 + \frac{F_1}{F_4} d_1 + 0.001 = 0.41 \quad ; \quad g(0.41) = -0.414$
  - $g(0.4) > g(0.41)$: es descarta $[0.3, 0.4[$. L'interval final d'incertessa és $[0.4, 0.5]$.



Es pot prendre com a longitud de pas el punt mig $\boxed{\alpha^0 = 0.45}$.

Actualització de les variables:

$$x^1 = x^0 + \alpha^0 d^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.45 \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.35 \\ 0.35 \\ -0.35 \end{bmatrix}$$

Test d'optimalitat:

$$\|\nabla f(x^1)\|_2 = \| [\,-0.89250 \quad -0.23250 \quad 2.30750\,] \|_2 \approx 2.485 > \epsilon = 0.1 \Rightarrow x^1 \neq x^*$$

Solució del problema 117.

2.- Condició d'òptim: $\|\nabla(x^0)\|_2 = 2\sqrt{2} \not< \epsilon = 0.5$

3.- Direcció de moviment: $d^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

4.- Exploració lineal per Fibonacci: $\alpha^0 = 1/6$

5.- Actualització de variables: $x^1 = x^0 + \alpha^0 d^0 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$

Solució del problema 119.

a) $x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\nabla f(x) = (\,2x_1 + 2x_2 - 2 \quad 3x_2 + 2x_1 - 2\,)'$; $\nabla f(x^0) = (\,-4 \quad -4\,)'$

1.- Condició d'aturada: $\|\nabla f(x^0)\|_2| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 5.6568 > \epsilon = 0.5$

2.- Direcció de descens : $d^0 = -\nabla f(x^0) = (\,4 \quad 4\,)'$

3.- Exploració lineal : $g(\alpha) = f(x^0 + \alpha d^0) = f(-1+4\alpha, 4\alpha) = 72\alpha^2 - 32\alpha + 3$ $g(\alpha)' = 144\alpha - 32$; $g(\alpha^*)' = 144\alpha^* - 32 = 0$; $\alpha^* = 32/144 \approx 0.2$

4.- Actualització : $x^1 = x^0 + \alpha^* d^0 = (\,-1/9 \quad 8/9\,)'$

b) $N = 4$: $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5$, $g(\alpha) = 72\alpha^2 - 32\alpha + 3$, $\alpha^0 = 0$ Interval d'incertessa inicial : $g(0) = 3$, $g(1) = 43 > g(0) \Rightarrow \mathrm{I}^0 = [0,1]$

1.- Primera iteració : $d_2 = F_3/F_4 d_1 = 3/5 = 0.6$; $\alpha_1 = 0 + 0.6 = 0.6$, $\alpha_2 = 1 - 0.6 = 0.4$

$g(\alpha_1) = 9.72 \quad > \quad g(\alpha_2) = 1.72 \quad \Rightarrow$ es descarta $[0.6, 1]$: $\mathrm{I}^2 = [0, 0.6]$

2.- Segona iteració : $d_3 = F_2/F_4 d_1 = 2/5 = 0.4$; $\alpha_3 = 0.6 - 0.4 = 0.2$

$g(\alpha_3) = -0.52 \quad < \quad g(\alpha_2) = 1.72 \quad \Rightarrow$ es descarta $[0.4, 0.6]$: $\mathrm{I}^3 = [0, 0.4]$

3.- Tercera iteració : $d_4 = F_1/F_4 d_1 = 1/5 = 0.2$; $\alpha_4 = 0 + 0.2 + 0.01 = 0.21$

$g(\alpha_4) = -0.54 \quad < \quad g(\alpha_3) = -0.52 \quad \Rightarrow$ es descarta $[0, 0.2]$: $\mathrm{I}^4 = [0.2, 0.4]$

Interval final d'incertessa : $\boxed{\mathrm{I}^4 = [0.2, 0.4]}$. Es pren com a longitud de pas òptima el millor extrem de I^4: $\boxed{\alpha^* = 0.2}$

Solució del problema 120.

a) $x^1 = [\,-2.8571 \quad 4.8571 \quad -0.5928\,]$

b) Si es calcula la definició de la matriu Hessiana (constant, doncs $f(x)$ és quadràtica), s'obté que és indefinida. Així doncs, el problema **(PNL)** no té solució, doncs no n'hi ha cap punt de $\mathbb{R}^3$ que satisfaci les condicions necessàries de segon ordre ($\nabla f(x) = [0]$ i $\nabla^2 f(x)$ semidef $+$).

c) Atés que el problema no té solució, no té sentit calcular la taxa de convergència. Si es calculés s'obtindria $\beta = 7.77 > 1$, que no té sentit.

8.6 Condicions d'òptim per a problemes amb constriccions.

Solució del problema 122.

a) Una corba diferenciable sobre una superficie $\mathcal{S}$ s'expressa com una parametrització de les variables x_i en funció del paràmetre t. L'enunciat ens dona l'expressió paramètrica corresponent a la primera variable: hem de trobat l'expressió paramètrica de x_2 i substituir per $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= t \\ h(x(t)) = x_1^2(t) - x_2(t) &= 0 \end{aligned}\right\} t^2 - x_2(t) = 0 \ , \ x_2(t) = t^2 \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \ , \ \boxed{x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

b)

$$\underline{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} f(x(t))\right|_{t=0}} = \nabla f(x(0)) \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x(t)\right|_{t=0} = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{1}$$

$$\nabla f(x) = [\,(x_2+1)e^{x_1(x_2+1)} \quad x_1 e^{x_1(x_2+1)}\,] \ , \ \nabla f(x(0)) = [\,1 \quad 0\,]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x(t) = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} \ , \ \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} x(t)\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $x(0)$ no pot ser un punt estacionari del problema indicat, doncs una condició necessària és que $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} f(x(t))\right|_{t=0} = 0$ per a totes les corbes diferenciables de $\mathcal{S}$ que passin per $x(0)$, i aquesta condició no es satisfà per la corba trobada a l'apartat a). Si fessim un moviment a partir de $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ al llarg de la corba $x(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$ amb $t < 0$ $f(x)$ milloraria.

Solució del problema 123.

$$\begin{aligned} &\min\ f(x_1,x_2) \\ &\text{s.a.}: g_1(x_1,x_2) \le b_1 \\ &\qquad g_2(x_1,x_2) \ge b_2\ ; \\ &\qquad x_1 \ge 0 \\ &\qquad x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} i) & \nabla f(x_1,x_2) + \mu_1 \nabla g_1(x_1,x_2) + \mu_2 \nabla g_(x_1,x_2) + \mu_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ ii) & \mu_1(b_1 - g_1(x_1,x_2)) = 0 \quad , \quad \mu_2(b_2 - g_2(x_1,x_2)) = 0 \\ & \mu_3 x_1 = 0 \quad , \quad \mu_4 x_2 = 0 \\ iii) & \mu_1 \ge 0 \quad , \quad \mu_2 \le 0 \quad , \quad \mu_3 \le 0 \quad , \quad \mu_4 \le 0 \end{cases}$$

Solució del problema 124.

a) $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} >$ def + $\Rightarrow$ la funció objectiu és convexa i la regió factible és un conjunt convex, doncs està definit a partir de constriccions lineals. Aixídoncs es trata d'un problema convex, satisfent-se llavors que qualsevol solució factible que cumpleixi les condicions necessàries de primer ordre és un mínim global.

b) Passem el problema **(PNL)** a la forma estàndar canviant el signe de la primera constricció:

$$
\textbf{(PNL)}\left\{\begin{array}{llrcrcl}
\text{min} & \text{f(x)} = & (x_1-1)^2 & + & (x_2-2)^2 & & \\
\text{subj.a :} & & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & & - & x_2 & \leq & 0
\end{array}\right.
$$

Condicions de Khun i Tucker:

c) $x_1, x_2 > 0 \;\Rightarrow\; \mu_3 = \mu_4 = 0$. Substituïnt a les condicions de Kuhn i Tucker trobades a l'apartat anterior s'obté:

$$2x_1 + \mu_1 + \mu_2 = 2 \tag{1}$$
$$2x_2 - \mu_1 + \mu_2 = 4 \tag{2}$$
$$\mu_1(1 - x_1 + x_2) = 0 \tag{3}$$
$$\mu_2(2 - x_1 - x_2) = 0 \tag{4}$$
$$\mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0 \tag{5}$$

Provant diversos valors de μ_1 y μ_2 s'obté:

a) $\mu_1 = \mu_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1,\ x_2 = 2 \;\Rightarrow \underline{x_1 + x_2 \not\leq 2 \;\Rightarrow \text{viola la segunda restricción}}$

b) $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mu_2 = 1,\ \underline{\mu_1 = -2 \not\geq 0 \;\Rightarrow \text{viola (5)}}$

c) $\mu_1 \neq 0,\ \mu_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2,\ x_2 = 1 \;\Rightarrow \underline{x_1 + x_2 \not\leq 2 \;\Rightarrow \text{viola la segunda restricción}}$

d) $\mu_1 = 0,\ \mu_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = 1/2,\ x_2 = 3/2\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1\ >\ \text{óptimo}}$

Solució del problema 125.

Calcularem prèviament el gradient de la funció objectiu i la matriu Jacobiana de les constriccions:

$$f(x) = (x_1x_2 - 3)^2 - 4x_1x_2 + 2(x_1x_3 - 1)^3 - \frac{15}{2}x_2 + 5x_3$$

$$\nabla f(x)' = \begin{bmatrix} 2(x_1x_2 - 3)x_2 - 4x_2 + 6(x_1x_3 - 1)^2x_3 \\ 2(x_1x_2 - 3)x_1 - 4x_1 - 15/2 \\ 6(x_1x_3 - 1)^2x_1 + 5 \end{bmatrix}$$

$$g_1(x) = 6x_1^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 - 5 \quad ; \quad \nabla g_1(x)' = \begin{bmatrix} 12x_1 \\ -3x_3 \\ -3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$g_2(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 + x_3^2 - 4 \quad ; \quad \nabla g_2(x)' = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 1/2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

a) **Condicions de Kuhn i Tucker:** Sigui x factible **(PNL)** ($g(x) \leq 0$). Llavors si x és mínim local de **(PNL)** existeix el vector $\mu \in \mathbb{R}^2$ que satisfà les següents condicions:

i) $\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{2} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$. En el nostre cas:

$$\left.\begin{aligned} 2(x_1x_2-3)x_2 - 4x_2 + 6(x_1x_3-1)^2x_3 + 12x_1\mu_1 + 2x_1\mu_2 &= 0 \\ 2(x_1x_2-3)x_3 - 4x_1 - 15/2 - 3x_3\mu_1 + (1/2)\mu_2 &= 0 \\ 6(x_1x_3-1)^2x_1 + 5 - 3x_1\mu_1 - 2x_3\mu_1 + 2x_3\mu_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ii) $\mu_j g_j(x) = 0\ ,\ j = 1, \ldots, 2$:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1(6x_1^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 - 5) &= 0 \\ \mu_2(x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 + x_3^2 - 4) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

iii) $\mu_j \geq 0\ ,\ j = 1, 2$

b) Hem de comprovar les condicions de l'apartat anterior sobre el punt $x = [\,0 \quad -2 \quad 1\,]'$:

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \leq 0 \Rightarrow x \text{ factible } \textbf{(PNL)}$$

ii) La segona constricció és inactiva ($g_2(x) = -4 \neq 0$): això implica que el multiplicador μ_2 s'ha d'anular: $\underline{\mu_2 = 0}$.

i) Substituïnt els valors de $x = [\,0 \quad -2 \quad 1\,]'$ i $\mu_2 = 0$ al sistema d'equacions (1) s'obté:

$$\left.\begin{aligned} 26 &= 0 \\ -15/2 + 6\mu_1 &= 0 \\ 5 + 4\mu_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{sistema incompatible} \Rightarrow \boxed{x = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ no és mínim de } \textbf{(PNL)}}$$

Solució del problema 127.

b) El punt $x^0 = [\,0 \quad 1\,]'$ no és un mínim local de **(PNL)** perquè viola la condició de signe dels multiplicadors de Lagrange ($\lambda_1 = -3/5$).

c) El conjunt factible és convex, doncs la primera constricció és de menor o igual i la funció que la defineix és convexa ($\nabla^2 g_1(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$). Les constriccions de signe $x \geq 0$ també defineixen conjunts convexos, i la intersecció de conjunts convexos és un conjunt convex. La matriu Hessiana de la funció objectiu és:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 + 2 & 2(x_1 - 1) - 2 \\ 2(x_1 - 1) - 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Hem d'estudiar la definició d'aquesta matriu:

- $\Delta_1 = 2x_2 + 2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq -1$. Això sempre es satisfà per a tota solució factible **(PNL)**.
- $\Delta_2 = -4x_1^2 + 16x_1 + 4x_2 - 12 \geq 0$: aquesta condició es pot satisfer en funció dels valors de x_1 i x_2. Si provem, però, el la solució factible de l'anterior apartat $x^0 = [\,0 \quad 1\,]'$ s'obté $\Delta_2 = -8 \not\geq 0$. Així doncs, $f(x)$ no és convexa ($\nabla^2 f(x)$ no és semidefinida positiva) sobre la regió factible, i, llavors, **(PNL)** no és un problema de programació

convexa.

Solució del problema 128.

a) Calulem les primeres derivades de la funció objectiu i de les constriccions:

$$\nabla f(x)' = \begin{bmatrix} (x_2+1)e^{x_1(x_2+1)} \\ x_1 e^{x_1(x_1+1)} \end{bmatrix} \quad ; \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 6x_1^2 - 4x_1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Condicions de Kuhn i Tucker: n'hi ha dos multiplicadors de Lagrange μ_1 i μ_2 associats al problema **(PNL)**

i) $\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{2} \mu_j \nabla g_j(x) = 0$

$$(x_2+1)e^{x_1(x_2+1)} + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 6x_1^2 - 4\mu_2 x_1 = 0 \tag{1}$$
$$x_1 e^{x_1(x_2+1)} - \mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{2}$$

ii) $\mu_j g_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, 2$:

$$\mu_1(x_1^2 - x_2) = 0 \tag{3}$$
$$\mu_2(2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1) = 0 \tag{4}$$

iii) $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2$

$$\mu_1 \geq 0 \tag{5}$$
$$\mu_2 \geq 0 \tag{6}$$

Condicions de factibilitat:

$$x_1^2 - x_2 \leq 0 \tag{7}$$
$$2x_1^3 - 2x_1^2 - x_2 + 1 \leq 0 \tag{8}$$

Per a resoldre **(PNL)** a partir de les equacions (1)-(8) caldria explorar els quatre casos següents:

1) Dues constriccions actives: hem de trobar un punt solució del sistema (1)-(8) sencer.
2) Cap constricció activa: de (3) i (4) s'obté $\mu_1 = \mu_2 = 0$ i el sistema es redueix a calcular $\nabla f(x) = 0$, és a dir, un punt estacionari de $f(x)$ a l'interior de la regió factible de **(PNL)**.
3) $g_1(x) = 0$, $g_2(x) < 0$: llavors $\mu_2 = 0$ i s'ha de resoldre (1), (2), (5), (7) i (8), el·liminant μ_2 de (1) i (2).
4) $g_1(x) < 0$, $g_2(x) = 0$: de (3) tenim $\mu_1 = 0$ i s'ha de resoldre (1), (2), (6) i (8), el·liminant μ_1 de (1) i (2).

La major dificultat consisteix en que els sistemes que s'obtenen en els quatre casos anteriors són sistemes d'equacions no lineals que, en general, no es poden resoldre de forma directa.

b) A la sortida de GINO observem que el valor d'un dels multiplicadors de Lagrange, μ_2, és negatiu, violant la condició (6): el punt $\tilde{x} = \begin{bmatrix} -0.455418 \\ 0.396285 \end{bmatrix}$ no és mínim local de **(PNL)**.

c) Comprovem primer que el punt $\tilde{x}$ és regular. Calculem la jacobiana de les constriccions actives J = {2}:

$$\nabla g_2(\tilde{x}) = [\,3.0661 \quad -1\,] \quad \text{rang}(\nabla g_2(\tilde{x})) = 1 \Rightarrow \text{rang complet}$$

El subespai tangent sobre $\tilde{x}$ regular és:

$$\mathrm{M} = \{y \mid \nabla g_j(\tilde{x})y = 0\,,\ j \in \mathrm{J}\} = \{y \mid\ [\,3.0661 \quad -1\,]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0\} = \{y \mid y_2 = 3.0661 y_1\}$$

La dimensió del subespai M és dim(M)=1, llavors qualsevol vector de M serveix com a base d'aquest subespai:

$$\boxed{Z = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.0661 \end{bmatrix}}$$

Solució del problema 129.

Per tal de comprovar si x^* és òptim de **(PNL)** hem de comprovar les condicions suficients de segon ordre (que inclouen, recordeu, a les de primer ordre). El primer pas és trobar els multiplicadors de Lagrange μ_1 i μ_2 associats a x^*, si es que aquests existeixen. Per tal de calcular aquests multiplicadors usarem les condicions necessàries de primer ordre (condicions de Khun i Tucker). Calculem el gradient i la matriu Jacobiana sobre el punt x^*:

S'observa que la matriu Jacobiana és de rang complet, sent doncs x^* regular. Les dues constriccions són actives sobre x^*. Si plantejem la primera condició de Khun i Tucker tenim:

Les constriccions del problema **(PNL)** estan plantejades com de ≥ 0. Això implica que la condició de signe sobre els multiplicador (tercera condició de Kuhn i Tucker) és $\mu^* \leq 0$, que és satisfeta pel vector trobat. Així doncs, el parell $x^* = [\,-1/2 \quad 1/4\,]'$, $\mu^* = [\,-0.05947 \quad -0.20816\,]$ satisfan les condicions necessàries de primer ordre. Comprovem ara les de segon ordre, calculant la definició de la matriu Hessiana de la funció Lagrangiana sobre el subespai tangent M. Calculem primer $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \mu^*)$:

Donat que $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \mu^*)$ és def + sobre $\mathbb{R}^2$, també ho serà sobre qualsevol subespai de $\mathbb{R}^2$. En particular, serà def + sobre el subespai tangent M. Així doncs, el punt x^* és un mínim local estricte de **(PNL)**.

Solució del problema 130.

S'ha de comprovar la definició de l'Hessiana de la funció Lagrangiana sobre x^*, λ^*, $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ sobre el subespai M:

La matriu $\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ és indefinida. Hem de comprovar la definició de $Z'\nabla_x^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)Z$ on Z és una base del subespai $\mathrm{M} = \{y \mid \nabla h(x^*)y = 0\}$. S'han de trobar dos vectors z_1 i z_2

pertanyents a M i linealment independents. La condició de pertinença a M és:

$$\nabla h(x^*) = [\,2 \quad 2 \quad -1\,] \quad ; \quad \nabla h(x^*)y = 0 \Rightarrow \underline{2y_1 + 2y_2 - y_3 = 0} \tag{1}$$

Trobem ara dos vectors vectors linealment independent que satisfacin (1):

$$\left.\begin{array}{l} y_3 = 0 \quad ; \quad y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = -1 \quad ; \quad z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_3 = 1 \quad ; \quad y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 1/2 \quad ; \quad z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calulem $Z'\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)Z$ i la seva definició:

$$Z'\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)Z = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/8 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array}\right\} \text{semidef}-$$

Donat que $Z'\nabla_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)Z$ és semidef - , el punt estacionari x^* pot ser màxim local, tot i que no es pot assegurar.

Solució del problema 133.

El problema a solucionar és

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subj. a} & h(x) = x_1 + x_2 - a = 0 \end{array}$$

i) Si ho solucionem introduint el canvi de variable $x_2 = a - x_1$ a la funció objectiu, obtenim el següent problema d'una variable sense restriccions:

$$\min u(x) = x_1^2 + (a - x_1)^2 = 2x_1^2 - 2ax_1 + a^2$$

Buscant els punts que anul·len $u'(x)$ obtenim:

$$u'(x) = 4x_1 - 2a \quad 4x_1 - 2a = 0 \Rightarrow x_1 = a/2$$

Com que $u''(x) = 4 > 0$ tenim que el punt $x_1 = a/2$ és un mínim del nostre problema sense restriccions. El costat de l'altre quadrat és $x_2 = a - a/2 = a/2$. Els costats que donen, doncs, l'àrea mínima són $x_1 = x_2 = a/2$ (l'àrea mínim és $a^2/2$).

ii) Solucionem-ho ara aplicant el mètode dels multiplicadors de Lagrange. Definim la funció lagrangiana:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - a)$$

Un punt per ser mínim ha de satisfer en primer lloc:

$$\left.\begin{array}{r} \nabla_{x_1} L(x, \lambda) = 2x_1 + \lambda = 0 \\ \nabla_{x_2} L(x, \lambda) = 2x_2 + \lambda = 0 \\ \nabla_{\lambda} L(x, \lambda) = x_1 + x_2 - a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -a, \quad x_1 = x_2 = a/2$$

El punt anterior és, doncs, l'únic candidat a ser un mínim. Per estar segurs que ho és, cal que observem la condició suficient de segon ordre:

$$y^T[\nabla^2_{xx}L(x,\lambda)]y > 0 \quad \forall y : \nabla h(x)y = 0$$

La matriu hessiana $\nabla^2_{xx}L(x,\lambda)$ és:

$$\nabla^2_{xx}L(x,\lambda) = \nabla_x \left(2x_1 + \lambda \quad 2x_1 + \lambda \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Com que aquesta matriu és definida positiva, tenim que per a tot $y \neq 0$ es verifica que $y^T[\nabla^2_{xx}L(x,\lambda)]y > 0$. Per tant es satisfà la condició suficient de segon ordre, amb el qual garantim que $x_1 = x_2 = a/2$ és un mínim local (i en aquest cas, a més global, podeu raonar per què?) del nostre problema amb restriccions. Observem com la solució coincideix amb la calculada considerant el problema sense restriccions.

Solució del problema 134.

i) Considerant el radi r i l'alçària h com a variables del problema, aquest pot ser formulat com:

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi r^2 h \quad \equiv -\min f(r,h) = -\pi r^2 h \\ \text{subj. a} \quad & \\ & h(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 - 6\pi = 0 \\ & r \geq 0 \quad h \geq 0 \end{aligned}$$

Treballarem, per comoditat, amb el problema equivalent de minimització. Les restriccions de no-negativitat segur que són inactives a l'òptim, ja que si fossin actives tindríem que $r = 0$ o $h = 0$, amb el qual el volum seria igual a 0 (el qual, evidentment, no correspon a un volum màxim).

ii) La funció lagrangiana és

$$L(r,h,\lambda) = -\pi r^2 h + \lambda(2\pi rh + 2\pi r^2 - 6\pi)$$

Les condicions necessàries (de primer ordre) que ha de satisfer un mínim són:

$$\begin{aligned} \nabla_r L(r,h,\lambda) &= -2\pi rh + \lambda 2\pi h + \lambda 4\pi r = 0 \\ \nabla_h L(r,h,\lambda) &= -\pi r^2 + \lambda 2\pi r = 0 \\ \nabla_\lambda L(r,h,\lambda) &= 2\pi rh + 2\pi r^2 - 6\pi = 0 \end{aligned}$$

Simplificant la segona condició anterior tenim que $r(2\lambda - r) = 0$, el qual implica que $r = 0$ o $r = 2\lambda$. Abans hem justificat que r no pot ser 0. Per tant ens quedem només amb que $r = 2\lambda$. Substituint $\lambda = r/2$ a la primer condició, s'obté que $r(2r - h) = 0$, el qual implica que $r = 0$ o $h = 2r$. Descartem, com abans, que $r = 0$, i ens quedem només amb $h = 2r$. Substituint $h = 2r$ a la tercera condició, i operant, s'arriba finalment a que $r^2 = 1$, el qual implica que $r = 1$ o $r = -1$. Descartem que $r = -1$ (un radi negatiu no té sentit) i ens quedem amb $r = 1$. Com que hem vist abans que $h = 2r$ i que $\lambda = r/2$, tenim que el punt $r = 1,\ h = 2,\ \lambda = 1/2$ satisfà les condicions de primer ordre, i és, doncs, un candidat a ser òptim.

Per estar segurs que és un punt òptim (mínim en aquest cas), cal veure si es satisfan les condicions suficients de segon ordre

$$y^T[\nabla^2_{xx}L(x,\lambda)]y > 0 \quad \forall y : \nabla h(x)y = 0$$

(x en aquest cas fa referència a (r,h)). La matriu hessiana, avaluada al punt $r=1,\ h=2,\ \lambda=1/2$, és:

$$\nabla^2_{xx}L(r=1,h=2,\lambda=1/2) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{rr}L(r,h,\lambda) & \nabla^2_{rh}L(r,h,\lambda) \\ \nabla^2_{hr}L(r,h,\lambda) & \nabla^2_{hh}L(r,h,\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\pi h + 4\pi\lambda & -2\pi r + 2\lambda\pi \\ -2\pi r + 2\lambda\pi & 0 \end{pmatrix}_{(1,2,1/2)} = \begin{pmatrix} -2\pi & -\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

Ara cal determinar els vectors y tals que $\nabla h(x)y = 0$. Tenim que

$$\nabla h(x) = \nabla_{(r,h)}[2\pi rh + 2\pi r^2 - 6\pi] = (\, 8\pi \quad 2\pi \,)$$

Per tants els vectors y han de satisfer:

$$(\, 8\pi \quad 2\pi \,)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 8\pi y_1 + 2\pi y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -4y_1$$

Finalment observem el signe de $y^T[\nabla^2_{xx}L(x,\lambda)]y$:

$$(\, y_1 \quad -4y_1 \,)\begin{pmatrix} -2\pi & -\pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ -4y_1 \end{pmatrix} = 6\pi y_1^2 > 0 \ \forall\ y \neq 0$$

Per tant es garanteix la condició suficient de segon ordre, el qual ens assegura que $r=1, h=2$ proporciona el volum màxim del cilindre (que és de $\pi r^2 h = 2\pi$).

iii) Per solucionar el problema anterior amb Lingo, podríem entrar el problema següent:

```
data:
     pi= 3.141592;
enddata
max= pi*r^2*h;
2*pi*r*h+2*pi*r^2=6*pi;
r>=0;
h>=0;
```

La solució proporcionada per Lingo és la següent:

```
Rows=      4 Vars=      2 No. integer vars=      0
     Nonlinear rows=      2 Nonlinear vars=      2 Nonlinear constraints=    1
     Nonzeros=      7 Constraint nonz=     4 Density=0.583

     Optimal solution found at step:         8
     Objective value:                 6.283184

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    PI        3.141592           0.0000000E+00
                                     R        1.000000           0.0000000E+00
```

```
        H          2.000000            0.0000000E+00

      Row     Slack or Surplus      Dual Price
        1          6.283184             1.000000
        2       0.0000000E+00         0.5000000
        3          1.000000            0.1953993E-06
        4          2.000000            0.0000000E+00
```

Podem comprovar com, efectivament, els valors de r i h obtinguts corresponen amb els que hem trobat, com el valor del volum màxim és de $2\pi = 6.283184$, i també com el multiplicador λ de la restricció d'igualtat (la 2 del llistat de Lingo) és de 0.5. També podem comprovar com els multiplicadors μ de les restriccions $r \geq 0$ i $h \geq 0$ (restriccions 3 i 4 al llistat) són 0 (una és de $0.1953993 \cdot 10^{-06}$, que és aproximadament 0), el qual concorda amb el que ens diuen les condicions d'optimalitat per a problemas amb restriccions de desigualtat. En definitiva, el punt proporcionat per Lingo verifica les condicions d'optimalitat del problema, tal i com ha de ser.

Solució del problema 135.

El problema de programació lineal pot ser escrit com:

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) = c^T x \\ &\text{subj. a} \\ &\qquad h(x) = Ax - b = 0 \\ &\qquad g(x) = -x \leq 0 \end{aligned}$$

Associant els multiplicadors λ a les restriccions $h(x) = 0$ i μ a les restriccions $g(x) \leq 0$, la funció lagrangiana que considerem és:

$$L(x, \lambda, \mu) = c^T x + \lambda^T (Ax - b) + \mu^T (-x)$$

Per poder aplicar les condicions necessàries, s'ha de garantir que el punt x és regular. Això vol dir que $\nabla h(x)$ i $\nabla g(x)$ tenen les files linealment independents. Però com que $h(x) = Ax - b$ i $g(x) = -x$ directament tenim que $\nabla h(x) = A$, les files de la qual són linealment independents perquè l'enunciat del problema ens diu que A és de rang complet, i $\nabla g(x) = -$, que clarament també té les files linealment independents.

També cal usar un conjunt $\mathcal{A}(x) = \{j : g_j(x) = 0\}$ d'índexs de restriccions actives. En aquest cas el conjunt $\mathcal{A}(x)$ correspondrà a les variables j que verifiquen que $x_j = 0$. Com que sabem, per l'enunciat, que la solució bàsica és no degenerada, les variables bàsiques satisfan $x_B > 0$. Per tant el conjunt $\mathcal{A}(x)$ correspon, de fet, al conjunt de variables no bàsiques.

Recordem que les condicions necessàries (de Kuhn-Tucker) que ha de satisfer un punt per ser òptim, són:

$$\begin{aligned} &i) \quad \nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0 \\ &ii) \quad \mu_i \geq 0 \;\forall i, \quad \mu_i = 0 \;\forall i \notin \mathcal{A}(x) \\ &iii) \quad y^T [\nabla^2_{xx} L(x, \lambda, \mu)] y \geq 0 \;\; \forall y : \nabla h(x) y = 0, \; \nabla g_j(x) y = 0 \;\forall i \in \mathcal{A}(x) \end{aligned}$$

La primera condició ens imposa que

$$c^T + \lambda^T A - \mu^T \Leftrightarrow \mu^T = c^T + \lambda^T A$$

La segona condició ens obliga a que $\mu_i = 0$ per aquells índexs i que no estan a $\mathcal{A}(x)$. Com que a $\mathcal{A}(x)$ només hi ha els índexs de les variables no bàsiques (com hem vist abans), el que realment estem dient és que $\mu_i = 0$ per a tot i associat a una variable bàsica. Si particionem el vector μ en μ_B i μ_N (associats respectivament a les variables bàsiques i no bàsiques), podem escriure la segona condició com:

$$\mu \geq 0, \quad \mu_B = 0$$

La darrera condició sempre es satisfarà, ja que $\nabla^2_{xx} L(x, \lambda, \mu) = \nabla_x [c^T + \lambda^T A - \mu^T] = 0$, i per tant sempre verificarem que, per a tot y

$$y^T [\nabla^2_{xx} L(x, \lambda, \mu)] y = 0 \geq 0$$

Ara només hem de jugar una mica amb el que ens diuen la primera i segona condició. Particionant la matriu de restriccions $A = [B\ N]$ en una part bàsica i una de no bàsica, considerant el particionament de μ abans introduït, i usant que $\mu \geq 0$ i $\mu_B = 0$, podem escriure la primera condició en dues parts:

$$\begin{aligned} \mu_B^T &= c_B^T + \lambda^T B = 0 \Rightarrow \lambda^T = -c_B^T B^{-1} \\ \mu_N^T &= c_N^T + \lambda^T N \geq 0 \Rightarrow \mu_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0 \end{aligned}$$

Adonem-nos que precisament la condició $\lambda^T = -c_B^T B^{-1}$ ens proporciona el valor negat de les variables duals, mentre que $\mu_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$ no és més que la condició de no-negativitat que han de satisfer els costos reduïts de les variables no bàsiques (els μ_N són, de fet, els costos reduïts de les variables x_N). Aquestes condicions coincideixen amb les que ha de garantir un solució bàsica òptima.

Solució del problema 136.

a) La funció objectiu és $f(x, y) = e^x y^4 - 100 y^2 (1 + x)$. El seu gradient i Hessiana es calculen com:

$$\nabla f(x, y) = \left(e^x y^4 - 100 y^2 \quad 4 e^x y^3 - 200 y (1 + x) \right)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x y^4 & 4 e^x y^3 - 200 y \\ 4 e^x y^3 - 200 y & 12 e^x y^2 - 200 (1 + x) \end{pmatrix}$$

Pot comprovar-se com a tota la regió factible $\Omega = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y\}$ la Hessiana no és definida positiva. Per exemple, al punt $x = 0$, $y = 1$, tenim

$$\nabla^2 f(0, 1) = \begin{pmatrix} e^0 1^4 & 4 e^0 1^3 - 200 \cdot 1 \\ 4 e^0 1^3 - 200 \cdot 1 & 12 e^0 1^2 - 200 (1 + 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -196 \\ -196 & -188 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu no es definida positiva (ja que $|\nabla^2 f(0, 1)| = -38604 < 0$), de forma que la funció objectiu no és convexa a tota la regió factible. Per tant no podem garantir que l'òptim que obtindríem amb un determinat algorisme d'optimització fos l'òptim global.

b) La direcció $d = (d_x, d_y)^T$ serà de descens al punt $(x, y) = (0, 1)$ si es verifica que

$$\nabla f(0,1)d < 0.$$

Només cal trobar $\nabla f(0, 1)$, usant l'expressió obtinguda a l'apartat a)

$$\nabla f(0,1) = \left(e^0 1^4 - 100 \cdot 1^2 \quad 4e^0 1^3 - 200 \cdot 1(1+0) \right) = \left(-99 \quad -196 \right),$$

i comprovar que verifica la condició de descens:

$$\nabla f(x=0, y=1)d = \left(-99 \quad -196 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Adonem-nos, però, que la direcció proporcionada només és de descens en un entorn petit del punt $(0, 1)$. Així, per exemple, tenim que $f(0, 1) = -99$, que si ens belluguem una mica (usant una longitud de pas de $\alpha = 0.01$) en la direcció de d millorem la funció:

$$f((0,1) + 0.01(1, -0.5)) = f(0.01, 0.995) = -99.0025 < -99,$$

però que si ens belluguem una mica més (usant $\alpha = 0.02$) augmentem el seu valor:

$$f((0,1) + 0.02(1, -0.5)) = f(0.02, 0.99) = -98.9901 > -99,$$

c) Per trobar els candidats a ser òptim usarem les condicions d'optimalitat de primer ordre. En primer lloc definim la Lagrangiana del nostre problema:

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = e^x y^4 - 100y^2(1+x) + \mu_1(x-1) + \mu_2(-x) + \mu_3(-y).$$

Per l'enunciat del problema sabem que a l'òptim la 2a i 3a restriccions són inactives, garantint aleshores que $\mu_2^* = \mu_3^* = 0$. Per tant escriurem la Lagrangiana de forma més simple:

$$L(x, y, \mu_1) = e^x y^4 - 100y^2(1+x) + \mu_1(x-1).$$

La primera condició necessària que ha de satisfer un punt óptim és:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x,y,\mu)}{\partial x} &= e^x y^4 - 100y^2 + \mu_1 := 0 \\ \frac{\partial L(x,y,\mu)}{\partial y} &= 4e^x y^3 - 200y(1+x) := 0. \end{aligned}$$

La segona condició necessària ens diu que $\mu_1 \geq 0$, i que $\mu_1 = 0$ si la restricció $x - 1 \leq 0$ és inactiva a l'òptim. A priori no sabem si serà o no activa aquesta restricció. Considerem, doncs, les dues possibilitats:

i) La restricció és inactiva ($x - 1 < 0$ i $\mu_1 = 0$).
El sistema que obtenim en aquest cas és:

$$\begin{aligned} e^x y^4 - 100y^2 &= 0 \\ 4e^x y^3 - 200y(1+x) &= 0. \end{aligned}$$

Pot comprovar-se com les solucions d'aquest sistema d'equacions són $(x, y = 0)$ per una banda, i $(x = 1, y = 10/\sqrt{e})$ per una altra. Tanmateix, cap d'aquestes dues solucions són vàlides, ja que sabem per l'enunciat que $y > 0$ (tercera restricció és inactiva), i hem suposat en aquest cas que $x < 1$.

ii) La restricció és activa ($x = 1$ i $\mu_1 \geq 0$).
El sistema que obtenim en aquest cas és:

$$\begin{aligned} ey^4 - 100y^2 + \mu_1 &= 0 \\ 4ey^3 - 400y &= 0. \end{aligned}$$

Pot comprovar-se com les solucions d'aquest sistema d'equacions són ($y = 0, \mu_1 = 0$), i ($y = 10/\sqrt{e}), \mu_1 = 0$). La primera d'elles, però, s'ha de descartar, ja que sabem per l'enunciat que $y > 0$ (la tercera restricció és inactiva). Per tant, l'únic candidat a ser òptim que trobem ve donat per la segona solució, de forma que

$$(x^*, y^*, \mu_1^*) = (\,1 \quad 10/\sqrt{e} \quad 0\,)\,.$$

Tot i que l'enunciat no ho demana, pot comprovar-se com aquest punt satisfà les condicions de segon ordre (suficients i necessàries). Només cal veure que $\nabla^2_{(x,y),(x,y)} L(x, y, \mu_1)$ és definida positiva al punt $x^* = 1$, $y^* = 10/\sqrt{e}$:

$$\nabla^2_{(x,y),(x,y)} L = \begin{pmatrix} e^x y^4 & 4e^x y^3 - 200y \\ 4e^x y^3 - 200y & 12e^x y^2 - 200(1+x) \end{pmatrix}_{x=1, y=10/\sqrt{e}} = \begin{pmatrix} 3678.79 & 1213.06 \\ 1213.06 & 800.0 \end{pmatrix}.$$

També cal fer notar que el fet d'haver trobat que $\mu_1^* = 0$ implica que la restricció $x - 1 \leq 0$, tot i ser activa ($x^* = 1$), no afecta a la determinació del punt òptim. Si eliminéssim aquesta restricció continuaríem obtenint la solució $x^* = 1$, $y^* = 10/\sqrt{e}$.

8.7 Optimització amb constriccions: mètode del Gradient Reduit Generalitzat.

Solució del problema 137.

i) Al primer apartat hem de verificar que el punt $x^* = (3\ 0\ 2\ 5)^T$ i els multiplicadors $\lambda^* = (-1\ 0)^T$ i $\mu^* = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ donats verifiquen les condicions d'optimalitat. En primer lloc, fàcilment observem que el punt x^* proporcionat és factible, ja que totes les components són no negatives, i satisfà les dues restriccions lineals ($3 + 0 + 2 = 5$, $2 \cdot 3 + 0 - 5 = 1$). També podem comprovar com es satisfan les condicions necessàries sobre μ: $\mu^* \geq 0$, i per a les variables que no tenen el seu límit actiu (és a dir, aquelles que $x_i^* > 0$, que són x_1, x_3 i x_4) es té que la μ_i^* associada és igual a 0 (en aquest cas $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = 0$). També podem observar com es satisfà una de les condicions suficients: $\mu_i^* > 0$ per a tota variable que té el límit actiu (en aquest cas només és x_2, i comprovem com $\mu_2^* = 1 > 0$).

Per comprovar la resta de condicions usarem la funció lagrangiana:

$$L(x, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - 3x_1 + 2x_2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 5) + \lambda_2(2x_1 + x_2 - x_4 - 1) - \sum_{i=1}^{4} \mu_i x_i$$

S'ha de garantir que $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$. En aquest cas tenim:

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_1} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= 2x_1^* - x_3^* - 3 + \lambda_1^* + 2\lambda_2^* - \mu_1^* = 2 \cdot 3 - 2 - 3 - 1 + 2 \cdot 0 - 0 = 0 \\
\nabla_{x_2} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= 2x_2^* + 2 + \lambda_1^* + \lambda_2^* - \mu_2^* = 2 \cdot 0 + 2 - 1 + 0 - 1 = 0 \\
\nabla_{x_3} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= 2x_3^* - x_1^* + \lambda_1^* - \mu_3^* = 2 \cdot 2 - 3 - 1 - 0 = 0 \\
\nabla_{x_4} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= -\lambda_2^* - \mu_4^* = -0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

Per tant, els valors de x^*, λ^* i μ^* proporcionats satisfan les equacions anteriors.

Ara cal comprovar les condicions de segon ordre. En primer lloc trobem $\nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu)$:

$$\nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu és semidefinida positiva (els valors propis són 0, 1, 2 i 3). Per tant, es satisfà que $\forall y \; y^T \nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) y \geq 0$. Això ens indica que es satisfà la condició necessària de segon ordre, però no la suficient. Per garantir la condició suficient (la última de les condicions suficients que ens queda, amb el qual podrem assegurar que x^* és un mínim local) s'ha de verificar que

$$y^T \nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) y > 0 \quad \forall y : \nabla h(x^*) y = 0, \quad \nabla g_j(x^*) y = 0 \; \forall j : x_j^* = 0$$

on $h(x)$ i $g_j(x)$ fan referència a les restriccions d'igualtat i desigualtat respectivament. En primer lloc busquem les y afectades per les condicions anteriors:

$$\left.\begin{array}{l}
\nabla h(x^*) y = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 \\[2ex]
\nabla g_2(x^*) y = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I ara ja podem calcular:

$$y^T \nabla_{xx} L(x, \lambda, \mu) y = 6y_1^2 > 0 \; \forall y \neq 0$$

Per tant, es satisfà la darrera condició suficient que ens quedava, amb el qual podem assegurar que el punt x^* donat és un mínim local del nostre problema (en aquest cas, a més, és mínim global).

ii) Partint del punt $x^0 = (0\ 2\ 3\ 1)^T$, realitzarem ara dues iteracions del mètode del gradient reduït. Abans, però, cal saber quin és el gradient de la funció objectiu:

$$\nabla f(x) = (\, 2x_1 - x_3 - 3 \quad 2x_2 + 2 \quad 2x_3 - x_1 \quad 0 \,)$$

Ens cal també determinar quines variables seran considerades dependents (o bàsiques) i independents (o no bàsiques). La única restricció és que una variable bàsica no pot valer 0. Per comoditat, donat que ens serà molt fàcil calcular B^{-1}, considerarem com a bàsiques x_3 i x_4 (x_1

i x_2 seran no bàsiques). En aquest cas tenim que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara estem en disposició de realitzar les dues iteracions requerides.

1a. iteracio)

Al punt x^0 la funció objectiu val $f(x^0) = 17$. Per la seva banda, el gradient de $f(x)$ al punt actual i el valor de $\rho = \nabla_{x_N} f(x^0) - \nabla_{x_B} f(x^0) B^{-1} N$ són:

$$\nabla f(x^0) = (\,-6 \quad 6 \quad 6 \quad 0\,) \qquad \rho = (\,-6 \quad 6\,) - (\,6 \quad 0\,)\, B^{-1} N = (\,-12 \quad 0\,)$$

La direcció de moviment de les variables no bàsiques d_{x_N} es troba a partir del vector ρ anterior de forma:

$$d_{x_{N_i}} = \begin{cases} -\rho_i & \text{si } \rho_i < 0 \text{ o } x_{N_i} > 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per la seva banda, la direcció de moviment de les variables bàsiques es calcula com $d_{x_B} = -B^{-1} N d_{x_N}$, garantint d'aquesta forma que el nou punt verificarà les restriccions d'igualtat. Realitzant els càlculs al punt actual, tenim que:

$$\left.\begin{aligned} d_{x_N} &= (\,12 \quad 0\,)^T \\ d_{x_B} &= -B^{-1} N\, (\,12 \quad 0\,)^T = (\,-12 \quad 24\,)^T \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_x = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Ara hem de calcular la longitud de pas α. En primer lloc trobem els valors α_1 i α_2 corresponents a les longituds de pas màximes per garantir que les variables bàsiques i no bàsiques continuen essent no negatives. En aquest cas tenim:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 &= \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = +\infty \end{aligned}$$

Ara realitzem una cerca lineal partint del punt x^0 i usant la direcció d_x abans calculada, sabent que la longitud de pas ha de ser menor que el $\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, que en aquest cas és $\alpha_1 = 1/4$. Per tant ara hem de calcular:

$$\alpha_3 = \arg\min\{g(\alpha) = f(x^0 + \alpha dx) = f(\begin{pmatrix} 12\alpha \\ 2 \\ 3 - 12\alpha \\ 1 + 24\alpha \end{pmatrix}) = 432\alpha^2 - 144\alpha + 17, 0 \leq \alpha \leq 1/4\}$$

Igualant a 0 la derivada de $g(\alpha)$, obtenim que $144(6\alpha - 1) = 0$, amb el qual el mínim de la funció anterior és $\alpha = 1/6$. Com que aquest valor és menor que $1/4$, tenim directament que és la solució de la cerca lineal. Per tant $\alpha_3 = 1/6$.

Ara podem calcular el nou punt

$$x^1 = x^0 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/6 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

que té un valor de funció objectiu de $f(x^1) = 5$ (hem passat d'un punt x^0 que tenia un cost de 17 a un on la funció objectiu val 5). Com que el valor $\alpha_3 \neq \alpha_1$ cap variable bàsica ha esdevingut 0, amb el qual no cal canviar la partició de variables bàsiques i no bàsiques.

2a. iteracio)

A la segona iteració cal fer els mateixos passos que a la primera, però usant ara el nou punt x^1 (no entrarem en tants detalls, doncs). El gradient i direcció de descens al punt actual són:

$$\nabla f(x^1) = (\,0 \quad 6 \quad 0 \quad 0\,) \quad \rho = (\,0 \quad 6\,) \quad d_{x_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad d_{x_B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Els valors α_i en aquesta segona iteració corresponen a:

$$\alpha_1 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 5/6$$

$$\alpha_2 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = 1/3$$

$$\alpha_3 = \arg\min\{g(\alpha) = f(x^1 + \alpha dx) = 72\alpha^2 - 36\alpha + 5, 0 \leq \alpha \leq \min\{5/6, 1/3\} = 1/3\}$$

El mínim de $g(\alpha)$ correspon a 1/4, que és menor que 1/3. Per tant $\alpha_3 = 1/4$, amb el qual el nou punt x^2 és:

$$x^2 = x^1 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 1/4 \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

i $f(x^2) = 1/2 < 5 = f(x^1)$, amb el qual hem millorat el valor de la funció objectiu. Com que $\alpha_3 \neq \alpha_1$ no cal modificar la partició actual de variables.

iii) En aquest tercer apartat iterarem a partir del punt $x^0 = (1\ 1\ 3\ 2)^T$, que té un cost associat de $f(x^0) = 7$. Tal i com ens diu l'enunciat, considerarem la partició següent: x_1 i x_2 són bàsiques, i les altres dues variables seran les no bàsiques. Per tant

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenint en compte les matrius anteriors, el gradient i direcció de descens al punt x^0 considerat són:

$$\nabla f(x^0) = (\,-4 \quad 4 \quad 5 \quad 0\,) \quad \rho = (\,-7 \quad -8\,) \quad d_{x_N} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad d_{x_B} = \begin{pmatrix} 15 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Els valors α_i en aquest punt són:

$$\alpha_1 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 15 \\ -22 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 1/22 = 0.0454$$
$$\alpha_2 = \max\{\alpha : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = +\infty$$
$$\alpha_3 = \arg\min\{g(\alpha) = f(x^0 + \alpha dx) = 653\alpha^2 - 113\alpha + 7, 0 \leq \alpha \leq \min\{1/22, +\infty\} = 1/22\}$$

El mínim de $g(\alpha)$ correspon a 0.0865. Aquest valor, però, és més gran que 1/22= 0.0454. Per tant hem de considerar que $\alpha_3 = \alpha_1 = 1/22$ (això degut a que $g(\alpha)$ és convexa —$g''(\alpha) > 0$—, ja que si fos concava prendríem $\alpha_3 = 0$). El nou punt x^1 serà doncs:

$$x^1 = x^0 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1/22 \begin{pmatrix} 15 \\ -22 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6818 \\ 0 \\ 3.3182 \\ 2.3636 \end{pmatrix}$$

i $f(x^1) = 3.2128 < 7 = f(x^0)$, amb el qual hem millorat el valor de la funció objectiu. Observem com, en aquest cas, donat que $\alpha_3 = \alpha_1$, una de les variables bàsiques s'ha fet 0, situació que s'ha d'evitar al mètode del gradient reduït. Per tant, ens cal buscar una variable no bàsica amb valor positiu i intercanviar-la per aquesta variable bàsica anul·lada. Per exemple, podem fer entrar a la base la variable x_3, amb el qual les noves matrius B i N serien:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i haurien de ser usades a la següent iteració per calcular el nou punt x^2.

Solució del problema 138.

a) Denotant per x_1 l'arc que va del node A al C, per x_2 l'arc que va del node A al B, i per x_3 i x_4 els arcs que van del node B al C, el problema a solucionar pot ser formulat com

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 = M & \text{[equació de balanç al node A]} \\ & x_2 = x_3 + x_4 & \text{[equació de balanç al node B]} \\ & x_1 + x_3 + x_4 = M & \text{[equació de balanç al node C]} \\ & 0 \leq x_i \leq M \quad i = 1, ..., 4 & \end{array}$$

b) Podem eliminar la restricció associada al balanç en un node (per exemple, el C), ja que és combinació lineal de les altres dues. És fàcil veure que sumant les equacions dels nodes A i B obtenim la del node C:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = M \\ x_3 + x_4 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = M$$

Pel que fa als límits de les variables, podem eliminar el límit superior $x_i \leq M$ ja que no poden circular per la xarxa més de M unitats del fluid. Si eliminem els límits inferiors $x_i \geq 0$, però, podríem tenir situacions on apareguessin fluxos negatius que satisfan les restriccions d'igualtat del problema. Per exemple, el punt $x_1 = -M$, $x_2 = 2M$ i $x_3 = x_4 = M$ és factible si eliminem $x_i \geq 0$. Tanmateix, en aquest problema concret aquestes situacions són econòmicament indesitjables ja que tenen un cost molt elevat. És millor fer circular fluxos que siguin fraccions positives de M, les quals satisfaran les restriccions d'igualtat amb un cost menor.

El problema que tenim eliminant els límits i l'equació de balanç del node C és doncs:

$$\begin{array}{rl} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 = M \\ & x_2 = x_3 + x_4 \end{array}$$

c) El problema obtingut a l'apartat anterior el solucionarem aplicant les condicions d'optimalitat (de Lagrange) per a problemes amb restriccions d'igualtat. Definint la Lagrangiana

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - M) + \lambda_2(x_2 - x_3 - x_4),$$

les condicions de primer ordre s'obtenen derivant i igualant a 0 el gradient de la Lagrangiana:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 := 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 := 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda_2 := 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_4} = 2x_4 - \lambda_2 := 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - M := 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_2} = x_2 - x_3 - x_4 := 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1^* = 3/5M \\ x_2^* = 2/5M \\ x_3^* = x_4^* = 1/5M. \end{array}$$

Per estar segurs de que es tracta d'un punt mínim hem de comprovar les condicions de 2n ordre: $y^T[\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*)]y \geq 0$ per a tota $y \neq 0$ tal que $Ay = 0$ (on A representa la matriu de restriccions lineals del problema). Calculem $\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*)$:

$$\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Donat que $\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*)$ és definida positiva per a tot vector y (no només per aquells tals que $Ay = 0$), es satisfan les condicions suficients de segon ordre, i per tant el punt $x^* =$

$(3/5M \quad 2/5M \quad 1/5M \quad 1/5M)^T$ és el mínim del problema.

d) Per garantir que és un mínim global hem de veure si ens trobem davant d'un problema convex, és a dir, que té la funció objectiu i una regió factible convexes:

i) La Hessiana de la funció objectiu ve donada per

$$\nabla^2_{xx} f(x) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix},$$

que és una matriu definida positiva, garantint que $f(x)$ és estrictament convexa.

ii) Les dues equacions del problema són lineals, i sabem que aquestes sempre defineixen conjunts factibles convexos

Per tant, podem garantir que el punt obtingut a l'apartat c) és l'òptim global del nostre problema.

e) El problema a solucionar és:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 = M \\ & x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{array} \qquad \text{on} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per l'enunciat sabem que la base inicial està formada per x_1 i x_2, de forma que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El gradient de la funció objectiu és

$$\nabla f(x) = (\, 2x_1 \quad 2x_2 \quad 2x_3 \quad 2x_4 \,)$$

1a Iteració)

El punt inicial d'iteració i gradient en aquest punt són:

$$x^0 = (\, 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \,)^T \qquad\qquad \nabla f(x^0) = (\, 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \,).$$

Usant la partició anterior de $A = [B|N]$ i una partició equivalent per a $\nabla f(x)$, calculem el gradient reduït al punt x^0:

$$\rho = \nabla_{x_N} f(x^0) - \nabla_{x_B} f(x^0) B^{-1} N = (\, -20 \quad -20 \,).$$

Per tant la direcció de moviment obtinguda és

$$\left.\begin{aligned} d_{x_N} &= \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \\ d_{x_B} &= -B^{-1}Nd_{x_N} = \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad d_x = \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Tot seguit calculem la passa α:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max\{\alpha \geq 0 : \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 &= \max\{\alpha \geq 0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0\} \Rightarrow \alpha_2 = +\infty \\ \alpha_3 &= \arg\min\{g(\alpha) = f(x^0 + \alpha dx) = 4000\alpha^2 - 800\alpha + 100, 0 \leq \alpha \leq 1/4\}. \end{aligned}$$

El mínim de $g(\alpha)$ ve donat per $\alpha = 1/10$. Com que aquest valor ja és menor que $1/4$, tenim que $\alpha_3 = 1/10$.

El nou punt x^1 és ara:

$$x^1 = x^0 + \alpha_3 d_x = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/10 \begin{pmatrix} -40 \\ 40 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Al nou punt hem millorat el valor de la funció objectiu:

$$f(x^0) = 10^2 = 100 > f(x^1) = 6^2 + 4^2 + 22^2 = 60.$$

2a Iteració)

La partició de variables bàsiques i no bàsiques no ha estat modificada. El gradient al nou punt és

$$\nabla f(x^1) = (\,12 \quad 8 \quad 4 \quad 4\,),$$

i el gradient reduït ve donat per

$$\rho = \nabla_{x_N} f(x^1) - \nabla_{x_B} f(x^1) B^{-1} N = (\,0 \quad 0\,).$$

Per tant $d_{x_N} = 0$ i $d_{x_B} = 0$. És a dir, ja no podem bellugar-nos millorant la nostra funció objectiu, de forma que el punt actual $x^1 = (\,6 \quad 4 \quad 2 \quad 2\,)$ ja és l'òptim del nostre problema. Adonem-nos que aquest resultat concorda amb l'obtingut de forma analítica a l'apartat b):

$$x^* = \begin{pmatrix} 3/5M \\ 2/5M \\ 1/5M \\ 1/5M \end{pmatrix} \quad \overset{[M=10]}{\Longrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solució del problema 139.

Hem de començar realitzant la selecció de les variables dependents i independents sobre x. Es calcula prèviament la matriu Jacobiana $\nabla h(x)$:

$$h(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^2}{2} + x_2 - x_3 + 2x_4x_5 - x_5 + 2 \\ \dfrac{3x_1^2}{2} + x_2x_3 - 2x_2 + \dfrac{3x_4^2}{2} + x_5 - \dfrac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & -1 & 2x_5 & 2x_4 - 1 \\ 3x_1 & x_3 - 2 & x_2 & 3x_4 & 1 \end{bmatrix}$$

que, avaluada sobre $x = [\,1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1/2\,]'$ proporciona:

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La variable x_2 no hauria de ser independent, doncs es troba a fita inferior. Una possible selecció de variables dependents seria $y = [\,x_1 \quad x_3\,]'$ ja que ambdues es troben entre fites i la matriu:

$$\nabla_y h(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

és no singular. Les variables independients serien $z = [\,x_2 \quad x_4 \quad x_5\,]'$, y la matriu $\nabla_z h(x)$:

$$\nabla_z h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si calculem l'expressió del gradiente:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_3^2}{2} - x_5 + 3 & -6 & \dfrac{2x_1x_3}{2} - 4 & -4 & -x_1 \end{bmatrix}$$

i l'avaluem sobre $x = [\,1 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 1/2\,]'$ s'obté:

$$\nabla f(x) = [\,7 - 6 - 1 - 4 - 1\,] \quad ; \quad \nabla_y f(x) = [\,7 \quad -1\,] \quad ; \quad \nabla_z f(x) = [\,-6 \quad -4 \quad -1\,]$$

Determinem el gradient reduït sobre el punt x. A la pràctica, el càlcul del gradient reduït es duu a terme en dues passes. A la primera es calcula el producte $\lambda' = \nabla_y f(y,z)[\nabla_y h(y,z)]^{-1}$ mitjançant la resolució del sistema d'equacions $\nabla_y h(y,z)'\lambda = \nabla_y f(y,z)'$. La raó d'aquest procediment és que és més estable i eficient treballar amb la factorització LU de la matriu $\nabla_y h(y,z)$ que amb la seva inversa. La factorització LU de $\nabla_y h(x)$ és:

$$\nabla_y h(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolent el sistema s'obté el valor de λ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} 1 & \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

A continuació es procedeix al càlcul de $r = \nabla_z f(y,z)' - \nabla_z h(y,z)'\lambda$:

$$r = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Tenint en compte que $z = [\,0 \quad 1 \quad 1/2\,]$ i les fites $l_z = 0$ i $u_z = [\,4 \quad 4 \quad 4\,]$, s'obté $\Delta z = -r$:

$$\Delta z = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Un cop determinada Δz (i després de comprobar que és diferent de zero), es procedeix al càlcul de Δy. En la pràctica, aquest càlcul es fa a través de la resolució del sistema d'equacions $\nabla_y h(y,z)\Delta y = -\nabla_z h(y,z)\Delta z$:

Calculem ara la longitud de pas màxima $\bar{\alpha}$. Tenint en compte que $l = 0$ i $u = [\,4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4\,]'$ tenim que:

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}', \ \Delta y = \begin{bmatrix} -46/3 \\ 26/3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{y_1} = \dfrac{1}{46/3} \\ \bar{\alpha}_{y_2} = \dfrac{(4-3)}{26/3} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\alpha}_y = \min\{\frac{3}{46}, \frac{3}{26}\} = \frac{3}{46}$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}', \ \Delta z = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{z_1} = (4-0)/9 = 4/9 \\ \bar{\alpha}_{z_2} = (4-1)/11 = 3/11 \\ \bar{\alpha}_{z_3} = (4-1/2)/4 = 7/8 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\alpha}_z = \min\{\frac{4}{9}, \frac{3}{11}, \frac{7}{8}\} = \frac{3}{11}$$

$$\bar{\alpha} = \min\{\frac{3}{46}, 3/11\} = \frac{3}{46}$$

Prenem ara una longitud de pas arbitrària $\alpha^* = \bar{\alpha}/2 = 3/92$. El punt iterat serà:

$$\tilde{x} = x + \alpha^*\Delta x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{3}{92}\begin{bmatrix} -46/3 \\ 9 \\ 26/3 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 27/92 \\ 151/46 \\ 125/92 \\ 29/46 \end{bmatrix} ; \ \tilde{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 151/46 \end{bmatrix}, \ \tilde{z} = \begin{bmatrix} 27/92 \\ 125/92 \\ 29/46 \end{bmatrix}$$

Com era d'esperar, el punt $\tilde{x}$ no és factible, ja que $h(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1.98488 \\ 3.26364 \end{bmatrix} \neq 0$. Apliquem una passa del procés iteratiu de recuperació de factibilitat a partir de $\tilde{x}$. El càlcul de $\Delta\tilde{y} = -[\nabla_y h(y,z)]^{-1} h(\tilde{y},\tilde{z})$ es realitza resolent el sistema $\nabla_y h(y,z)\Delta\tilde{y} = -h(\tilde{y},\tilde{z})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Delta\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{y}_1 \\ \Delta\tilde{y}_2 \end{bmatrix} = -h(\tilde{y},\tilde{z}) = \begin{bmatrix} -1.98488 \\ -3.26364 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\tilde{y}_1 = -1.08788 \\ \Delta\tilde{y}_2 = 0.897 \end{cases}$$

Tenint en compte el valor de les variables $\tilde{y}' = [\,1/2 \quad 151/46\,]'$ i les fites $u_y = [\,4 \quad 4\,]$, $l_y = 0$, la longitud de pas màxima al llarg de $\Delta\tilde{y}$ és:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_{\tilde{y}_1} = \dfrac{1/2}{1.08788} = 0.4596 \\ \bar{\alpha}_{\tilde{y}_2} = \dfrac{4 - 151/46}{0.897} = 0.7997 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\alpha}_{\tilde{y}} = 0.4596 \quad ; \quad \alpha_{\tilde{y}} = \min\{1, 0.4596\} = 0.4596$$

és a dir:

$$\tilde{y} \leftarrow \tilde{y} + \alpha_{\tilde{y}}\Delta\tilde{y} \approx \begin{bmatrix} 0. \\ 3.6948 \end{bmatrix} \quad ; \quad h(\tilde{y}, \tilde{z}) = \begin{bmatrix} -0.3186 \\ 0.3969 \end{bmatrix}$$

El nou punt $\tilde{x}$ està més a prop de la hipersuperfície $\mathcal{S}$ de les constriccions $h(x) = 0$ que el punt original. Com que $\alpha_{\tilde{y}} = \bar{\alpha}_{\tilde{y}_1}$, hem d'intercanviar $\tilde{y}_1$ amb una variable independent $\tilde{z}_q$ apropiada. El valor de $\nabla h(x)$ sobre el nou punt $\tilde{x} = [\tilde{y}', \tilde{z}']$ és:

$$\nabla h(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1 & 1.2608 \\ 3/2 & 1.2826 & 0.2934 & 4.0760 \end{bmatrix}$$

La variable $\tilde{z}_1 \equiv x_2$ està entre fites i, junt amb $\tilde{y}_2$, proporciona un nou $\nabla_y h(y, z)$ no singular:

$$\nabla_y h(y, z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1.2826 & 0.2934 \end{bmatrix} \quad , \quad \det(\nabla_y h(y, z)) = 1.57608$$

així doncs, es por intercanviar $\tilde{y}_1 \equiv x_1$ per $\tilde{z}_1 \equiv x_2$.