Col·lecció de problemes resolts de Programació Estocàstica

Jordi Castro Pérez

Dept. d'Estadística i Investigació Operativa

Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

Es presenta en aquest text una col·lecció de problemes, la major part d'ells resolts, de Programació Estocàstica. El text forma part del material de l'assignatura Models Estocàstics de la Investigació Operativa I de la Llicenciatura en Ciències i Tècniques Estadístiques impartida a la FME. Tanmateix, el nivell dels problemes presentats fa que la col·lecció sigui adequada per a qualsevol assignatura introductòria en la matèria.

Els problemes s'han dividit en dos apartats: exercicis de modelització, i exercicis de propietas bàsiques dels problemes estocàstics. Alguns dels exercicis són variacions dels presentats en l'excel·lent text introductori "*Introduction to Stochastic Programming*, J.R. Birge & F. Louveaux, Springer, 1997". Recomanem aquest llibre a qualsevol lector que s'iniciï en la matèria. Els exercicis de modelització han estat solucionats usant el llenguatge AMPL. Malgrat els codis AMPL complets dels exercicis no s'adjunten, poden aconseguir-se contactant amb l'autor.

Els dos primer capítols presenten els enunciats dels dos grups de problemes. Els dos darrers capítols inclouen les solucions comentades de la majoria de problemes. El fet d'acompanyar la solució dels exercicis és especialment útil per als problemes de modelització, els quals sovint presenten diferents interpretacions i múltiples solucions. En aquest sentit, val a dir que en alguns casos el model aquí presentat com a solució no és únic i pot haver d'alternatius.

Finalment, agrair el treball realitzat per l'estudiant de la LCTE Raquel García, que, en el marc d'una beca docent, va editar en TEX bona part del material presentat en aquesta col·lecció de problemes.

Jordi Castro
`http://www-eio.upc.es/~jcastro`
Barcelona, novembre de 2002

Índex

1 Modelització de problemes estocàstics.

1. Problema del pagès (I)

Al problema del pagès explicat a classe, comproveu que la solució del valor esperat proporciona uns beneficis de 107240$, i que per tant el valor de la solució estocàstica és de 1150$.

2. Problema del pagès (II)

Al problema del pagès és lògic pensar que quan la collita va bé per a ell, també anirà bé per als altres pagessos, i això pot fer baixar el preu de venda del conreus. Formuleu i solucioneu el problema considerant que els preus de venda dels tres conreus augmenten un 10% i disminueixen un 10% respecte el preu original en un any dolent i bo respectivament. Quin terme de la representació implícita del problema estocàstic passa ara a ser una variable aleatòria?

3. Problema del pagès (III)

Al problema del pagès, suposem que en comptes d'un camp de 500 acres, té 4 de 185, 145, 105 i 65. Per a la seva comoditat només vol plantar un dels tres tipus de conreus a cada camp. Formuleu i solucioneu el problema con un problema estocàstic de 2 etapes, on la 1a etapa en aquest cas inclourà variables binàries.

4. Problema del pagès (IV)

Al problema del pagès, suposeu que les vendes i compres de panís i blat només poden fer-se en contractes de cents de tones (és a dir, han de ser múltiples de 100). Formuleu i solucioneu el problema estocàstic resultant, considerant que part de les variables de la segona etapa hauran de ser enteres.

5. Problema del pagès (V)

Al problema del pagès, suposem que el pagès, com qualsevol persona, té molta aversió o por al risc. Si estés interessat en maximitzar el seu benefici en el pitjor dels casos, hauria d'implementar la política òptima que vam obtenir per a l'escenari d'any DOLENT.

a) Calculeu la pèrdua en beneficis esperats al llarg del temps si aplica aquesta solució en comptes de l'estocàstica, entenent que en el futur un terç dels anys seran de cada tipus.

b) Una situació intermèdia consistiria en afegir una restricció dins el problema estocàstic forçant a que en el pitjor dels casos (escenari DOLENT) els beneficis obtinguts fossin

≥ 58 mil dolars. Quina és ara la pèrdua en beneficis esperats?

c) Repetiu l'apartat anterior amb els valors 56, 54, 52, 50 i 48 mil dolars. Observeu com cada cop les solucions s'atasen més a l'estocàstica, i que en el moment en que la nova restricció es fa inactiva clarament obteniu la solució estocàstica.

6. Problema del venedor de diaris (I)

Solucioneu el problema del venedor de diaris considerant que $q = 10$, $r = 5$, $c = 8$, $u = 200$, i $\xi \sim U[100, 200]$. Calculeu també el valor de la solució estocàstica.

7. Problema del venedor de diaris (II)

Considereu que al problema del venedor de diaris la variable ξ de demanda és discreta i pren els valors $\xi_i, i = 1 \dots N$ amb probabilitats $p_i, i = 1 \dots N$.

a) Calculeu $\mathcal{Q}(x) = E_\xi[Q(x, \xi)]$ (només cal que deixeu indicada l'expressió), i observeu que aquesta funció és no diferenciable, el qual complica molt la solució analítica del problema $\min cx + \mathcal{Q}(x), \text{s.a } 0 \leq x \leq u$.

b) Solucioneu el problema anterior usant la forma extensa d'un programa estocàstic de 2 etapes. Considereu que les dades són les de l'exercici 6 ($q = 10$, $r = 5$, $c = 8$, $u = 200$), i que la variable aleatòria prové de discretitzar la variable aleatòria $U[100, 200]$ en N punts equiprobables ($\xi_1 = 100, \dots, \xi_N = 200$). Comproveu que la solució obtinguda s'atansa a l'analítica de l'exercici 6 a mida que augmenteu N.

8. Problema del venedor de diaris (III)

Suposeu que al problema del venedor de diaris solucionat a classe, els coeficients de venda i retorn de diaris q i r són també variables aleatòries contínues. Solucioneu el problema de forma analítica de forma similar al fet a classe, considerant que les variables demanda, q i r són independents. És a dir, calculeu $\mathcal{Q}(x) = E_{\xi_1\xi_2\xi_3}[Q(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3)]$. Comproveu que s'obté la mateixa solució del problema original substituint q i r per les seves esperances.

9. Problema del venedor de diaris (IV)

Quina seria la solució del problema del venedor de diaris si els límits de la variable x (nombre de diaris comprats) fossin $l \leq x \leq u$?

10. Problema del venedor de diaris (V)

Considereu la següent variant del problema del venedor de diaris. Cada dia el venedor ha de comprar x_1 diaris i x_2 revistes. El nombre conjunt de diaris i revistes no ha de ser superior a 100 unitats. El preu de compra és de c_1 i c_2 euros/unitat per als diaris i revistes respectivament. Anàlogament els preus de venda són v_1 i v_2.

1) Suposeu que la demanda de diaris i revistes són dos variables aleatòries independents ξ_1 i ξ_2. Doneu una expressió analítica del problema determinista equivalent $\min cx + \mathcal{Q}(x), \text{s.a } Ax = b, x \geq 0$. Solucioneu aquest problema amb AMPL (o aplicant directament les condicions d'optimalitat KKT), usant que $c_1 = 50, c_2 = 70, v_1 = 60, v_2 = 80$, $\xi_1 \sim U[50, 200]$, $\xi_2 \sim U[50, 100]$.
2) Solucioneu el problema de l'apartat anterior a través de la forma extensa del problema

estocàstic, usant les mateixes dades i considerant una discretització de N_1 i N_2 punts per a cada variable de demanda. Compte: el nombre de variables de 2a etapa en aquest cas serà de $N_1 \times N_2$, una per a cada escenari obtingut pel producte cartesià dels diferents estats de la natura de les dues variables; si useu discretitzacions molt fines (llavors N_1 i N_2 seran grans), el problema resultant excedirà la capacitat de la versió d'estudiant d'AMPL de que disposeu (suporta problemes de fins a 300 variables i 300 restriccions).

3) Suposeu ara que les demandes de diaris i revistes depenen d'una única variable aleatòria de demanda ξ, i se sap que la demanda de diaris ξ_1 verifica $\xi_1 = 3/4\xi$ i que la de revistes ξ_2 és $\xi_2 = 1/4\xi$. A l'igual que a l'apartat a), doneu una expressió analítica del problema equivalent determinista, i solucioneu-lo amb AMPL amb els mateixos valors que a l'apartat a), on ara $\xi \sim U[50, 400]$.
4) Solucioneu el problema de l'apartat anterior a través de la forma extensa del problema estocàstic, usant les mateixes dades i una discretització de ξ de N punts.

11. Problema de planificació financera (I)

Formuleu en AMPL les dues versions del problema senzill de planificació financera (una explicitant la història passada, l'altra sense explicitar-ho i afegint restriccions de no-anticipació). Solucioneu-los usant que $T = 3, B = 55, G = 80, Q = 1, R = 4$, i que els dos tipus possibles de retorns són: (1.25–accions i 1.14– bons) per al tipus 1, i (1.06–accions i 1.12–bons) per al tipus 2. Comproveu que obteniu la mateixa solució amb les dues versions. Calculeu el valor de la solució estocàstica.

12. Problema de planificació financera (II)

Formuleu una versió del problema de planificació financera on només hi hagi un periode d'inversió (T=1). Considereu en aquest cas, a més, que G es també aleatori i pot prendre els valors 75 i 85 amb igual probabilitat. Formuleu i solucioneu el problema resultant.

13. Problema d'expansió de capacitat

A l'exemple del problema d'expansió de la capacitat formulat a classe, suposeu que afegiu una restricció probabilista de fiabilitat del tipus $\sum_{i=1}^{4} x_i \geq 11$ en comptes del valor de 12 usat a classe (que corresponia a $F^{-1}(\alpha = 1)$). Quin és en aquest cas el valor de la solució estocàstica?

14. Problema de control de qualitat d'un eix

Al problema del control de qualitat de l'eix, formuleu i solucioneu amb AMPL la forma extensa del problema equivalent determinista suposant que ξ és una variable aleatòria de distribució triangular d'extrems $0.9x$ i $1.1x$, i mitjana x.

2 Propietats bàsiques dels problemes estocàstics.

15.

Considereu el següent problema de segona etapa d'un determinat programa estocàstic:

$$\begin{aligned} \min\quad & 2y_1 + y_2 \\ & y_1 + 2y_2 \geq \xi_1 - x_1 \\ & y_1 + y_2 \geq \xi_2 - x_1 - x_2 \\ & 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1. \end{aligned}$$

a) Trobeu $K_2(\xi)$ per a tot ξ.

b) Suposeu que ξ_1 i ξ_2 són dos variables aleatòries independents i contínues amb distribució uniforme en $[2,4]$. Calculeu els conjunts K_2^P i K_2.

16.

Donat el següent problema de segona etapa d'un determinat programa estocàstic:

$$\begin{aligned} \min\quad & 2y_1 + y_2 \\ & y_1 - y_2 \leq 2 - \xi x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \end{aligned}$$

trobeu els conjunts $K_2(\xi)$ i K_2 per a:

a) $\xi \sim U[0,1]$.

b) $\xi \sim Poisson(\lambda),\ \lambda > 0$.

17.

Considereu el el següent problema de segona etapa d'un determinat programa estocàstic:

$$\begin{aligned} Q(x,\xi) = \min\quad & y \\ & y \geq \xi \\ & y \geq x. \end{aligned}$$

Suposem que $x \geq 0$ i que ξ té la següent funció de densitat

$$f(\xi) = \frac{2}{\xi^3}, \xi \geq 1.$$

Comproveu que $K_2^P \neq K_2$, i indiqueu per què aquest resultat no contradiu l'indicat pel teorema d'equivalència entre K_2 i K_2^P per a distribucions de ξ contínues.

18.

Considereu el següent problema de segona etapa d'un determinat programa estocàstic:

$$\begin{array}{ll} \min & 2y_1 + y_2 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 - x_1 \\ & y_1 \geq \xi - x_1 - x_2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{array}$$

a) Mostreu que aquest problema té recurs complet.

b) Si considerem que $0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1$, comproveu que la solució del problema de segona etapa és:

$$\begin{cases} y_1^* = \xi - x_1 - x_2,\ y_2^* = \max\{1 - \xi + x_2, 0\} & \text{si } \xi \geq x_1 + x_2 \\ y_1^* = 0,\ y_2^* = 1 - x_1 & \text{si } \xi \leq x_1 + x_2. \end{cases}$$

c) Comproveu ara que

$$Q(x,\xi) = \begin{cases} 1 - x1 & \text{si } -\infty < \xi \leq x_1 + x_2 \\ \xi - 2x_1 - x_2 + 1 & \text{si } x_1 + x_2 \leq \xi \leq 1 + x_2 \\ 2(\xi - x_1 - x_2) & \text{si } 1 + x_2 \leq \xi. \end{cases}$$

d) Utilitzant l'expressió anterior, comproveu que $Q(x,\xi)$ és funció convexa i lineal per parts respecte ξ i $x = (x_1, x_2)$, tal i com es va demostrar a classe. Per observar la convexitat i linealitat per parts feu la representació gràfica de $f(\xi) = Q(x,\xi)$ respecte ξ, i de $f(x_1, x_2) = Q(x,\xi)$ respecte (x_1, x_2).

e) Sabent que si $\xi \sim U[0,2]$, aleshores es té que $\mathcal{Q}(x) = E_\xi[Q(x,\xi)] = \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_1 - 6x_2 + 9)$, comproveu que se satisfan els apartats relevants del teorema que vam presentar a classe sobre les propietats de $\mathcal{Q}(x)$.

19.

Considereu el següent problema de segona etapa d'un determinat programa estocàstic:

$$\begin{array}{ll} \min & \xi y_1 + y_2 \\ & y_1 + y_2 \geq 1 - x_1 \\ & y_1 \geq 1 - x_1 - x_2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{array}$$

a) Considerant $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 1$, calculeu $Q(x,\xi)$ i comproveu que és una funció còncava de ξ.

b) Demostreu per a un problema de segona etapa qualsevol que $Q(x,\xi)$ és sempre una funció còncava de ξ, tal i com estableix el teorema presentat a classe sobre les propietats de $Q(x,\xi)$.

20.

Proveu els següents tres resultats que van ser presentats a classe per a programes estocàstics de recurs simple.

a) Cada un dels termes $\mathcal{Q}_i(x)$ de la funció de recurs $\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{m_2} \mathcal{Q}_i(x)$ pot calcular-se com:
$$\mathcal{Q}_i(x) = q_i^+ E[h_i] - (q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.}x - q_i \int_{h_i \le T_{i.}x} h_i f_i(h_i) dh_i,$$
on $q_i = (q_i^+ + q_i^-)$.

b) Si $\mathcal{Q}_i(x)$ és diferenciable aleshores el seu gradient és
$$\nabla \mathcal{Q}_i(x) = -(q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.}.$$

21.

Comproveu que el problema del venedor de diaris és un problema estocàstic de recurs simple. Usant les expressions de $\mathcal{Q}_i(x)$ del problema anterior, calculeu $\mathcal{Q}x$, $\nabla\mathcal{Q}x$ i $\partial\mathcal{Q}(x)$ per al problema del venedor de diaris, i comproveu com aquestes expressions coincideixen amb les que vam obtenir a classe en presentar el problema al primer tema del curs.

22. Examen Programació Estocàstica (Octubre 2000)

Problema 1.

Una estudiant de la Llicenciatura en Ciències i Tècniques estadístiques té demà l'examen de Programació Estocàstica. Avui disposa de N hores lliures, que vol repartir entre estudiar i assistir a un partit de l'equip de bàsquet on juga. Estima, pels exàmens d'altres anys, que el nombre d'hores que li caldria estudiar com a mínim per tenir una bona nota es distribueix com una certa variable aleatòria ξ_1. De forma anàloga, si assisteix al partit de bàsquet sap que com a mínim necessitaria un total de ξ_2 hores, on ξ_2 segueix una certa distribució de probabilitat. El seu objectiu és deixar de dedicar a estudiar i al partit el mínim d'hores possibles. Suposarem que aquesta estudiant dóna el doble d'importància a les hores que deixaria d'estudiar que a les que deixaria de dedicar al partit.

(a) Formuleu el problema de programació estocàstica que hauria de solucionar aquesta estudiant per planificar a priori quantes hores dedicar a estudiar i quantes al partit. Indiqueu clarament quines variables pertanyen a la 1a i quines a la 2a etapa.

(b) Si ξ_1 es considera una variable aleatòria discreta que pot prendre els valors $\xi_{1_1},\ldots,\xi_{1_r}$ amb probabilitats $p_1,\ldots,p_r$, i ξ_2 també es considera una variable aleatòria discreta de valors $\xi_{2_1},\ldots,\xi_{2_s}$ amb probabilitats $q_1,\ldots,q_s$, escriviu el problema de programació lineal que ens proporcionaria la solució de la formulació que heu obtingut a l'apartat (a). (Òbviament, podeu considerar que ξ_1 i ξ_2 són variables independents.)

Problema 2.

Un estudiant de la Llicenciatura en Ciències i Tècniques estadístiques té demà l'examen de Programació Estocàstica. Avui disposa de 10 hores lliures, que vol repartir entre estudiar i assistir a l'entrenament de l'equip de bàsquet on juga. Estima, pels exàmens d'altres anys, que el nombre d'hores ξ que li caldria estudiar com a mínim per tenir una bona nota es distribueix com una variable aleatòria contínua uniforme $U[5, 10]$. La durada de l'entrenament és oficialment de dues hores, però sempre acostuma a quedar-se a fer un partidet amb els amics després de l'entrenament. Per saber com repartir de forma òptima el nombre d'hores que té, i donant el doble d'importància a les hores que deixa d'estudiar que a les que deixa d'entrenar, formula el següent programa estocàstic:

$$\begin{array}{rl} \min & E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{on} \quad \begin{array}{rl} Q(x,\xi) = \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{s.a} & y_1 + x_1 \geq \xi \\ & y_2 + x_2 \geq 2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{array}$$

(a) Indiqueu quins són els conjunts factibles K_1 i K_2 d'aquest problema. Digueu també si, tal i com està formulat, es tracta d'un problema de recurs relativament complet, complet o simple.

(b) Calculeu la solució òptima del problema anterior (cal obtenir la funció de recurs $\mathcal{Q}(x)$ i solucionar $\min \mathcal{Q}(x),\ x \in K_1$).

(c) Calculeu el valor esperat de la informació perfecta EVPI, i el valor de la solució estocàstica VSS per a aquest problema.

23. Examen Programació Estocàstica (Gener 2001)

Problema 1.

Una oficina bancària vol decidir la quantitat de diners que diposita al caixer automàtic els divendres abans de tancar, de cara als caps de setmana. L'oficina ha estimat que aquests diners tenen un cost (associat al risc de que robin el caixer) de R euros per cada euro inicialment dipositat. La demanda d'euros durant el cap de setmana es considera una variable aleatòria ξ amb una certa distribució, on $m \leq \xi \leq M$. El caixer té una capacitat màxima de L euros. El cost (englobant tant l'aspecte econòmic com el de pèrdua de confiança dels seus clients) que suposa a l'oficina que la demanda d'euros superi la quantitat dipositada és de: (i) un cost fix de C_1 euros si el caixer es queda sense diners, més (ii) un cost variable de C_2 euros per cada euro que la demanda superi la quantitat dipositada al caixer.

(a) Formuleu el problema de programació estocàstica que s'hauria de solucionar per saber la quantitat òptima a dipositar al caixer. Indiqueu clarament quines variables pertanyen a la 1a i quines a la 2a etapa. (**Nota:** està totalment prohibit formular la segona etapa d'aquest problema usant condicionals (**if**'s); formuleu-la com un problema de programació lineal entera).

(b) Escriviu el model en AMPL amb la forma extensa del problema. Suposeu que ja teniu una discretització de la demanda ξ en dos vectors `dem[i]` (valor de la demanda) i `prob[i]` (probabilitat associada al valor i-èssim de demanda). (**Nota:** a l'igual que abans no podeu usar condicionals; si no sabeu com escriure alguna expressió, deixeu-la indicada, però que quedi clar el que voleu dir).

Problema 2.

Una oficina bancària vol decidir la quantitat x de diners que diposita al caixer automàtic els divendres abans de tancar, de cara als caps de setmana. L'oficina ha estimat que aquests diners tenen un cost lineal (associat al risc de que robin el caixer) de Rx. La demanda d'euros durant el cap de setmana es considera una variable aleatòria ξ de distribució contínua uniforme a l'interval $[m, M]$. El caixer té una capacitat màxima de L euros —fita superior de x—, on $L \in [m, M]$. Suposarem també que x té una fita inferior de m (el qual és força obvi). Si la demanda supera la quantitat x de diners dipositats al caixer, s'incorre en un cost fix de C euros. Considereu que es formula un problema estocàstic de 2 etapes, utilitzant una funció de segona etapa que verifica:

$$Q(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \xi \\ C & \text{si } x < \xi. \end{cases}$$

(b) Calculeu de forma analítica la solució òptima del problema anterior, calculant primer la funció de recurs $\mathcal{Q}(x) = E_\xi[Q(x, \xi)]$.

(c) Calculeu el valor esperat de la informació perfecta EVPI, i el valor de la solució estocàstica VSS per a aquest problema. Utilitzeu els valors particulars: $R = 0.09$, $L = 100$, $m = 10$, $M = 110$, $C = 10$.

24. Examen Programació Estocàstica (Juliol 2001)

Problema 1.

Una companyia de telecomunicacions vol satisfer la demanda de dos clients connectant-los a través de dues línies dedicades (és a dir, en exclusivitat per als clients) amb dos possibles centres de comunicacions de que disposa. Cada client provocarà un tràfic de dades aleatori de $\xi_j, j = 1, 2$ Megabytes per segon (Mb/s). Podem considerar que la variable $\xi_j, j = 1, 2$ té moments de segon ordre finits. La companyia ha de decidir si uneix el client j amb el centre i, i quina serà la capacitat en Mb/s d'aquesta línia en el cas que s'obri. Unir el client i amb el centre j té un cost fix de f_{ij} milers d'euros. A banda hi ha un cost variable segons la capacitat de la línia de c_{ij} milers d'euros per a cada Mb/s instal·lat. Un cop realitzada la instal·lació, la companyia de telecomunicacions estima que cada Mb/s que s'hagi quedat per sota de la demanda real del client j li suposarà un cost de p_j milers d'euros (degut a la pèrdua de confiança del client). Per altra banda, cada Mb/s que hagi instal·lat per sobre de la capacitat final real del client li suposarà un cost de o_j milers d'euros (per haver sobredimensionat innecessàriament les línies).

(a) Formuleu el problema de programació estocàstica que s'hauria de solucionar per saber les línies a construir i la capacitat de cada línia (NO la forma extensa d'aquest problema). Indiqueu clarament quines variables pertanyen a la 1a i quines a la 2a etapa. (**Nota:** està totalment prohibit formular la segona etapa d'aquest problema usant condicionals (**if**'s); formuleu-la com un problema de programació lineal entera).

(b) Indiqueu quins són els conjunts K_1 i K_2 d'aquest problema. Indiqueu també quin tipus de recurs tenim en aquest problema. Aprofitant el tipus de recurs que té aquest problema, doneu una expressió analítica compacta per a la funció de recurs $\mathcal{Q}(x)$ d'aquest problema. Per fer això suposeu que les variables tràfic de dades aleatori $\xi_1(\xi)$ i $\xi_2(\xi)$ de cada client son totalment dependents d'una tercera variable ξ que indica l'estat de la natura, i tenen unes funcions de distribució uniformes contínues entre 10 i 15, i 12 i 17 respectivament.

(c) Escriviu la forma extensa del problema que heu formulat a l'apartat (a) de forma detallada (és a dir, indicant el nombre d'escenaris finals amb les seves probabilitats), considerant que el tràfic de dades del primer client ξ_1 és una variable aleatòria uniforme amb valors 15 i 16 Mb/s amb probabilitats 0.5 i 0.5 respectivament, mentre que per al segon client ξ_2 és també una variable aleatòria uniforme de valors 13 i 16 Mb/s amb probabilitats 0.2 i 0.8 respectivament. Suposeu que el tràfic de dades d'un client és independent del de l'altre.

(d) Considereu una versió simplificada del problema on només es disposa d'un centre de comunicacions i un client. La línea ja està creada, i només cal determinar la seva capacitat x en Mb/s. Cada Mb/s de capacitat instal·lat suposa un cost de c milers d'euros a la companyia. La demanda de capacitat del client és una variable aleatòria ξ uniforme entre 10 i 15 Mb/s. Si x supera la capacitat futura del client, incorrem en un cost de $o = 1$ milers d'euros per Mb/s superat. Si x queda per sota de la capacitat del client incorrem en un cost de $p = 2$ milers d'euros per Mb/s superat. La companyia formula el problema estocàstic següent

$$\min cx + \mathcal{Q}(x), x >= 0,$$

on $\mathcal{Q}(x)$ representa la funció de recurs. Determineu quin ha de ser el valor de c per tal que la solució d'aquest problema indiqui a la companyia que ha d'instal·lar $x = 11$ Mb/s.

3 Solucions dels problemes del capítol 1.

Solució del problema 1.

La solució del problema esperat (usant $\bar{\xi}$) és:

$$\begin{array}{ccc} x_1 = 120 & x_2 = 80 & x_3 = 300 \\ \text{blat} & \text{panís} & \text{remolatxa} \end{array}$$

Ara podem:

i) Aplicar aquests valors al problema estocàstic i calcular el valor de la f. obj. obtingut: Això implica fixar les variables x_i a 120, 80, 300 a través de restriccions específiques.

ii) Calcular els valors manualment usant una taula similar a:

		blat	panís	remolatxa
acres		$x_1 = 120$	$x_2 = 80$	$x_3 = 300$
$s = 3$	Producció	3·120=360	3.6·80=288	24·300=7200
ANY	Vendes (w)	$w_{13} = 160$	$w_{23} = 48$	$w_{33} = 6000$
BO	Compres (y)	$y_{13} = 0$	$y_{23} = 0$	$w_{43} = 0$
$s = 2$	Producció	2.5·120=300	3·80=240	20·300=6000
ANY	Vendes (w)	$w_{12} = 100$	$w_{22} = 0$	$w_{32} = 6000$
NORMAL	Compres (y)	$y_{12} = 0$	$y_{22} = 0$	$w_{42} = 0$
$s = 1$	Producció	2·120=240	2.4·80=192	16·300=4800
ANY	Vendes (w)	$w_{11} = 40$	$w_{21} = 0$	$w_{31} = 4800$
DOLENT	Compres (y)	$y_{11} = 0$	$y_{21} = 48$	$y_{41} = 0$

$$\text{Valor de f.objectiu} = -107240$$

Llavors

$$VSS = -107240 - (-108390) = 1449\$$$

On -108390 és el valor de la f.obj. del problema estocàstic

Solució del problema 2.

El terme que varia és q(ξ) que passa a dependre de l'escenari particular. La formulació extensa seria ara:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \begin{bmatrix} 150 & 230 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \\
& -\frac{1}{3}((170 \cdot 1.1)w_{11} - 238y_{11} + (150 \cdot 1.1)w_{21} - 210y_{21} + (36 \cdot 1.1)w_{31} + (10 \cdot 1.1)w_{41}) - \\
& -\frac{1}{3}(170w_{12} - 238y_{12} + 150w_{22} - 210y_{22} + 36w_{32} + 10w_{32}) - \\
& -\frac{1}{3}((170 \cdot 0.9)w_{13} - 238y_{13} + (150 \cdot 0.9)w_{23} - 210y_{23} + (36 \cdot 0.9)w_{33} + (10 \cdot 0.9)w_{33}) \\
\text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 500 \\
& \left.\begin{aligned} 2x_1 + y_{11} - w_{11} \ge 200 \\ 2 \cdot 4x_2 + y_{21} - w_{21} \ge 240 \\ w_{31} + w_{41} \le 16x_3 \end{aligned}\right\} esc1 \\
& \left.\begin{aligned} 2 \cdot 5x_1 + y_{12} - w_{12} \ge 200 \\ 3x_2 + y_{22} - w_{22} \ge 240 \\ w_{32} + w_{42} \le 20x_3 \end{aligned}\right\} esc2 \\
& \left.\begin{aligned} 3x_1 + y_{13} - w_{13} \ge 200 \\ 3 \cdot 6x_2 + y_{23} - w_{23} \ge 240 \\ w_{33} + w_{43} \le 24x_3 \end{aligned}\right\} esc3 \\
& x, w, y \ge 0
\end{aligned}$$

El valor de la f. obj a l'óptim, solucionant el problema anterior amb AMPL és: -104786.6.

En sol·lucionar-ho amb AMPL s'ha d'adaptar els fitxers farmer_estoc.mod (.dat) afegint un terme incre_pvenda=$\{1.1, 1, 0.9\}$ segons sigui un escenari dolent, normal o bo; i després multiplicar els preus pel valor incre_pvenda(s) s=1,2,3 corresponent.

Solució del problema 3.

Definim unes variables binàries X_{Bij} de forma que:

$$X_{Bij} \in \{0,1\} \Rightarrow \begin{cases} X_{Bij} = 1 & \text{si al camp } i \text{ es conrea } j \\ X_{Bij} = 0 & \text{si al camp } i \text{ no es conrea } j \end{cases}$$

$$i = 1, ..., 4 \rightarrow \text{número de camps}$$

$$j = 1, ..., 5 \rightarrow \text{número de conreus}$$

Definim a_i $i = 1, ..., 4$ com els acres de cada camp ($a_i = \begin{bmatrix} 185 & 145 & 105 & 65 \end{bmatrix}$). Llavors dins de les restriccions de 1a etapa, eliminem la restricció:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 500$$

i la sustituim per:

$$x_j = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} X_{Bij} \qquad \forall j = 1,...,3 \ \text{(a } x_j \text{ guardem els acres totals de cultiu } j\text{)}$$
$$\sum_{j=1}^{3} X_{Bij} = 1 \qquad \forall i = 1,...,4 \ \text{(a cada camp només es pot tenir un tipus de conreu)}$$
$$X_{Bij} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1,...,4 \ , \ \forall j = 1,...,3$$

La resta del model que vam presentar a classe es manté igual. L'óptim de la fobj és -107975. I la sol·lució:

$Camp1 \Rightarrow$ es planta remolatxa.
$Camp2 \Rightarrow$ es planta blat.
$Camp3 \Rightarrow$ es planta panís.
$Camp4 \Rightarrow$ es planta remolatxa.

Solució del problema 4.

En aquest cas les variables de 2a etapa per al panís i blat

$$y_{js} \qquad s = 1,...,3, \ j = 1,2$$
$$w_{is} \qquad s = 1,...,3, \ i = 1,2$$

han de ser Z^+ i múltiples de 100.

Això pot formular-se de la següent forma:

- Sustituim cada aparició de y_{js}, w_{is} al model estocàstic per $100y_{js}$ i $100w_{is}$, i imposem que $y_{js} \in Z^+$ i $w_{is} \in Z^+$. En AMPL en definir una variable podem dir que $\in Z^+$ de forma:

$$\text{var} \quad w \geq 0, integer.$$

Adaptant de la forma anterior el model estocàstic s'obté una solució:

$$fobj = -101166.\hat{6}$$
$x_1 = 100$ (blat)
$x_2 = 150$ (panís)
$x_3 = 250$ (remolatxa)

Solució del problema 5.

a) La solució per a un any dolent és:

$x_1 = 100$ (blat)
$x_2 = 25$ (panís)
$x_3 = 375$ (remolatxa)

Si s'implementa aquesta solució dins el problema estocàstic, i es soluciona aquest, s'obté que

a llarg termini el pagès obtindrá un valor de funció objectiu de -86600.
La pèrdua en beneficis esperats respecte la solució estocàstica de -108390 és:

$$-86600 - (-108390) = 21790\$$$

b) Convé afegir al model estocàstic la restricció:

$$\text{beneficis\_obtinguts\_en\_any\_dolent} \geq 58000$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{costos\_obtinguts\_en\_any\_dolent} \leq 58000$$

Ho escrivim de la 2a forma donat que al model estocàstic minimitzem costos enlloc de maximitzar beneficis. La restricció que cal afegir és:

$$150x_1 + 230x_2 + 260x_3 - (170w_{11} - 238y_{11} + 150w_{21} - 210y_{21} + 36w_{31} + 10w_{41}) \leq -58000 \quad (*)$$

(On w_{is}, y_{js} per $s = 1$ denoten les decisions a l'escenari dolent)

Solucionant el model estocàstic amb la restricció anterior s'obté un valor de funció objectiu de: -101176.19. La pèrdua de beneficis respecte la solució estocàstica és:

$$-102276.19 - (-108390) = 7213.81\$.$$

c) El valor de la f.obj. per als diferents valors del terme independent de (*) són:

terme independent	$fobj^*$
-58000	-101176.19
-56000	-107246.03
-54000	$-107611.\hat{1}$
-52000	-107976.19
-50000	$-108291.\hat{6}$
-48000	-108390
	$\uparrow$
	obtenim ja la solució estocàstica

De fet la restricció (*) es fa inactiva per al terme independent -48820. Aquests (48820) són els beneficis obtinguts en un any dolent en solucionar el problema estocàstic.

Solució del problema 6.

Tal i com vam veure a teoria, el problema era:

$$\begin{array}{rl} \min & cx + \mathcal{Q}(x) \\ \text{subj. a} & 0 \leq x \leq u \end{array} \qquad \text{On:} \qquad \mathcal{Q}(x) = -qx + (q-r)\int_{-\infty}^{x} F(\xi)d\xi$$

En aquest cas:

$$\begin{aligned} q &= 10 \\ c &= 8 \\ r &= 5 \\ u &= 200 \end{aligned} \qquad \xi \sim U[100, 200] \Rightarrow F(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi > 200 \\ \dfrac{\xi - 100}{100} & \xi \in \{0, 1\} \\ 0 & \xi < 100 \end{cases}$$

L'óptim del problema era (vist a teoria)

$$\begin{cases} x^* = 0 & \text{si } \frac{q-c}{q-r} < F(0) \\ x^* = u & \text{si } \frac{q-c}{q-r} > F(u) \\ x^* = F^{-1}(\frac{q-c}{q-r}) & \text{altrament} \end{cases}$$

Al nostre cas:

$$\begin{aligned} &\frac{q-r}{q-r} = \frac{10-8}{10-5} = \frac{2}{5} = 0.4 \\ &F(0) = 0 \\ &F(u) = F(200) = 1 \end{aligned}$$

Com que $0 \leq 0.4 \leq 1$, l'óptim és: $x^* = F^{-1}(0.4) = 140$.

El valor de la funció objectiu és:

$$\begin{aligned} cx^* + \mathcal{Q}(x^*) &= 8 \cdot 140 + \left[-10 \cdot 140 + (10-5) \int_{100}^{140} \frac{\xi - 100}{100} d\xi \right] = \\ &= -2 \cdot 140 + \frac{5}{100} \left[\frac{\xi^2}{2} - 100\xi \right]_{100}^{140} = \\ &= -280 + \frac{5}{100} \left[\frac{140^2}{2} - 100 \cdot 140 - \frac{100^2}{2} + 100^2 \right] = -240 \end{aligned}$$

Per calcular VSS cal solucionar el problema original substituint ξ per $E[\xi] = 150$ (amb $c = 8$, $q = 10$ i $r = 5$):

$$\begin{array}{llcll} \min & cx - qy - rw & & & \\ \text{subj. a} & & & & \tilde{x}^* = 150 \\ & y \leq 150 & \rightarrow & \text{solució:} & \tilde{y}^* = 150 \\ & 0 \leq x \leq u & & & \tilde{w}^* = 0 \\ & y, w \geq 0 & & & \end{array}$$

Apliquem aquesta solució al problema estocàstic (amb $\tilde{x} = 150$):

$$\begin{aligned} \tilde{x} + \mathcal{Q}(\tilde{x}) &= 8 \cdot 150 - 10 \cdot 150 + \frac{5}{100} \int_{100}^{150} (\xi - 100) d\xi = \\ &= -2 \cdot 150 + \frac{5}{100} \left[\frac{150^2}{2} - 100 \cdot 150 - \frac{100^2}{2} + 100^2 \right] = -237.5 \end{aligned}$$

$$VSS = -237.5 - (-240) = 2.5$$

Solució del problema 7.

$$\xi \rightarrow \xi_1, \ldots, \xi_N$$
$$p_1, \ldots, p_N$$

a) $\mathcal{Q}(x) = E_\xi[-q\min(\xi, x) - r\max(x-\xi, 0)] = E_\xi[g(\xi)]$ (resultat vist a teoria)
Podem escriure $g(\xi)$ de forma:

$$g(\xi) = \begin{cases} -q\xi - r(x-\xi) & \text{si } x \geq \xi \\ -qx & \text{si } x \leq \xi \end{cases}$$

Llavors:

$$\mathcal{Q}(x) = E_{g(\xi)} = \sum_{i=1}^{N} p_i g(\xi_i) = \sum_{i=1}^{J} p_i(-q\xi_i - r(x-\xi_i)) + \sum_{i=J+1}^{N} p_i(-qx)$$

$$\text{on } \; J = \{\max_{i=0,\ldots,N} i \mid \xi_i \leq x\} \text{ considerant } \xi_0 = -\infty$$

La funció $\mathcal{Q}(x)$ no és diferenciable als punts $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_N$.
Comprovem-ho:
Explicitem l'expressió de $\mathcal{Q}(x)$ al nostre cas on, suposem, $q = 10$, $c = 8$ i $r = 5$.

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{J} p_i(-q\xi_i - rx + r\xi_i) + \sum_{i=1}^{N} p_i(-qx) =$$
$$= [\, \textstyle\sum_{i=1}^{J} p_i(-5)\xi_i \,] - [\, x \sum_{i=1}^{J} 5p_i \,] - x \displaystyle\sum_{i=J+1}^{N} 10p_i =$$
$$= -5\sum_{i=1}^{J} p_i\xi_i - x\,[\, 10 \textstyle\sum_{i=J+1}^{N} p_i + 5\sum_{i=1}^{J} p_i \,]$$

- Considerem un punt, per exemple, $x < \xi_1$. Llavors $J = 0$ i, $\mathcal{Q}(x)$ és:

$$x < \xi_1, J = 0 \rightarrow \mathcal{Q}_{J=0}(x) = -5\sum_{i=1}^{0} p_i\xi_i - x\,[\, 10 \textstyle\sum_{i=1}^{N} p_i + 5\sum_{i=1}^{0} p_i \,] = -10x$$

- Considerem ara un punt x t.q. $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$. Llavors $J = 1$ i $\mathcal{Q}(x)$ és:

$$\xi_1 \leq x \leq \xi_2, J = 1 \rightarrow \mathcal{Q}_{J=1}(x) = -\,5\sum_{i=1}^{1} p_i\xi_i - x\,[\, 10 \textstyle\sum_{i=2}^{N} p_i + 5\sum_{i=1}^{1} p_i \,] =$$
$$= -5p_1\xi_1 - x(101 - p_1 + 5p_1) =$$
$$= -5p_1\xi_1 - 10x + 10xp_1 - 5xp_1$$

Observem com $\mathcal{Q}(x)$ és contínua a $x = \xi_1$ ja que:

$$\mathcal{Q}_{J=0}(\xi_1) = -10\xi_1$$
$$\mathcal{Q}_{J=1}(\xi_1) = -5p_1\xi_1 - 10\xi_1 + 10\xi_1 p_1 - 5\xi_1 p_1 = -10\xi_1$$

Però no és derivable perquè:

$$\mathcal{Q}^{'}_{J=0}(x) = -10 \rightarrow \text{derivada per l'esquerra de } \mathcal{Q}^{'}(x) \text{ a } \xi_1$$
$$\mathcal{Q}^{'}_{J=1}(x) = -10 + 10p_1 - 5p_1 = -10 + 5p_1 \rightarrow \text{derivada per la dreta de } \mathcal{Q}^{'}(x) \text{ a } \xi_1$$

Per tant, $\mathcal{Q}(x)$ no és diferenciable a ξ_1. Aquest resultat es generalitza als punts $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. De fet, tal i com es veurà a teoria més endavant, $\mathcal{Q}(x)$ és en aquest cas una funció lineal per parts i convexa de x:

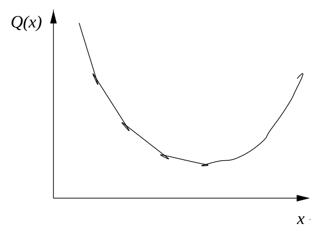

Figura 1.

b) La forma extensa del problema és:

$$\begin{array}{ll} \min & cx - \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(qy_i - rw_i) \\ \text{subj. a} & \\ & 0 \le x \le u \\ & \left.\begin{array}{r} y_i \le \xi_i \\ y_i + w_i \le x \\ y_i, w_i \ge 0 \end{array}\right\} i = 1 \ldots N \end{array}$$

$x \rightarrow$ var. de 1a etapa
$y_i, w_i i = 1, \ldots, N \rightarrow$ var. 2a etapa replicades
$\forall i = 1 \ldots, N$

Si s'implementa en AMPL, per diferents valors de N obtenim:

	x^*	$fobj^*$
N=10	133.$\hat{3}$	-233.$\hat{3}$
N=50	138.776	-238.776
N=100	139.394	-239.394
N=140	139.568	-239.568

Observem com anem convergint a $x^* = 140$, $fobj^* = -240$, que és el valor calculat analíticament a l'exercici 6.

Solució del problema 8.

En aquet cas tenim el problema:

$$\begin{array}{rl} \min & cx + E_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}[Q(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3)] \\ \text{subj. a} & 0 \le x \le u \end{array}$$

on

$$\begin{array}{rl} Q(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \min & -q(\xi_2)y - r(\xi_3)y \\ \text{subj. a} & y \le \xi_1 \\ & y + w \le x \\ & y, w \ge 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Suposem que: } q(\xi_2) \ge 0, r(\xi_3) \ge 0 \\ \Downarrow \\ \text{Solució: } \begin{cases} y^* = \min(\xi_1, x) \\ w^* = \max(x - \xi_1, 0) \end{cases} \end{array}$$

Llavors:

$$Q(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3) = g(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -q(\xi_2)\min(\xi_1,x) - r(\xi_3)\max(x-\xi_1,0)$$

i

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(x) = E_{\xi_1\xi_2\xi_3}[g(\xi_1,\xi_2,\xi_3)] &= \int_{\xi_1}\int_{\xi_2}\int_{\xi_3} g(\xi_1,\xi_2,\xi_3) f(\xi_1,\xi_2,\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\
&\Downarrow \text{ Com que } \xi_1,\xi_2,\xi_3 \text{ són independents per l'enunciat} \\
&= \int_{\xi_1}\int_{\xi_2}\int_{\xi_3} g(\xi_1,\xi_2,\xi_3) f(\xi_1)f(\xi_2)f(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{Usant que:} \\ g(\xi) = \begin{cases} -q(\xi_2)\xi_1 - r(\xi_3)(x-\xi_1) & \text{si } x \ge \xi_1 \\ -q(\xi_2)\xi_1 & \text{si } x \le \xi_1 \end{cases} \end{array} \right] = \\
&= \int_{\xi_1=-\infty}^{\xi_1=x}\int_{\xi_2}\int_{\xi_3} (-q(\xi_2)\xi_1 - r(\xi_3)(x-\xi_1)) f(\xi_1)f(\xi_2)f(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \\
&+ \int_{\xi_1=x}^{\xi_1=+\infty}\int_{\xi_2}\int_{\xi_3} (-q(\xi_2)\xi_1) f(\xi_1)f(\xi_2)f(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\
&= \left[\begin{array}{l} \text{Reagrupant termes i usant que:} \\ \displaystyle\int_{\xi_i} f(\xi_i) d\xi_i = 1 \\ \displaystyle\int_{\xi_i} \xi_i f(\xi_i) d\xi_i = \bar{\xi_i} = E[\xi_i] \end{array} \right] = \\
&= \int_{\xi_1=-\infty}^{\xi_1=x} -\bar{q}(\xi_2)\xi_1 - \bar{r}(\xi_3)(x-\xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 + \int_{\xi_1=x}^{\xi_1=+\infty} -\bar{q}(\xi_2)\xi_1 f(\xi_1) d\xi_1
\end{aligned}$$

I aquesta expressió correspon a la calculada a classe usant $\bar{q}(\xi_2)$ per q i $\bar{r}(\xi_3)$ per r. Llavors la solució del problema estocàstic ara és la mateixa que al problema original, usant els canvis anteriors:

$$\begin{cases} x^* = 0 & \text{si } \dfrac{\bar{q}(\xi_2) - c}{\bar{q}(\xi_2) - \bar{r}(\xi_3)} < F(0) \\ x^* = u & \text{si } \dfrac{\bar{q}(\xi_2) - c}{\bar{q}(\xi_2) - \bar{r}(\xi_3)} > F(u) \\ x^* = F^{-1}\left[\dfrac{\bar{q}(\xi_2) - c}{\bar{q}(\xi_2) - \bar{r}(\xi_3)} \right] & \text{altrament} \end{cases}$$

Solució del problema 9.

Suposem que $l > 0$ (no té sentit considerar valors negatius).

El límit inferior l no afecta al càlcul de la funció de recurs $\mathcal{Q}(x)$, que continuarà essent:

$$\mathcal{Q}(x) = -qx + (q-r)\int_{-\infty}^{x} F(\xi)d\xi$$

$$\text{on } \mathcal{Q}^{'}(x) = -q + (q-r)F(x)$$

El nostre problema és ara:

$$\begin{array}{ll} \min & cx + \mathcal{Q}(x) \\ \text{subj. a} & l \leq x \leq u \end{array}$$

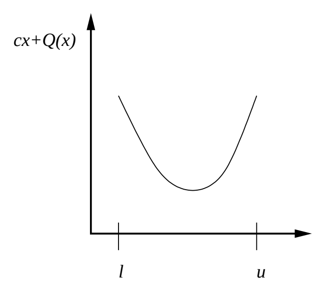

Figura 2. Funció convexa

I la solució és equivalent a l'obtinguda a classe sustituint 0 per l:

$$\begin{cases} x^* = l & \text{si } \frac{q-c}{q-r} < F(l) \\ x^* = u & \text{si } \frac{q-c}{q-r} > F(u) \\ x^* = F^{-1}(\frac{q-c}{q-r}) & \text{altrament} \end{cases}$$

Solució del problema 10.

El problema resultant pot formular-se com:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1x_1 + c_2x_2 + E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{i} \qquad \begin{array}{rl} Q(x,\xi) = \min & -v_1y_1 - v_2y_2 \\ \text{subj. a} & y_1 \leq x_1 \\ & y_1 \leq \xi_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & y_2 \leq \xi_2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

on:
x_1,x_2 $\rightarrow$ diaris i revistes comprats (1a etapa)
y_1,y_2 $\rightarrow$ diaris i revistes venuts (1a etapa)
ξ_1,ξ_2 $\rightarrow$ demanda de diaris i revistes
No es retorna res: el que no es ven es perd.

a) ξ_1, ξ_2 v.a. independents (i suposem que són ≥ 0 sempre). Solucionem:

$$\begin{array}{rll} Q(x,\xi) = \min & -v_1y_1 - v_2y_2 & \text{considerem } v_1, v_2 \geq 0 \\ \text{subj. a} & y_1 \leq x_1,\ y_1 \leq \xi_1 & \\ & y_2 \leq x_2,\ y_2 \leq \xi_2 & \\ & y_1, y_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Solució: } \begin{cases} y_1 = \min\{x_1, \xi_1\} \\ y_2 = \min\{x_2, \xi_2\} \end{cases}$$

$$Q(x,\xi) = -v_1 \min\{x_1, \xi_1\} - v_2 \min\{x_2, \xi_2\}$$

Usem que ξ_1, ξ_2 independents per escriure les E[ ] només en funció de ξ_1 o ξ_2:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= E_{\xi_1,\xi_2}[-v_1 \min\{x_1, \xi_1\} - v_2 \min\{x_2, \xi_2\}] = \\ &= E_{\xi_1}[g_1(\xi_1)] + E_{\xi_2}[g_2(\xi_2)] = E_{\xi_1}[-v_1 \min\{x_1, \xi_1\}] + E_{\xi_2}[-v_2 \min\{x_2, \xi_2\}] \end{aligned}$$

$$g_1(\xi_1) = \begin{cases} -v_1x_1 & \text{si } x_1 \leq \xi_1 \\ -v_1\xi_1 & \text{si } x_1 \geq \xi_1 \end{cases} \qquad g_2(\xi_2) = \begin{cases} -v_2x_2 & \text{si } x_2 \leq \xi_2 \\ -v_2\xi_2 & \text{si } x_2 \geq \xi_2 \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi_1) f_1(\xi_1) d\xi_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\xi_2) f_2(\xi_2) d\xi_2 = \int_{-\infty}^{x_1} -v_1\xi_1 f_1(\xi_1) d\xi_1 +$$

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{+\infty} -v_1x_1 f_1(\xi_1) d\xi_1 + \int_{-\infty}^{x_2} -v_2\xi_2 f_2(\xi_2) d\xi_2 + \int_{x_2}^{+\infty} -v_2x_2 f_2(\xi_2) d\xi_2 = \\ &= \begin{bmatrix} \text{Operant i integrant} \\ \text{per parts} \end{bmatrix} = -v_1 \left[x_1F_1(x_1) - \textstyle\int_{-\infty}^{x_1} F_1(\xi_1) d\xi_1 + x_1(1 - F_1(\xi_1)) \right] - \\ &- v_2[x_2F_2(x_2) - \int_{-\infty}^{x_2} F_2(\xi_2) d\xi_2 + x_2(1 - F_2(\xi_2))] = \\ &= -v_1 \left[x_1 - \textstyle\int_{-\infty}^{x_1} F_1(x_1) d\xi_1 \right] - v_2 \left[x_2 - \textstyle\int_{-\infty}^{x_2} F_2(x_2) d\xi_2 \right] \end{aligned}$$

El problema final és:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x_1,x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 - v_1 \left[x_1 - \int_{-\infty}^{x_1} F_1(\xi_1) d\xi_1 \right] - v_2 \left[x_2 - \int_{-\infty}^{x_2} F_2(\xi_2) d\xi_2 \right] \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Podem comprovar que la f.objectiu és convexa:

$$\nabla_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = [\, c_1 - v_1(1 - F(x_1)) \quad c_2 - v_2(1 - F(x_2)) \,]$$

$$\nabla^2_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} v_1f_1(x_1) & 0 \\ 0 & v_2f_2(x_2) \end{bmatrix}$$ és def+ perquè $v_i \geq 0$, $f_i(x_i) \geq 0$ per $i = 1, 2$ i llavors $f(x_1,x_2)$ és convexa.

Si usem que:

$$
\begin{aligned}
&c_1 = 50 \quad , \quad c_2 = 70 \\
&v_1 = 60 \quad , \quad v_2 = 80 \\
&\xi_1 \sim U[50, 200] \Rightarrow F_1(\xi_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi_1 < 50 \\ \dfrac{\xi_1 - 50}{150} & \text{si } \xi_1 \in [50, 200] \\ 1 & \text{si } \xi_1 > 200 \end{cases} \\
&\xi_2 \sim U[50, 100] \Rightarrow F_2(\xi_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi_2 < 50 \\ \dfrac{\xi_2 - 50}{50} & \text{si } \xi_2 \in [50, 100] \\ 1 & \text{si } \xi_2 > 200 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Llavors el problema a solucionar és:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 50x_1 + 70x_2 - 60\left[\, x_1 - \int_{50}^{x_1} \frac{\xi_1 - 50}{150} d\xi_1 \,\right] - 80\left[\, x_2 - \int_{50}^{x_2} \frac{\xi_2 - 50}{50} d\xi_2 \,\right] \\
\text{subj. a} \quad & x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(*) La primera integral és perquè $x_1 \leq 100$ sempre. La segona és perquè $x_2 \leq 100$ sempre.

$\Downarrow$ Calculant integrals:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 50x_1 + 70x_2 - 60\left[\, x_1 - \frac{1}{150}\left[\frac{x_1^2}{2} - 50x_1 + 1250 \right] \right] - 80\left[\, x_2 - \frac{1}{50}\left[\frac{x_2^2}{2} - 50x_2 + 1250 \right] \right] \\
\text{subj. a} \quad & x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solucionant aquest problema amb AMPL obtenim que l'òptim és:

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 50 \\
x_2^* &= 50
\end{aligned}
\qquad \text{i el valor de la } f.obj^* = -1000
$$

b) L'estat futur ve donat pels parells (ξ_1, ξ_2) que són independents.
Si considerem una discretització (equiprobable) de

$$\xi_1 \sim U[50, 200] \text{ en } N_1 \text{ punts } (\xi_{1i} \; i = 1, \ldots N_1)$$

$$\xi_2 \sim U[50, 100] \text{ en } N_2 \text{ punts } (\xi_{2j} \; j = 1, \ldots N_2)$$

aleshores podem escriure la forma extensa del problema de l'apartat a) considerant que tenim $2N_1N_2$ v. de 2a etapa:

$$\left.\begin{matrix} y_{1i,j} \\ y_{2i,j} \end{matrix}\right\} i = 1 \ldots N_1, \; j = 1 \ldots N_2$$

La forma extensa llavors seria:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 - \frac{1}{N_1N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}(v_1y_{1ij} + v_2y_{2ij}) \\ \text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \le 100 \\ & \left.\begin{aligned} y_{1ij} &\le x_1 \\ y_{2ij} &\le x_2 \\ y_{1ij} &\le \xi_{1i} \\ y_{2ij} &\le \xi_{2j} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i &= 1,\dots N_1 \\ j &= 1,\dots N_2 \end{aligned} \\ & y_{1ij} \ge 0, y_{2ij} \ge 0 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

P.ex., solucionant-ho per $N_1 = 5$, $N_2 = 5$ s'obté ja que $x_1^* = 5$, $x_2^* = 5$ i $f.obj^* = -1000$, el qual coincideix amb el trobat a l'apartat (a).

c) El problema és ara:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{subj. a} \quad & x_1 + x_2 \le 100 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} Q(x,\xi) = \min \quad & -v_1y_1 - v_2y_2 \\ \text{subj. a} \quad & y_1 \le x_1 \quad , \quad y_1 \le \frac{3}{4}\xi = \xi_1 \\ & y_2 \le x_2 \quad , \quad y_2 \le \frac{1}{4}\xi = \xi_2 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

on $corr(\frac{3}{4}\xi, \frac{1}{4}\xi) = 1$, i són variables totalment dependents.

La solució de $Q(x,\xi)$ és:

$$y_1^* = \min\{x_1, \frac{3}{4}\xi\} \rightarrow \begin{cases} y_1^* = x_1 & \text{si } x_1 \le \frac{3}{4}\xi \\ y_1^* = \frac{3}{4}\xi & \text{si } x_1 > \frac{3}{4}\xi \end{cases}$$

$$y_2^* = \min\{x_2, \frac{1}{4}\xi\} \rightarrow \begin{cases} y_2^* = x_2 & \text{si } x_2 \le \frac{1}{4}\xi \\ y_2^* = \frac{1}{4}\xi & \text{si } x_2 > \frac{1}{4}\xi \end{cases}$$

Per tant, $Q(x,\xi) = -v_1 \min\{x_1, \frac{3}{4}\xi\} - v_2 \min\{x_2, \frac{1}{4}\xi\}$ i

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(x) &= E_\xi[Q(x,\xi)] = -v_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x_1, \frac{3}{4}\xi\} f(\xi) d\xi - v_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x_2, \frac{1}{4}\xi\} f(\xi) d\xi = \\
&= -v_1 [\int_{-\infty}^{4/3x_1} \frac{3}{4}\xi f(\xi) d\xi + \int_{4/3x_1}^{+\infty} x_1 f(\xi) d\xi] - v_2 [\int_{-\infty}^{4x_2} \frac{1}{4}\xi f(\xi) d\xi + \int_{4x_2}^{+\infty} x_2 f(\xi) d\xi] = \\
&= \begin{bmatrix} \text{Integrant per parts} \\ \text{i operant} \end{bmatrix} = -v_1 [\frac{3}{4}(\frac{4}{3}x_1 F(\frac{4}{3}x_1) - \int_{-\infty}^{4/3x_1} F(\xi) d\xi) + x_1(1 - F(\frac{4}{3}x_1))] - \\
&- v_2 [\frac{1}{4}(4x_2 F(4x_2) - \int_{-\infty}^{4x_2} F(\xi) d\xi) + x_2(1 - F(4x_2))] = \\
&= -v_1 [x_1 F(\frac{4}{3}x_1) - \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{4/3x_1} F(\xi) d\xi + x_1 - x_1 F(\frac{4}{3}x_1)] - v_2 [x_2 F(4x_2) - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{4x_2} F(\xi) d\xi + \\
&+ x_2 - x_2 F(4x_2)] = -v_1 [x_1 - \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{4/3x_1} F(\xi) d\xi] - v_2 [x_2 - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{4x_2} F(\xi) d\xi]
\end{aligned}$$

I el problema a solucionar és:

$$\begin{array}{ll}
\min & c_1 x_1 + c_2 x_2 - v_1 \left[x_1 - \int_{-\infty}^{4/3x_1} \frac{3}{4} F(\xi) d\xi \right] - v_2 \left[x_2 - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{4x_2} F(\xi) d\xi \right] \\
\text{subj. a} & x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

Solucionem el problema equivalent determinista anterior usant:

$$\begin{array}{l}
c_1 = 50 \quad , \quad c_2 = 70 \\
v_1 = 60 \quad , \quad v_2 = 80 \\
\xi \sim U[50, 400] \Rightarrow F(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi < 50 \\ \dfrac{\xi - 50}{350} & \text{si } \xi \in [50, 400] \\ 1 & \text{si } \xi > 400 \end{cases}
\end{array}$$

Llavors tenim:

$$\begin{array}{ll}
\min & 50x_1 + 70x_2 - 60 \left[x_1 - \frac{3}{4} \int_{50}^{\frac{4}{3}x_1} \frac{\xi - 50}{350} d\xi \right] - 80 \left[x_2 - \frac{1}{4} \int_{50}^{x_2} \frac{\xi - 50}{350} d\xi \right] \\
\text{subj. a} & x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

La primera integral és correcta perquè $x_1 \leq 100$ sempre $\Rightarrow \frac{4}{3}x_1 \leq 400$ sempre. La segona també perquè $x_2 \leq 100$ sempre $\Rightarrow 4x_2 \leq 400$ sempre. Calculant integrals de la f.objectiu:

$$\begin{array}{ll}
\min & 50x_1 + 70x_2 - 60 \left[x_1 - \frac{3}{1400} (\frac{8}{9}x_1^2 - \frac{200}{3}x_1 - 1250) \right] - 80 \left[x_2 - \frac{1}{1400} (8x_2^2 - 200x_2 + 1250) \right] \\
\text{subj. a} & x_1 + x_2 \leq 100 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

Solucionant aquest problema amb AMPL obtenim la solució:

$$x_1^* = 77.5 \text{ diaris} \qquad f.obj^* = -771.4286$$
$$x_2^* = 22.5 \text{ revistes}$$

d) Per solucionar la forma extensa discretitzem primer $\xi \sim U[50, 400]$ en N punts equiprobables $\xi_1, \ldots, \xi_N$ de $p_i = \frac{1}{N}$ per $i = 1, \ldots, N$.
La forma extensa llavors queda com:

$$\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(v_1y_{1i} + v_2y_{2i}) \\
\text{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 \le 100 \\
& \left.\begin{aligned} y_{1i} &\le x_1 \\ y_{2i} &\le x_2 \\ y_{1i} &\le \tfrac{3}{4}\xi_i \\ y_{2i} &\le \tfrac{1}{4}\xi_i \\ y_{1i}, y_{2i} &\ge 0 \end{aligned}\right\} i = 1, \ldots N \\
& x_1, x_2 \ge 0 \\
& y_{1i}, y_{2i} \ge 0 \quad i = 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

Si intentem solucionar el problema anterior amb AMPL, obtenim els següents resultats per a diferents N:

N	x_1^*	x_2^*	$fobj^*$
5	37.5	12.5	-500
10	$66.\hat{6}$	$22.\hat{2}$	$-636.\hat{1}$
50	76.78	23.21	-742.857
100	$77.\hat{7}$	$22.\hat{2}$	-757.576
140	77.42	22.57	-761.575

Observem com les solucions per a N diferents i creixents s'apropen a la de l'apartat c) calculada de forma analíca.

Solució del problema 12.

Es tracta d'un problema de 2 etapes on:

1a etapa				2a etapa
Decisions $\underline{x_1, x_2}$: quant invertim en cada producte financer, de B diners totals.	$\longrightarrow$	Esdevenimens aleatoris ξ_1 i ξ_2	$\longrightarrow$	Decisions $\underline{w, y}$: quant ens desviem per sobre o per sota de l'objectiu $\xi_2 = G$

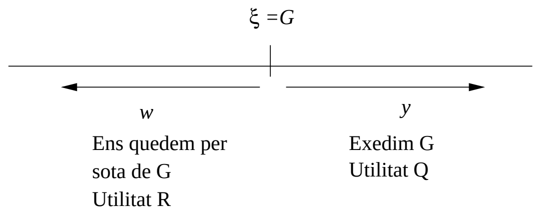

Figura 3.

$\xi_1 \rightarrow$ indica el benefici obtingut en la inversió realitzada

$\xi_1(i, w_j) =$ benefici del producte financer i en un any on l'estat de la natura ha estat w_j.

$i = 1, \ldots, 2 \quad , \quad w_j = \{w_1, w_2\}$

$\xi_2 \rightarrow$ objectiu G desitjat

Les dades del problema són:

$$B = 55 \quad , \quad Q = 1 \quad , \quad R = 4 \qquad \begin{cases} \xi_1(i, w_1) = \begin{cases} 1.25 & i = 1 \text{ accions} \\ 1.14 & i = 2 \text{ bons} \end{cases} \\ \xi_2(i, w_2) = \begin{cases} 1.06 & i = 1 \text{ accions} \\ 1.12 & i = 2 \text{ bons} \end{cases} \end{cases}$$

$$G = \xi_2 = \begin{cases} 75 & \text{amb } p = \frac{1}{2} \\ 85 & \text{amb } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

El problema a solucionar és:

$$\begin{array}{ll} \max & E_\xi[Q(x, \xi)] \\ \text{subj. a} & x_1 + x_2 \le B \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \qquad \text{on:} \qquad \begin{array}{ll} Q(x,\xi) = \max & Qy - Rw \\ \text{subj. a} & \underbrace{\boxed{\xi_1(1)x_1 + \xi_1(2)x_2}}_{\text{capital final de la nostra inversió}} + w - y = \xi_2 \\ & y, w \ge 0 \end{array}$$

Solucionem el problema anterior usant la forma extensa.

Considerem que ξ_1 i ξ_2 són independents. Hem de replicar les v. de 2a etapa w, y per a tot estat de la natura (ξ_1, ξ_2). Com que ξ_1 té 2 possibilitats (w_1, w_2) i ξ_2 també $(75, 85)$, tindrem 4 v. de 2a etapa w_{ij}, y_{ij} $i = 1, 2 \rightarrow \xi_1$, $j = 1, 2 \rightarrow \xi_2$. La formulació de la forma extensa llavors queda:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1, x_2, y_{ij}, w_{ij}} & \dfrac{1}{2*2} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} Qy_{ij} - Rw_{ij} \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \le B \\ & \left.\xi_1(1,i)x_1 + \xi_1(2,i)x_2 + w_{ij} - y_{ij} = \xi_{2j} \right\} \begin{array}{l} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{array} \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & y_{ij}, w_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,2; j = 1,2 \end{array}$$

Solucionant aquest problema amb AMPL obtenim:

$$x_1 = 55 \qquad f.obj = -65.9$$
$$x_2 = 0$$

I per cada escenari (ξ_1, ξ_2) tenim:

$y =$

	ξ_2: 1	2
$\xi_1 = w_1$	0	0
$\xi_1 = w_2$	0	0

; $w =$

	ξ_2: 1	2
$\xi_1 = w_1$	6.25	16.25
$\xi_1 = w_2$	16.7	26.7

Solució del problema 13.

La restricció probabilista afegida era:

$$P(d_1 + d_2 + d_3 \leq \sum_{i=1}^{4} x_i) \geq \alpha \Leftrightarrow F_{d_1+d_2+d_3}(\sum_{i=1}^{4} x_i) \geq \alpha \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} \geq F^{-1}_{d_1+d_2+d_3}(\alpha)$$

on $d_1 + d_2 = 5$ (cte)

i d_1 era una v.a. discreta de $\begin{cases} \text{valors:} & 3 & 5 & 7 \\ \text{prob:} & 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{cases}$

Observem que $d_1 + d_2 + d_3$ és v.a. discreta de $\begin{cases} \text{valors:} & 3+5 & 5+5 & 7+5 \\ \text{prob:} & 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{cases}$

i llavors $F_{d_1+d_2+d_3} = \begin{cases} 0 & \text{si } d_1 + d_2 + d_3 < 8 \\ 0.3 & \text{si } 8 \leq d_1 + d_2 + d_3 < 10 \\ 0.7 & \text{si } 10 \leq d_1 + d_2 + d_3 < 12 \\ 1 & \text{si } 12 \leq d_1 + d_2 + d_3 \end{cases}$

El valor de 11 de l'enunciat correspona $\alpha = 0.7$. De fet qualsevol valor de [10,12) correspon a $\alpha = 0.7$.

El problema del valor esperat, afegint la restricció $\sum_{i=1}^{4} x_i \geq 11$, és (tal i com es va veure a classe):

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{4} r_i x_i + \sum_{j=1}^{3} \mathcal{T}_j\Big(\sum_{i=1}^{4} q_i y_{ij}\Big) \\
\text{subj. a} \quad & \sum_{i=1}^{4} r_i x_i \leq 120 \\
& \sum_{j=1}^{3} y_{ij} \leq x_i \qquad i = 1, \ldots, 4 \\
& \sum_{i=1}^{4} y_{ij} = d_j \qquad j = 1,2,3 \rightarrow \text{ on: } \begin{cases} d_1 = E[d_1(\xi)] = 0.3*3 + 0.4*5 + 0.3*7 = 5 \\ d_2 = 3 \\ d_3 = 2 \end{cases} \\
& x_i, y_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 4 \qquad j = 1, \ldots, 3 \\
& \sum_{i=1}^{4} x_i \geq 11 \Leftarrow \text{ Nova restricció}
\end{aligned}$$

$$\text{La solució és: } \begin{cases} x_1^* = 0.\hat{3} \\ x_2^* = 2.\hat{6} \\ x_3^* = 5 \\ x_4^* = 3 \end{cases} \qquad fobj^* = 371$$

Però, com és obvi, si apliquem aquesta solució dins el model estocàstic formulat a classe, s'obté que el problema és infactible (ja que podem tenir un escenari on calgui tenir $\sum_{i=1}^{4} x_i = 12$).

Llavors:

$$VSS = \infty - \underbrace{\boxed{381.853}}_{\text{valor problema estocàstic indicat a classe}} = \infty$$

Solució del problema 14.

Recordem que la forma extensa d'aquest problema era:

$$\begin{aligned}
\max \quad & r(1 - e^{-0.1w}) - \frac{cw\pi\lambda^2}{4} - q\sum_{s=1}^{S} p_s y_s^2 \\
\text{subj. a} \quad & \frac{w}{\xi_s^3} - y_s \leq 39.27 \qquad s = 1, \ldots, S \\
& \frac{w^3}{\xi_s^4} - 300 y_s \leq 631.69 \qquad s = 1, \ldots, S \\
& 0 \leq x \leq x^{max} \quad , \quad 0 \leq w \leq w^{max} \quad , \quad y_s \geq 0 \qquad s = 1, \ldots, S
\end{aligned}$$

on hem discretitzat ξ en ξ_i $i = 1, \ldots, S$ punts de prob. p_i $i = 1, \ldots, S$

L'enunciat ens diu que considerem ξ triangular d'extrems $0.9x$ i $1.1x$:

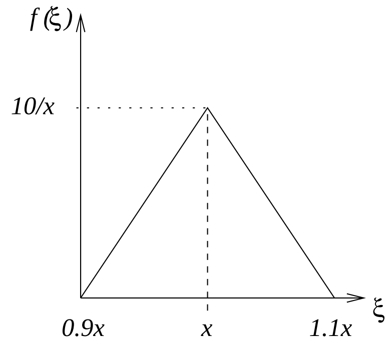

Figura 4.

$\frac{10}{x}$ és l'alçada que garanteix que Àrea= 1 $\Rightarrow f(\xi) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}(\xi - 0.9x) & \text{si } x \in [0.9, x] \\ \frac{100}{x^2}(1.1x - \xi) & \text{si } x \in [x, 1.1x] \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

Per solucionar el problema només cal trobar una discretització de la variable : $\begin{matrix} \xi_1, \ldots, \xi_S \\ p_1, \ldots, \times_S \end{matrix}$. Això ocuparà la resta del problema.

Es presenta una forma de fer la discretització (perfectament simètrica), però podrieu fer d'altres.

Considerem $N = 2n + 1$ punts ξ_i $i = 1, \ldots, N$ on $\xi_1 = 0.9x$, $\xi_N = 1.1x$ i $\xi_{n+1} = x$. L'expressió de cada punt és:

$$\xi_i = 0.9x + \frac{i-1}{N-1}0.2x = x\,[\,0.9 + 0.2\frac{i-1}{N-1}\,] \qquad i = 1, \ldots, N$$

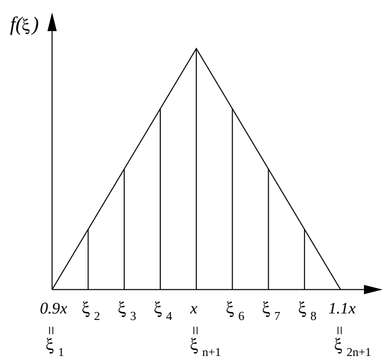

Figura 5.

<u>Part esquerra:</u> El valor $f(\xi_i)$ per als punts $\xi_i \le x$ és:

$$
i = 1,\ldots,n+1 \begin{cases} f(\xi_i) = \dfrac{100}{x^2}(\xi_i - 0.9x) = \dfrac{100}{x^2}(0.9x + 0.2x\dfrac{i-1}{N-1} - 0.9x) = \dfrac{20(i-1)}{x(N-1)} \\ \text{El valor } F(\xi_i) = P(\xi \le \xi_i), \text{ per als punts } \xi_i \le x \text{ és:} \\ F(\xi_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{àrea del triangle}}}{=} \dfrac{f(\xi_i)(\xi_i - 0.9x)}{2} = \dfrac{20(i-1)}{2x(N-1)} 0.2x\dfrac{i-1}{N-1} = \dfrac{2(i-1)^2}{(N-1)^2} \end{cases}
$$

Llavors podem considerar (per a la part esquerra de la distribució) que un punt de la nostra discretització serà el punt mig entre ξ_i i ξ_{i+1}:

$$
\begin{aligned} \xi_{si} &= \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} = \frac{x\left[0.9 + 0.2\frac{i-1}{N-1}\right] + x\left[0.9 + 0.2\frac{i}{N-1}\right]}{2} \\ &= x\left[0.9 + 0.2\frac{2i-1}{2(N-1)}\right] \qquad i = 1,\ldots,n \end{aligned}
$$

I a aquest punt li assignarem la probabilitat $F(\xi_{i+1}) - F(\xi_i)$:

$$
p_{si} = F(\xi_{i+1}) - F(\xi_i) = \frac{2i^2}{(N-1)^2} - \frac{2(i-1)^2}{(N-1)^2} = \frac{2i^2 - 2i^2 + 4i - 2}{(N-1)^2} = \frac{4i-2}{(N-1)^2} \qquad i = 1,\ldots,n
$$

Gràficament, el que fem és:

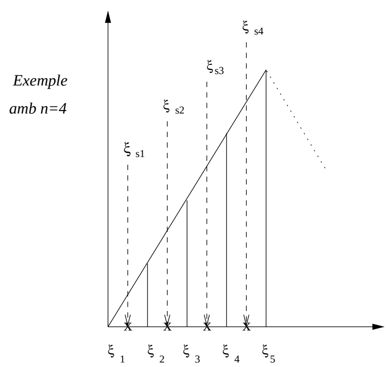

Figura 6.

Podem comprovar que la discretització està ben definida i per tant $\sum_{i=1}^{n} p_{si} = \frac{1}{2}$ (l'altre $\frac{1}{2}$ correspondrà a la part dreta)$[N = 2n+1$ i $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}]$:

$$
\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_{si} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4i-2}{(N-1)^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(4i-2)}{(2n)^2} = \frac{4\sum i = 1^n i - 2n}{4n^2} = \frac{\frac{4}{2}(n^2+n) - 2n}{4n^2} = \\ &= \frac{2n^2 + 2n - 2n}{4n^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}
$$

Part dreta: Es fa de forma anàloga, tenint en compte la simetria:

$$\xi_i \geq x \begin{cases} i = n+1, \dots, 2n+1 (= N) \\ i = n+j \qquad j = 1, n+1 \end{cases}$$

- $f(\xi_i) \quad , \quad i = n+1, \dots, 2n+1 \quad , \quad i = n+j \quad , \quad j = 1, \dots, n+1$

$$f(\xi_i) = f(\xi_{n+j}) = \frac{100}{x^2}(1.1x - \xi_i) = \frac{100}{x^2}(1.1x - 0.9x - 0.2x\frac{(i-1)}{N-1}) = \frac{100}{x^2}0.2x(1 - \frac{i-1}{N-1}) =$$
$$= \frac{20}{x}(\frac{N-n-j}{N-1}) \qquad j = 1, \dots, n+1$$

- $F(\xi_i) \quad , \quad i = n+1, \dots, 2n+1 \quad , \quad j = 1, \dots, n+1$

$$F(\xi_i) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per simetria respecte a la part esquerra}}}{F(\xi_{n+j}) = 1 - F(\xi_{n+2-j})} = 1 - \frac{2(n+2-j-1)^2}{(N-1)^2} = 1 - \frac{2(n-j+1)^2}{(N-1)^2}$$

Llavors, com a la part esquerra, considerarem els punts:

$$\xi_{sn+j} = \xi_{si} = \frac{\xi_i + \xi_{i+1}}{2} = x\left[0.9 + 0.2\frac{2i-1}{2(N-1)}\right] \qquad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n \\ i = n+1, \dots, 2n \end{array}$$

de probabilitats:

$$p_{sn+j} = p_{si} = F(\xi_{i+1}) - F(\xi_i) = F(\xi_{n+j+1}) - F(\xi_{n+j}) = 1 - \frac{2(n+j)^2}{(N-1)^2} - 1 + \frac{2(n-j+1)^2}{(N-1)^2} =$$
$$= \frac{2((n-j)+1)^2 - 2(n-j)^2}{(N-1)^2} = \frac{2((n-j)^2 + 2(n-j) + 1 - (n-j)^2)}{(N-1)^2} =$$
$$= \frac{4(n-j)+2}{(N-1)^2} \qquad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n \\ i = n+1, \dots, 2n \end{array}$$

També pot expressar-se com:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{sn+j} = \frac{1}{2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} 4n - 4j + 2}{4n^2} = \frac{4n^2 - \frac{4n^2 - 4n}{2} + 2n}{4n^2} = \frac{4n^2 - 2n^2 - 2n + 2n}{4n^2} = \frac{1}{2}$$

Ara ja tenim la nostra discretització ξ_{si} $i = 1, \dots, 2n$.
El total de punts és finalment $S = 2n = N - 1$.
I els punts i probabilitats tals i com els hem calculat abans són:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{Part esquerra} & \left\{
\begin{array}{l}
\underset{i=1,\ldots,n}{\xi_{si}} = x\left[0.9 + 0.2\dfrac{2i-1}{2(N-1)}\right] = \boxed{x[0.9 + 0.2\dfrac{2i-1}{2S}]} \\
\underset{i=1,\ldots,n}{p_{si}} = \dfrac{4i-2}{(N-1)^2} = \boxed{\dfrac{4i-2}{S^2}}
\end{array}\right. \\
\text{Part dreta} & \left\{
\begin{array}{l}
\underset{i=n+1,\ldots,2n \quad , \quad j=1,\ldots,n}{\xi_{si} = \xi_{sn+j}} = \boxed{x[0.9 + 0.2\dfrac{2i-1}{2S}]} \\
\underset{i=n+1,\ldots,2n \quad , \quad j=1,\ldots,n}{p_{si} = p_{sn+j}} = \boxed{\dfrac{4(n-j)+2}{S^2}}
\end{array}\right.
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}\text{on } S = 2n \\ \text{i } n \text{ és un valor fixat}\end{array}
$$

Ara només cal introduir aquesta discretització en la forma extensa del problema. Caldrà duplicar les restriccions de 2a etapa per tractar les 2 expressions diferents de p_{si} segons estem a la part dreta o esquerra de la distribució triangular:

$$
\max \quad r(1 - e{-}0.1w) - \frac{cw\pi x^2}{4} - q\left[\textstyle\sum_{i=1}^{n} p_{si}y_{si}^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} p_{si}y_{si}^2\right]
$$

s.a.:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
[\text{esq.}] & \dfrac{w}{\xi_{si}^3} - y_{si} \le 39.27 & i = 1,\ldots,n \\
[\text{dreta}] & \dfrac{w}{\xi_{si}^3} - y_{si} \le 39.27 & i = n+1,\ldots,2n
\end{array}
\right\} \rightarrow
$$

$$
\left.
\begin{array}{lll}
[\text{esq.}] & \dfrac{w^3}{\xi_{si}^4} - 300y_{si} \le 63169 & i = 1,\ldots,n \\
[\text{dreta}] & \dfrac{w^3}{\xi_{si}^4} - 300y_{si} \le 63169 & i = n+1,\ldots,2n
\end{array}
\right\} \rightarrow
$$

Com que l'expressió de ξ_{si} és la mateixa per a dreta i esquerra no caldrà desdoblament

Solucionant el problema anterior amb AMPL obtenim:

n	$S = 2n$	x^*	w^*	$fobj^*$
10	20	1.0374	33.4618	8.93393
20	40	1.03755	33.4589	3.03512
30	100	1.03741	33.4616	8.93536

4 Solucions dels problemes del capítol 2.

Solució del problema 15.

$$\begin{array}{ll} \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{s.a.:} & y_1 + 2y_2 \geq \xi_1 - x_1 \\ & y_1 + y_2 \geq \xi_2 - x_1 - x_2 \\ & 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1. \end{array}$$

a) $K_2(\xi)\ \forall \xi$

$K_2(\xi) = \{x \mid Q(x,\xi) < +\infty\} = \{x \mid Q(x,\xi) \text{ factible}\}$ i tenint present que $y_1 \leq 1, y_2 \leq 1$

$$\xi_1 - x_1 \leq y_1 + 2y_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 \geq \xi_1 - 3$$
$$\xi_2 - x_1 - x_2 \leq 2 \Rightarrow x_2 \geq \xi_2 - x_1 - 2$$

$$K_2(\xi) = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq \xi_1 - 3 \quad , \quad x_2 \geq \xi_2 - x_1 - 2\}$$

b) $\xi_1 \sim U[2,4] \qquad \xi_2 \sim U[2,4]$

i) K_2^P

$$\begin{aligned} K_2^P &= \bigcap_{\forall \xi} K_2(\xi) = \bigcap_{\forall \xi} \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq \xi_1 - 3 \quad , \quad x_2 \geq \xi_2 - x_1 - 2\} = \\ &= \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq \xi_1 - 3 \quad , \quad x_2 \geq \xi_2 - x_1 - 2 \ \ \forall \xi_1, \forall \xi_2\} = \\ &= \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq \max\{\xi_1\} - 3 \quad , \quad x_2 \geq \max\{\xi_2\} - x_1 - 2\} = \\ &= \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geq 4 - 3 = 1 \quad , \quad x_2 \geq 4 - 2 - x_1 = 2 - x_1\} \end{aligned}$$

ii) $K_2 = \{x \mid \mathcal{Q}(x) = E_\xi[Q(x,\xi)] < +\infty\}$

O bé calculem $\mathcal{Q}(x)$ analícament - costós -, o bé apliquem el resultat del Tma. que garanteix que $K_2 = K_2^P$ si ξ és contínua i té moments de 2n ordre finits, i W és fix.

ξ_1, ξ_2 són contínues. W és fix. Només cal veure si els moments de 2n ordre són finits:

$$E[\xi_{i=1,2}^2] = \int_2^4 \xi_i^2 f(\xi_i) d\xi_i = \int_2^4 \xi_i^2 \frac{1}{2} d\xi_i = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi_i^3}{3}\right]_2^4 < +\infty \Rightarrow \text{moments 2n ordre finits.}$$

Solució del problema 16.

$$\begin{array}{rl} \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{s.a.:} & y_1 - y_2 \leq 2 - \xi x_1 \\ & y_2 \leq x_2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \end{array}$$

a) $K_2(\xi) = \{(x_1, x_2) \mid Q(x,\xi) < +\infty \Leftrightarrow Q(x,\xi) \text{ factible}\}$

$$x_2 \geq y_2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_2 \geq 0}$$

$$\begin{array}{lllll} & & -y_2 \geq -x_2 & y_1 \geq 0 & \\ & & \downarrow & \uparrow & \\ y_2 \leq x_2 \Rightarrow -y_2 \geq -x_2 \quad ; & 2 - \xi x_1 & \geq y_1 - x_2 & \geq -x_2 \Rightarrow & \\ & & \Rightarrow 2 - \xi x_1 & \geq -x_2 \rightarrow & \boxed{x_1 \leq \dfrac{2 + x_2}{\xi}} \end{array}$$

Llavors $K_2(\xi) = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1 \leq \dfrac{2 + x_2}{\xi}\}$

Si $\xi \sim U[0,1]$, sabem que $K_2 = K_2^P$. Llavors:

$$K_2 = K_2^P = \bigcap_{\forall \xi} K_2(\xi) = \bigcap_{0 \leq \xi \leq 1} \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0, x_1 \leq \frac{2 + x_2}{\xi}\} = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0, x_1 \leq 2 + x_2\}$$

$$\downarrow$$

El cjt. més petit s'obé per $\xi = 1$.

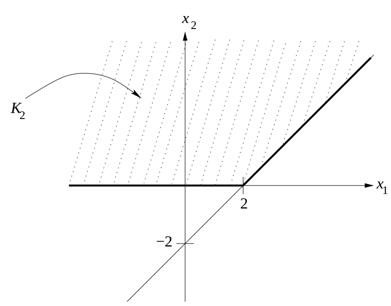

Figura 7.

b) $K_2(\xi)$ es defineix igual.
Si $\xi \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$ tenim que $\xi \geq 0$, i en el límit $\xi \rightarrow +\infty$.
Si ξ té moments de 2n ordre finits de nou se satisfà que $K_2 = K_2^P$. Comprovem els moments

de ξ:

$$E[\xi^2] = \int_0^{+\infty} \xi^2 f(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \xi_2 (\lambda e^{-\lambda\xi}) d\xi = \begin{bmatrix} \text{per parts} \\ dv = \lambda e^{-\lambda\xi} \\ u = \xi^2 \end{bmatrix} = [\,-\xi^2 e^{-\lambda\xi}\,]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\xi e^{-\lambda\xi} d\xi =$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty} -\xi^2 e^{-\lambda\xi} + 0e^{-\lambda 0} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \xi\lambda e^{-\lambda\xi} d\xi = 0 + 0 + \frac{2}{\lambda}E[\xi] = \frac{2}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} < +\infty \text{ (fixat } \lambda).$$

Llavors:

$$K_2 = K_2^P = \bigcap_{\forall\xi\geq 0} \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0, x_1 \leq \frac{2 + x_2}{\xi}\} = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0, x_1 \leq 0\}$$

$\downarrow$

El cjt. més petit s'obé quan $\xi \to +\infty$.

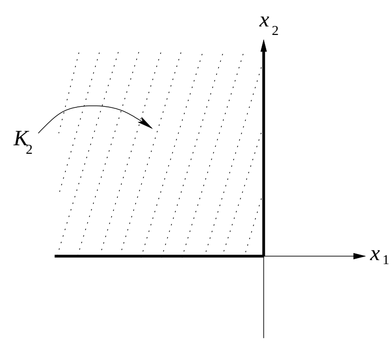

Figura 8.

Solució del problema 17.

$$\begin{array}{llll} Q(x,\xi) = \min & y & & x \geq 0 \quad \text{i} \quad f(\xi) = \dfrac{2}{\xi^3} \quad , \quad \xi \geq 1 \\ \text{s.a.:} & y \geq \xi & \text{On} & \downarrow \\ & y \geq x. & & K_1 = \{x \mid x \geq 0\} \end{array}$$

Comprovem que $f(\xi)$ està ben definit primer de tot:

$*$ $f(\xi) \geq 0 \quad , \quad \forall\xi \geq 1$ OK

$*$ $F(\infty) = \int_1^{+\infty} f(\xi) d\xi = \int_1^{+\infty} \frac{2}{\xi^3} d\xi = [\,-\xi^{-2}\,]_1^{+\infty} = \frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{1^2} = 1$ OK

- $K_2(\xi) = \{x \mid Q(x,\xi) < +\infty\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tenim un punt $y \in \mathbb{R} \mid y \geq \xi$ i $y \geq x$
- $K_2(\xi) = \mathbb{R} \quad ; \quad K_2^P = \bigcap_{\forall\xi} \mathbb{R} = \mathbb{R}$

- $K_2 = \{x \mid \mathcal{Q}(x) < +\infty\}$ El calculem a partir de la definició anterior. Primer trobem $\mathcal{Q}(x)$

$$\mathcal{Q}(x) = E_\xi[Q(x,\xi)] = E_\xi[max\{x,\xi\}] = \int_1^{+\infty} max\{x,\xi\}\frac{2}{\xi^3}d\xi =$$
$$= \left[max\{x,\xi\} = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi \geq x \\ x & \text{si } \xi < x \end{cases} \right] = \int_1^x x\frac{2}{\xi^3}d\xi + \int_x^{+\infty} \xi\frac{2}{\xi^3}d\xi =$$
$$= x\int_1^x \frac{2}{\xi^3}d\xi + \int_x^{+\infty} \frac{2}{\xi^3}d\xi = x\,[\,-\xi^{-2}\,]_1^x + 2\,[\,-\xi^{-1}\,]_x^{+\infty} =$$
$$= x\,[\,\frac{-1}{x^2}+1\,] + 2\,[\,\frac{-1}{\infty}+\frac{1}{x}\,] = \frac{-1}{x} + x + \frac{2}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Llavors $K_2 = \{x \mid \mathcal{Q}(x) < +\infty\} = \{x \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

Clarament $K_2 \neq K_2^P$. Això no contradiu el Tma. d'equivalència entre K_2 i K_2^P, ja que no es verifica que ξ té moments de 2n ordre finit:

$$E[\xi^2] = \int_1^\infty \xi^2\frac{2}{\xi^3}d\xi = 2\int_1^\infty \frac{1}{\xi}d\xi = 2\,[\,ln\xi\,]_1^\infty = 2(ln\infty - ln1) = \infty$$

Solució del problema 18.

$$\begin{array}{ll} \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{s.a.:} & y_1 + y_2 \geq 1 - x_1 \\ & y_1 \geq \xi - x_1 - x_2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{array}$$

a) Un problema és de recurs complet si escrit en forma $\{Wy = h - Tx \quad , \quad y \geq 0\}$ es verifica que $\forall t \in \mathbb{R}^{m_2}\ \exists y \geq 0 \mid Wy = t$. Escrivim les restriccions de $\geq$ com de $=$.

$$\begin{array}{l} y_1 + y_2 - y_3 = 1 - x_1 \\ y_1 - y_4 = \xi - x_1 - x_2 \\ y_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,4 \end{array} \quad \Rightarrow \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Clarament $\forall t \in \mathbb{R}^2$ puc trobar $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \mid Wy = t$. També podria haver-se argumentat sense afegir les variables y_3, y_4 (sense passar a restriccions d'igualtat) dient que $\forall t \in \mathbb{R}^2\ \exists y_1, y_2 \geq 0 \mid$

$$\begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} \geq t$$

b) $0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1$

$$\begin{cases} \text{si } \xi \geq x_1 + x_2 \rightarrow \begin{cases} y_1^* = \xi - x_1 - x_2 \\ y_2^* = \max\{1 - \xi + x_2, 0\} \end{cases} (**) \\ \text{si } \xi \leq x_1 + x_2 \rightarrow \begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 1 - x \end{cases} (*) \end{cases}$$

Per comprovar que són solució cal veure que $2y_1^* + y_2^* \leq 2y_1 + y_2$ $\forall y_1, y_2$ factibles

$\boxed{\text{cas (*)}}$ $\xi \leq x_1 + x_2$

$$2y_1^* + y_2^* = 2 * 0 + 1 - x_1 \leq 2\max\{0, \xi - x_1 - x_2\} + (1 - x_1) \leq 2y_1 + y_2$$
$$\downarrow$$
$$y_1 + y_2 \geq 1 - x_1$$
$$y_1 = \max\{0, \xi - x_1 - x_2\} = 0$$

$\boxed{\text{cas (**)}}$ $\xi \geq x_1 + x_2$

$$2y_1^* + y_2^* = 2(\xi - x_1 + x_2) + \max\{1 - \xi + x_2, 0\}x \leq 2\max\{0, \xi - x_1 - x_2\} +$$
$$+ \max\{1 - \xi + x_2, 0\} = 2y_1 + y_2$$
$$\downarrow$$
$$\begin{aligned} y_1 &= \max\{0, \xi - x_1 - x_2\} \\ y_2 &= \max\{0, 1 - x_1 - y_1\} = \max\{0, 1 - x_1 - \xi + x_1 + x_2\} = \\ &= \max\{0, 1 - \xi + x_2\} \end{aligned}$$

c) Si $\xi \leq x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 1 - x \end{cases} \Rightarrow Q(x, \xi) = 1 - x_1$

Si $\xi \geq x_1 + x_2$:

- $\xi \geq 1 + x_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = \xi - x_1 - x_2 \\ y_2^* = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad Q(x, \xi) = 2(\xi - x_1 - x_2)$
- $\xi \leq 1 + x_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1^* = \xi - x_1 - x_2 \\ y_2^* = 1 - \xi + x_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad Q(x, \xi) = 2(\xi - x_1 - x_2) + 1 - \xi + x_2 = = \xi - 2x_1 - x_2 + 1$

d) Sabem que $Q(x, \xi)$ és convexa i lineal per parts respecte h i x (ens ho garanteix un resultat dels vistos a classe). Comprovem-ho gràficament en aquest cas particular

i) $h = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \end{bmatrix}$ Sigui $f(\xi) = Q(x, \xi)$. Representem $f(\xi)$

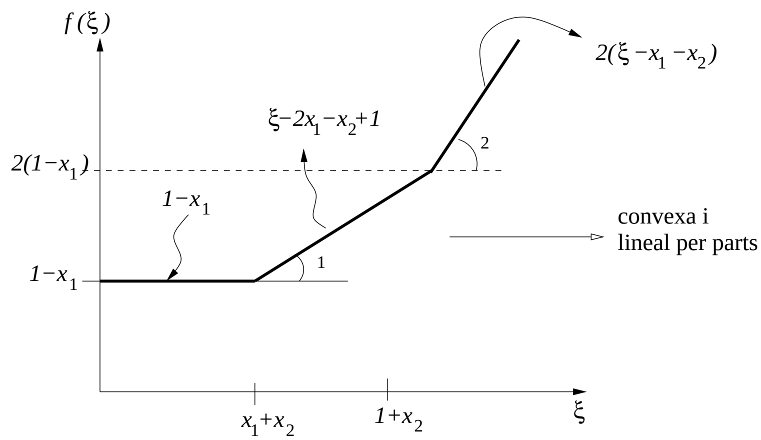

Figura 9.

La $f(\xi)$ és contínua. Als punts de contacte tenim:

$$\begin{cases} f_1(x_1+x_2) = 1 - x_1 \\ f_2(x_1+x_2) = \xi - 2x_1 - x_2 + 1|_{\xi=x_1+x_2} = x_1 + x_2 - 2x_1 - x_2 - 1 = 1 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(1+x_2) = \xi - 2x_1 - x_2 + 1|_{\xi=1+x_2} = 1 + x_2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 2(1-x_1) \\ f_3(1+x_2) = 2(\xi - x_1 - x_2)|_{\xi=1+x_2} = 2(1 + x_2 - x_1 - x_2) = 2(1-x_1) \end{cases}$$

ii) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ Si considerem $f(x_1,x_2) = Q(x=(x_1,x_2),\xi)$, podem escriure $f(x_1,x_2)$ com:

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{si } x_1 + x_2 \geq \xi \quad \text{ZONA A} \\ \xi - 2_1 - x_2 + 1 & \text{si } x_1 + x_2 \leq \xi \text{ i } x_2 \geq \xi - 1 \quad \text{ZONA B} \\ 2(\xi - x_1 - x_2) & \text{si } x_1 + x_2 \leq \xi \text{ i } x_2 \leq \xi - 1 \quad \text{ZONA C} \end{cases}$$

Llavors a $(x_1,x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$ podem escriure les 3 zones de la regió factible com:

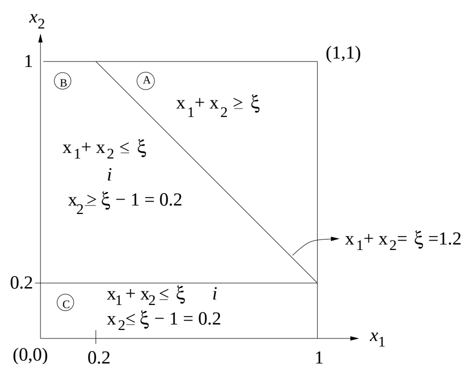

Figura 10. Considerant un valor de $\xi = 1.2$, per exemple

Tenim particions similars per valors de ξ diferents:
Exemples:

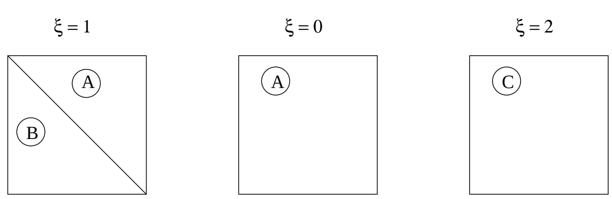

Figura 11.

I la representació ara de $z = f(x_1,x_2)$ seria (pel cas $\xi = 1.2$; per exemple):

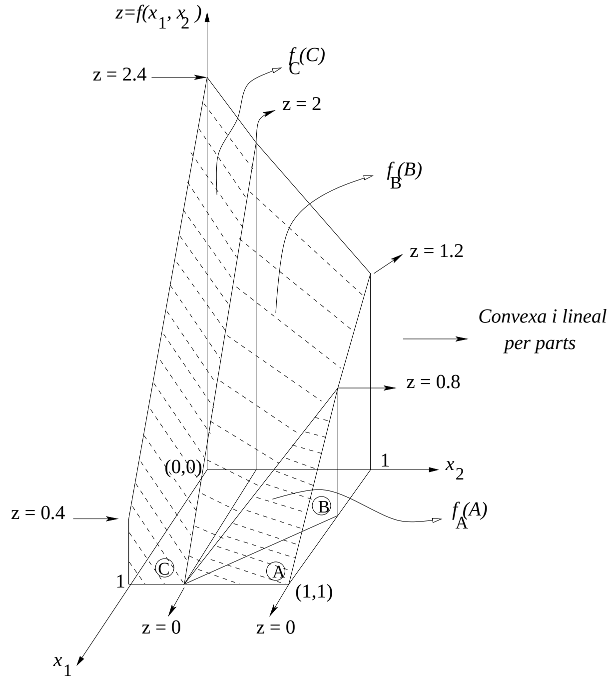

Figura 12.

e) Sigui $\xi \sim U[0,2]$ $\qquad \mathcal{Q}(x) = \frac{1}{4}(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_1 - 6x_2 + 9)$
Com que ξ és contínua i té moments de 2n ordre finit, se satisfà:

* $\mathcal{Q}(x)$ és finita a K_2 i té derivades finites. Això es verifica donat que $\mathcal{Q}(x)$ és una forma quadràtica.
* $\mathcal{Q}(x)$ és diferenciable. Cert, on $\nabla\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{4}\left[\, 2x_1 + 2x_2 - 8 \quad 4x_2 + 2x_1 - 6 \,\right]$
* $\mathcal{Q}(x)$ és convexa. També es verifica perquè:

$$\nabla^2\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ és definida positiva:}$$

$$|2| > 0 \ \text{ i } \ \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 4 > 0$$

Solució del problema 19.

$$\begin{array}{ll} \min & \xi y_1 + y_2 \\ \text{s.a.:} & y_1 + y_2 \geq 1 - x_1 \\ & y_1 \geq 1 - x_1 - x_2 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{array}$$

a) $x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 1. \quad Q(x,\xi) = \xi y_1^* + y_2^*$
Analitzem per casos:

i) si $\xi < 0 \rightarrow \begin{cases} y_1^* = +\infty \\ y_2^* = \text{ qualsevol valor} \end{cases} \quad Q(x,\xi) = -\infty$

(aquest cas no el considerem perquè tenim un problema il·limitat)

ii) si $\xi = 0 \rightarrow \begin{cases} y_2^* = 0 \\ y_1^* = \max\{0, 1-x_2, 1-x_1-x_2\} \end{cases} \quad Q(x,\xi) = 0$

iii) si $0 < \xi \leq 1 \rightarrow \begin{cases} y_2^* = 0 \\ y_1^* = \max\{0, 1-x_1, 1-x_1-x_2\} \end{cases} \quad Q(x,\xi) = \xi \max\{0, 1-x_1, 1-x_1-x_2\}$

iv) si $\xi \geq 1 \rightarrow \begin{cases} y_1^* = \max\{0, 1-x_1-x_2\} \\ y_2^* = \max\{0, 1-x_1-\max\{0, 1-x_1-x_2\}\} \end{cases}$

$$Q(x,\xi) = \xi \max\{0, 1-x_1-x_2\} + \max\{0, 1-x_1-\max\{0, 1-x_1-x_2\}\}$$

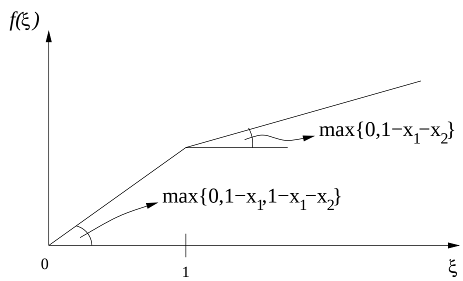

Figura 13.

b) $Q(x,\xi)$ és cóncava respecte q per a tot el problema estocàstic

$$\begin{aligned} f(q) = Q(x,\xi) = \min \quad & q^T y \\ \text{s.a.:} \quad & Wy = b = h - Tx \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Hem de veure que: $f(\alpha q_1 + (1-\alpha) q_2 \geq \alpha f(q_1) + (1-\alpha) f(q_2)$

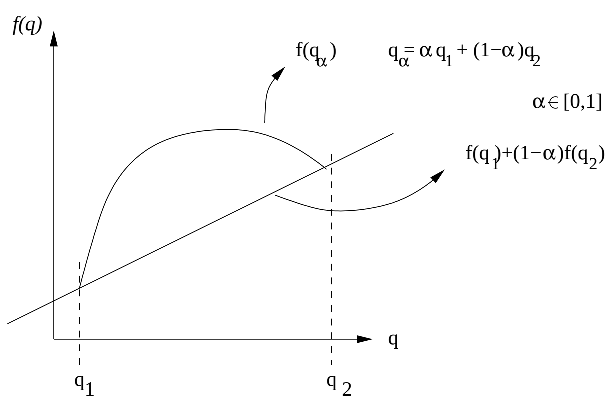

Figura 14.

Siguin:

$$\begin{array}{c} q_1 \to y_1^* \text{ òptim del problema } f(q_1) = q_1^T y_1^* < q_1^T y \ \ \forall y \text{ factible} \\ q_2 \to y_2^* \text{ òptim del problema } f(q_2) = q_2^T y_2^* < q_2^T y \ \ \forall y \text{ factible} \\ q_\alpha \to y_\alpha^* \text{ òptim del problema } f(q_\alpha) = q_\alpha^T y_\alpha^* < q_\alpha^T y \ \ \forall y \text{ factible} \\ \text{On } q_\alpha = \alpha q_1 + (1-\alpha) q_2 \quad \alpha \in (0,1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha q_1 + (1-\alpha)q_2) = f(q_\alpha) = q_\alpha^T y_\alpha^* = \alpha q_1^T y_\alpha^* + (1-\alpha) q_2^T y_\alpha^* \geq \alpha q_1^T y_1^* + (1-\alpha) q_2^T y_2^* = \\ = \alpha f(q_1) + (1-\alpha) f(q_2) \end{aligned}$$

Per tant $f(q)$ és cóncava.

Solució del problema 20.

a) $\mathcal{Q}_i(x) = q_i^+ \bar{h}_i - (q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.}x - q_i \int_{h_i \leq T_{i.}x} h_i f_i(h_i) dhi$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i(x) &= E_\xi[Q_i(x,\xi)] = E_\xi[q_i^+ \, [\, h_i - T_{i.}x \,]^+ + q_i^- \, [\, T_{i.}x - h_i \,]^+] = \int_{h_i} Q_i(x,\xi) f_i(h_i) dh_i = \\ &= \underbrace{\int_{h_i \leq T_{i.}x} q_i^- (T_{i.}x - h_i) f_i(h_i) dhi}_{\boxed{1}} \quad + \quad \underbrace{\int_{h_i \geq T_{i.}x} q_i^+ (h_i - T_{i.}x) f_i(h_i) dhi}_{\boxed{2}} + \\ &+ \left[\underbrace{\int_{h_i \leq T_{i.}x} q_i^+ (h_i - T_{i.}x) f_i(h_i) dhi}_{\boxed{3}} \quad - \quad \underbrace{\int_{h_i \leq T_{i.}x} q_i^+ (h_i - T_{i.}x) f_i(h_i) dhi}_{\boxed{4}} \right] = \\ &= \underbrace{\int_{h_i} q_i^+ (h_i - T_{i.}x) f_i(h_i) dhi}_{\boxed{2} + \boxed{3}} \quad + \quad \underbrace{q_i \int_{h_i \leq T_{i.}x} (T_{i.}x - h_i) f_i(h_i) dhi}_{\boxed{1} + \boxed{4}} = \\ &= q_i^+ (\bar{h}_i - T_{i.}x) + q_i (T_{i.}x F_i(T_{i.}x)) - \int_{h_i \leq T_{i.}x} h_i f_i(h_i) dhi = \\ &= q_i^+ \bar{h}_i - (q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.}x - q_i \int_{h_i \leq T_{i.}x} h_i f_i(h_i) dhi \end{aligned}$$

b) $\nabla \mathcal{Q}_i(x) = -(q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.}$ Sabent que:

$$\begin{cases} (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \text{Si} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{g(x)} f(t)dt \to F'(x) = f(g(x))g'(x) \end{cases}$$

i usant l'expressió anterior de $Q_i(x)$, tenim directament que $\nabla Q_i(x)$ és:

$$\begin{aligned} \nabla Q_i(x) &= -(q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.} + (T_{i.}x) q_i f_i(T_{i.}x) T_{i.} - q_i (T_{i.}x) f(T_{i.}x) T_{i.} = \\ &= -(q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.} \end{aligned}$$

Solució del problema 21.

Problema original

$$\begin{array}{lcll} x & \rightarrow & \text{compra a distribuidor} & (\text{Cost } c) \\ y & \rightarrow & \text{ven a clients} & (\text{Preu } q) \quad r < c < q \\ w & \rightarrow & \text{torna a distribuidor} & (\text{Preu } r) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \min cx + \mathcal{Q}(x) & \rightarrow & \mathcal{Q}(x) & = E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{s.a.:} \ 0 \le x \le u & & & \quad\downarrow \\ & & Q(x,\xi) = & \begin{array}{ll} \min & -qy - rw \\ \text{s.a.} & y \le \xi \\ & y + w \le x \\ & y,\ w \ge 0 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Solució de } Q(x,\xi) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si} \quad x \le \xi \begin{cases} y = x \\ w = 0 \end{cases} \\ \\ \text{Si} \quad x \ge \xi \begin{cases} y = \xi \\ w = x - \xi \end{cases} \end{cases}$$

El problema $Q(x,\xi)$ podem escriure'l com:

$$\begin{array}{ll} \min & -qy - rw \\ \text{subj. a} & x + y^+ - y^- = \xi \\ & y^+ \ge 0, \quad y^- \ge 0 \end{array} \quad \text{On} \quad \begin{array}{l} y = \xi - y^+ \\ w = y^- \end{array}$$

Llavors tenim:

$$\begin{array}{ll} \min & -q(\xi - y^+) - r(y^-) = -q\xi - qy^+ - ry^- \Rightarrow \\ \text{s.a.} & y^+ - y^- = \xi - x \\ & y^+ \ge 0, \quad y^- \ge 0 \end{array} \quad -q\xi + \begin{array}{ll} \min & qy^+ - ry^- \\ \text{s.a.} & y^+ - y^- = \xi - x \\ & y^+,\ y^- \ge 0 \end{array}$$

És un problema de recurs simple i la seva solució coincideix amb la del problema original.

Aplicant els resultats del problema 6, directament tenim ($m_2 = 1$):

$$\mathcal{Q}(x) = \underbrace{\boxed{-q\bar{\xi}}}_{\downarrow} + [q_i^+ \bar{h}_i - (q_i^+ - q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.}x - q_i \int_{h_i \le T_{i.}x} h_i f(h_i) dhi]$$

terme provinent del valor constant $-q\xi$ de la f. objectiu de $Q(x,\xi)$

Identificant ara termes tenim:

$$\begin{array}{l} q_i^+ = q \qquad q_i^- = -r \\ q_i = q_i^+ - q_i^- = q - r \\ h_i = \xi \\ T_{i.} = 1 \end{array}$$

I llavors ens queda finalment:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(x) =& -q\bar{\xi} + q\bar{\xi} - (q-(q-r)F(x))x - (q-r)\int_{\xi\le x} \xi f(\xi)d\xi \\ =& -qx + (q-r)[F(x)x - \int_{-\infty}^{x} \xi f(\xi)d\xi]\end{aligned}$$

que coincideix amb l'expressió trobada al tema 1.

Anàlogament (i identificant termes):

$$\nabla\mathcal{Q}(x) = (-q_i^+ + q_i F_i(T_{i.}x))T_{i.} = -q + (q-r)F(x)$$

Finalment, si volem calcular la subdiferencial tenim (identificant termes) :

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{Q}(x) =& \{\pi T_{i.} \mid -q_i^+ + q_i F_i(T_{i.}x) \le \pi \le -q_i^+ + q_i F_i^+(T_{i.}x)\} = \\ =& \{\pi \mid -q + (q-r)F(x) \le \pi \le -q + (q-r)\lim_{\xi\to x^+} F(\xi)\}\end{aligned}$$

Aquest terme (subdiferencial) és més costós de calcular de forma "directa" i no es va obtenir al tema 1.

Solució del problema 22.

a) $\boxed{\text{Pregunta 1}}$

1a etapa				2a etapa
	$\longrightarrow$	ξ_1, ξ_2	$\longrightarrow$	
x_1 = hores d'estudi				y_1 hores que deixa d'estudiar
x_2 = hores per al partit				y_2 hores que deixa de dedicar al partit

Problema estocàstic formulat com:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{s.a.:} & Ax = b \\ & Wy + Tx = h \\ & x, y \ge 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & E_{\xi_1,\xi_2}[\min 2y_1 + y_2] \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 = N \\ & y_1 + x_1 \ge \xi_1 \\ & y_2 + x_2 \ge \xi_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

$$\text{on} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

b) Forma extensa de la formulació anterior

Un "estat de la natura" ve donat per un parell $[\,\xi_{1i} \quad \xi_{2j}\,]$ $i = 1 \ldots r,\ j = 1 \ldots s$ que té probabilitat $p_i q_j$ (ja que ξ_1 i ξ_2 són independents).

La forma extensa constarà de les variables:

$$\begin{array}{ll} x_1, x_2 & \text{1a. etapa} \\ \left.\begin{array}{l} y_{1,i,j} \begin{array}{l} i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s \end{array} \\ y_{2,i,j} \begin{array}{l} i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s \end{array} \end{array}\right\} & \text{2a. etapa} \end{array}$$

I la seva formulació seria:

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(p_i q_j)(2y_{1,i,j}+y_{2,i,j}) \\ \text{s.a.:} & x_1+x_2=N \\ & \left.\begin{array}{l} y_{1,i,j}+x_1 \geq \xi_{1,i} \\ y_{2,i,j}+x_2 \geq \xi_{2,i} \end{array}\right\} \begin{array}{l} i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,s \end{array} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & y_{1,i,j}, y_{2,i,j} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i=1\dots,r \\ j=1,\dots,s \end{array} \end{array}$$

$\boxed{\text{Pregunta 2}}$

$$\begin{array}{ll} \min & E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{s.a.:} & x_1+x_2=10 \\ & x_1,x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{on} \qquad \begin{array}{rl} Q(x,\xi)=\min & 2y_1+y_2 \\ \text{s.a.:} & y_1+x_1 \geq \xi \\ & y_2+x_2 \geq 2 \\ & y_1,y_2 \geq 0 \end{array}$$

a) $K_1 = \{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2=10, \quad x_1,x_2 \geq 0\}$

$K_2 = K_2^P$, perquè tenim un problema de recurs fix (W fix) on ξ té moments de 2n ordre finits.

$K_2^P = \bigcap_{\forall\xi\in[5,10]} K_2(\xi)$ on:

$$\begin{aligned} K_2(\xi) =& \{(x_1,x_2) \mid \exists y_1,y_2 \;\; y_1 \geq \xi - x_1, \;\; y_2 \geq 2-x_2, \;\; y_1,y_2 \geq 0\} = \\ =& \mathbb{R}^2 \;\; (\forall \xi - x_1, \; 2-x_2 \;\; \exists y_1,y_2 \mid y_1 \geq \xi - x_1 \text{ i } y_2 \geq 2-x_2) \end{aligned}$$

$K_2^P = \mathbb{R}^2$ llavor $K_2 = \mathbb{R}^2$

Es tracta d'un problema de recurs complet donat que $K_2 = \mathbb{R}^2$ i que no és de recurs simple ($W \neq [\,1 \quad 1\,]$)

b) $\mathcal{Q}(x) = E_\xi[Q(x,\xi)]$

La solució de $\mathcal{Q}(x)$ és $2y_1^* + y_2^*$ on

$$\begin{aligned} y_1^* &= \max\{0, \xi - x_1\} \\ y_2^* &= \max\{0, 2-x_2\} \\ &\downarrow \end{aligned}$$

$$Q(x,\xi) = \begin{cases} \max\{0,2-x_2\} + 2(\xi - x_1) & \text{si } \xi \geq x_1 \\ \max\{0,2-x_2\} & \text{si } \xi \leq x_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(x) &= \int_5^{x_1} \max\{0, 2-x_2\} f(\xi) d\xi + \int_{x_1}^{10} (\max\{0,2-x_2\} + 2\xi - 2x_1) f(\xi) d\xi = \begin{bmatrix} \text{Com} \\ f(\xi) = \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{5} [\max\{0,2-x_2\}(x_1-5) + \max\{0,2-x_2\}(10-x_1) - 2x_1(10-x_1) + \xi^2\big|_{x_1}^{10}] = \\
&= \frac{1}{5} [\max\{0,2-x_2\}(x_1-5+10-x_1) - 20x_1 + 2x_1^2 + 100 - x_1^2] = \\
&= \frac{1}{5} [5\max\{0,2-x_2\} + x_1^2 - 20x_1 + 100] = \max\{0,2-x_2\} + \frac{1}{5}(x_1^2 - 20x_1 + 100)
\end{aligned}$$

Solucionem ara: $\min_{x \in K_1} c^T x + \mathcal{Q}(x)$

$$\begin{aligned}
\min \mathcal{Q}(x) \quad &= max\{0, 2-x_2\} + \frac{1}{5}(x_1^2 - 20x_1 + 100) \\
&x_1 + x_2 = 10 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Distinguim si $x_2 \geq 2$ o $x_2 \leq 2$ per poder avaluar la f. objectiu:

i) $x_2 \geq 2$ i $0 \leq x_1 \leq 8$
Llavors $\max\{0, 2-x_2\} = 0$ i $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{5}(x_1^2 - 20x_1 + 100)$
Busquem el mínim de $\mathcal{Q}(x)$

$$\mathcal{Q}'(x) = \frac{1}{5}(2x_1 - 20) := 0 \Rightarrow x_1 = 10 \text{ però } 10 \notin [0,8]$$

Llavors el mínim ha de ser o 0 o 8:

$$\mathcal{Q}'(0) = \frac{1}{5}(2 \cdot 0 - 20) = -4$$
$$\mathcal{Q}'(8) = \frac{1}{5}(2 \cdot 8 - 20) = -\frac{4}{5}$$

Solució $\begin{cases} x_1^* = 8 \\ x_2^* = 2 \end{cases}$ i el valor de la f.objectiu és

$$\mathcal{Q}(8,2) = \frac{1}{5}(8^2 - 20 \cdot 8 + 100) = \frac{1}{5}(164 - 160) = \frac{4}{5}$$

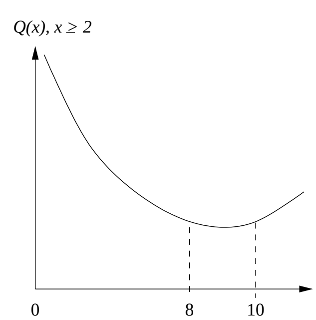

Figura 15.

ii) $x_2 \leq 2$ i $8 \leq x_1 \leq 10$ i usant que $x_2 = 10 - x_1$
$\max\{0, 2-x_2\} = 2 - x_2 \quad \mathcal{Q}(x) = (2-x_2) + \frac{1}{5}(x_1^2 - 20x_1 + 100) = (x_1 - 8) + \frac{1}{5}(x_1^2 - 20x_1 + 100)$

$$\mathcal{Q}'(x) = 1 + \frac{1}{5}(2x_1 - 20) := 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 20 = -5 \Leftrightarrow x_1 = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ però } \; 7.5 \notin [8, 10]$$

Llavors el mínim ha de ser 8 o 10:

$$\mathcal{Q}'(8) = 1 + \frac{1}{5}(2 \cdot 8 - 20) = 1 - \frac{4}{5} > 0$$
$$\mathcal{Q}'(10) = 1 + \frac{1}{5}(2 \cdot 10 - 20) = 1 > 0$$
$$\text{El mínim és } \begin{cases} x_1^* = 8 \\ x_2^* = 2 \end{cases} \text{ i } \mathcal{Q}(x) = \frac{4}{5}$$

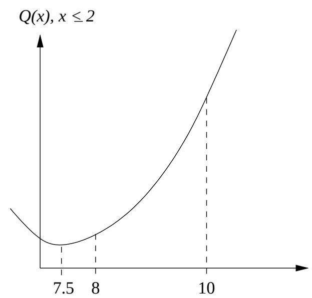

Figura 16.

Als dos casos (i) i (ii) coincidim en el mínim $\boxed{\begin{array}{l} x_1^* = 8 \\ x_2^* = 2 \end{array}}$ que és per tant la solució del problema estocàstic, amb un valor $c'x + \mathcal{Q}(x)$ de f. objectiu igual a $\boxed{RP = \frac{4}{5}}$

c) Sabem que $WS \leq RP \leq EEV$ i que

$$EVPI = RP - WS$$

$$VSS = EEV - RP$$

$\boxed{\text{EVPI}}$ Cal trobar abans WS
Formulem el problema:

$$\begin{array}{rl} z(x,\xi) = \min & 2y_1 + y_2 \\ \text{s.a.:} & y_1 + x_2 \geq \xi \\ & y_2 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

La solució en funció de ξ és

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{y}_1(\xi) & = 0 \\ \bar{x}_1(\xi) & = \xi \in [5, 10] \\ \bar{x}_2(\xi) & = 10 - \bar{x}_1(\xi) = 10 - \xi \in [0, 5] \\ \bar{y}_2(\xi) & = \max\{2, x_2, 0\} = \max\{2 - 10 + \xi, 0\} = \\ & = \max\{\xi - 8, 0\} \end{array}}$$

Llavors $z(\bar{x}(\xi),\xi) = 2\bar{y}_1(\xi) + \bar{y}_2(\xi) = \max\{\xi - 8, 0\}$ i

$$WS = E_\xi[\max\{\xi-8,0\}] = \int_5^{10} \max\{\xi-8,0\} f(\xi) d\xi = \int_5^8 0 f(\xi) d\xi + \int_8^{10} (\xi - 8)\frac{1}{5} d\xi =$$

$$= \frac{1}{5}\int_8^{10} (\xi-8) d\xi = \frac{1}{5}\left[\,\frac{\xi^2}{2} - 8\xi\,\right]_8^{10} = \frac{1}{5}\left[\,\frac{10^2}{2} - 8\cdot 10 - \frac{8^2}{2} + 8\cdot 8\,\right] =$$

$$= \frac{1}{5}[50 - 80 - 32 + 64] = \frac{2}{5}$$

$$EVPI = RP - WS = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$\boxed{\text{VSS}}$ Cal trobar abans EEV i, abans encara EV:
EV $\rightarrow$

min	$2y_1 + y_2$	Una solució possible (n'hi ha d'altres, però):
s.a.:	$y_1 + x_1 \geq \bar{\xi} = 7.5$	$x_1^* = 7.5$
	$y_2 + x_2 \geq 2$	$y_1^* = 0$
	$x_1 + x_2 = 10$	$x_2^* = 2.5$
	$x_i, y_i \geq 0$	$y_2^* = 0$

Per aquesta solució calculem EEV:

$$EEV = \mathcal{Q}(7.5, 2.5) = \max\{0, 2 - x_2\} + \frac{1}{5}(x_1^2 - 20x_1 + 100) =$$
$$= 0 + \frac{1}{5}(7.5^2 - 20\cdot 7.5 + 100) = \frac{6.25}{2} = 1.25 = \frac{5}{4}$$

Llavors $VSS = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = 1.25 - 0.8 = 0.45 = \frac{9}{20}$

[<u>Nota:</u>

Si com a solució de EV proporcionem $\begin{array}{l} x_1^* \in [7.5, 8] \\ x_2^* = 1 - x_1^* \end{array}$

el valor VSS va variant de $\frac{9}{20}\ _{(x_1^*=7.5)}$ fins a $0\ _{(x_1^*=8)}$]

Solució del problema 23.

1)

a)

Variable de 1a etapa: x Euros dipositats inicialment al caixer

Variable de 2a etapa: $\begin{cases} y \text{ Euros que superen la demanda a } x \\ z \in \{0,1\} \text{ variable binària per saber si s'ha superat } x \text{ o no} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{1a etapa} & \rightarrow & \xi \text{ demanda} & \rightarrow & \text{2a etapa} \\ x & & & & y, z \end{array}$$

El problema estocàstic formulat seria:

$$\begin{array}{ll} \min Rx + E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{s.a.:}\ \ m \le x \le L \end{array} \qquad \text{On}\ \ Q(x,\xi) = \begin{array}{ll} \min & C_1 z + C_2 y \\ \text{s.a.:} & x + y \ge \xi \\ & Mz \ge y \ge 0 \\ & z \in \{0,1\} \end{array}$$

Quan $z = 0$ llavors $y = 0$ (per tant, només apliquem el cost fix C_1 quan $y > 0$)

b) La forma extensa s'obté considerant $\forall$ escenari $s = 1\ldots,S$ en que discretitzem $\xi(\xi_s, p_s)$ les variables de 2a etapa z_s, y_s.
La forma extensa seria:

$$\begin{array}{ll} \min & Rx + \sum_{s=1}^{S} p_s(C_1 z_s + C_2 y_s) \\ \text{s.a.:} & x + y_s \ge \xi_s \qquad \forall s = 1\ldots,S \\ & Mz_s \ge y_s \ge 0 \qquad \forall s = 1\ldots,S \\ & z_s \in \{0,1\} \qquad \forall s = 1\ldots,S \\ & 0 \le x \le L \end{array}$$

El model AMPL seria (n'hi ha d'alternatius):

$param\ \ R >= 0;$
$param\ \ L >= 0;$
$param\ \ C1 >= 0;$
$param\ \ C2 >= 0;$
$param\ \ S > 0;$
$param\ \ prob\{1\ldots,S\} >= 0;$
$param\ \ dem\{1,\ldots,S\} >= m,\ <= M;$
$var\ \ x >= 0,\ <= L;$
$var\ \ y\{1,\ldots,S\} >= 0;$
$var\ \ z\{1,\ldots,S\}\ binary;$
$minimize\ fobj:\ \ R * x + sum\{i\ in\ 1\ldots S\}\ prob[i] * (C1 * z[i] + C2 * y[i]);$
$subject\ to\ demanda\{i\ in\ 1\ldots S\};$
$\quad x + y[i] \ge dem[i];$
$subject\ to\ lliga\_y\_i\_z\{i\ in\ 1\ldots S\};$
$\quad y[i] \le M * z[i];$

2)

a)

$$\begin{array}{l} \min Rx + E_\xi[Q(x,\xi)] \\ \text{s.a.:}\ \ m \le x \le L \end{array} \qquad \text{On}\ \ Q(x,\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \ge \xi \\ C & \text{si } x < \xi \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}(x) = E_\xi[Q(x,\xi)] = \int_m^M Q(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int_m^M Q(x,\xi)\frac{1}{M-m}d\xi = \int_m^x 0\frac{1}{M-m}d\xi +$$
$$+\int_x^M C\frac{1}{M-m}d\xi = C\frac{M-x}{M-m}$$

Cal solucionar ara:

$$\begin{array}{ll} \min & Rx + \frac{C}{M-m}(M-x) = \frac{CM}{M-m} + [\, R - \frac{C}{M-m}\,]\, x \\ \text{s.a.:} & m \le x \le L \end{array}$$

La solució és directament: $\begin{cases} x^* = m & \text{si } R - \frac{C}{M-m} > 0 \Rightarrow R > \frac{C}{M-m} \\ & \\ x^* = L & \text{si } R - \frac{C}{M-m} < 0 \Rightarrow R < \frac{C}{M-m} \end{cases}$

b) $WS \le RP \le EEV$

$$\begin{array}{cc} WS \le RP & RP \le EEV \\ \downarrow & \downarrow \\ EVPI = RP - WS & VSS = EEV - RP \end{array}$$

- $\boxed{\text{RP}}$ Usant $R = 0.09,\ L = 100,\ m = 10,\ M = 110,\ C = 10$ i la solució de l'apartat (a) tenim:

$$x^* = 100 \ \text{ perquè } \ R < \frac{C}{M-m}$$
$$\Updownarrow$$
$$0.09 < \frac{10}{110-10} = 0.1$$

Llavors $RP = \frac{CM}{M-m} + [\, R - \frac{C}{M-m}\,]\, x^* = 0.1 \cdot 110 + (0.09 - 0.1)100 = 11 - 0.01 \cdot 100 = 10$

- $\boxed{\text{WS}}$ Si suposem coneguda la demanda ξ, llavors la solució del problema determinista en funció de ξ seria:

$$x^* = \begin{cases} \xi & \text{si } \xi \le L \\ L & \text{si } \xi > L \end{cases}$$

I el cost que tindríem seria (per a una ξ particular)

$$cost_\xi = \begin{cases} R\xi & \text{si } \xi \le L \\ RL + C & \text{si } \xi > L \end{cases}$$

Ara

$$WS = E_\xi[cost_\xi] = \int_m^M cost_\xi f(\xi)d\xi = \int_m^L R\xi\frac{1}{M-m}d\xi + \int_L^M RL + C\frac{1}{M-m}d\xi =$$
$$= \frac{R}{M-m}\,[\, \tfrac{\xi^2}{2}\,]_m^L + \frac{(RL+C)(M-L)}{M-m} = \frac{R}{M-m}\frac{(L^2-m^2)}{2} + \frac{(RL+C)(M-L)}{M-m} =$$
$$= 6.3550$$

$\uparrow$ substituint valors

∗ $\boxed{\text{EEV}}$ Primer calculem EV, solució del problema del valor esperat, considerant

$$\bar{\xi} = \frac{M+m}{2} = \frac{110+10}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

.

La solució és directament $x^* = \bar{\xi} = 60$.

Si ara considerem aquesta solució dins la funció usada per calcular RP (òptim del problema estocàstic) trobem EEV:

$$EEV = \frac{CM}{M-m} + [\,R - \frac{C}{M-m}\,]\,60 = 10.4$$

Llavors tenim que:

$$EVPI = RP - WS = 10 - 6.355 = 3.645$$
$$VSS = EEV - RP = 10.4 - 10 = 0.4$$

Solució del problema 24.

(a)

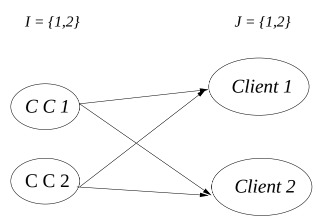

Figura 17.

$\boxed{\text{Variables i paràmetres:}}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1a. etapa} & \begin{cases} y_{ij} \in \{0,1\} & : \text{construim o no la línia de i a j} \\ x_{ij} \geq 0 & : \text{capacitat de la línia de i a j} \\ f_{ij} & : \text{cost fix construcció línia i a j} \\ c_{ij} & : \text{cost variable per Mb/s instal·lats de i a j} \end{cases} \\ \text{Fet aleatori} & \{\ \xi_j \ \ : \text{capacitat requerida pel client j (v. aleatòria)} \\ \text{2a. etapa} & \begin{cases} u_j & : \text{demanda no satisfeta al client j} \\ v_j & \text{demanda satisfeta en excès al client j} \\ p_j & : \text{cost demanda no satisfeta} \\ o_j & : \text{cost demanda en excès} \end{cases} \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{array}$$

$\boxed{\text{Formulació:}}$

$$\begin{array}{ll}
\min \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(f_{ij}y_{ij}+c_{ij}x_{ij})+ & E_\xi[Q(x,\xi)] \\
\text{s.a.:} & \downarrow \\
\left.\begin{array}{l} y_{ij}\in\{0,1\} \\ x_{ij}\geq 0 \\ x_{ij}\leq My_{ij}\end{array}\right\} \begin{array}{l} i=1,2 \\ j=1,2\end{array} & Q(x,\xi)=\min\sum_{j=1}^{2}(p_ju_j+o_jv_j) \\
 & \text{s.a.:}\quad \sum_{i=1}^{2}x_{ij}+u_j-v_j=\xi_j \quad j=1,2 \\
 & \qquad \left.\begin{array}{l} u_j\geq 0 \\ v_j\geq 0\end{array}\right\} j=1,2
\end{array}$$

M és una constant gran (en particular, $M\geq \max\{\max\{\xi_1\},\max\{\xi_2\}\}$)

(b)

$\boxed{K_1}$ $K_1=\{(x_{ij},y_{ij})\ \ i=1,2\quad j=1,2 \mid y_{ij}\in\{0,1\},\ x_{ij}\geq 0,\ x_{ij}\leq My_{ij}\}$

$\boxed{K_2}$ $K_2\ \Rightarrow$ Com que podem suposar que ξ_1, ξ_2 tenen moments de 2n ordre finits, i tenim un problema de recurs fix (W fix), llavors $K_2=K_2^P$, on $K_2^P=\forall\xi_1\xi_2K_2(\xi_1,\xi_2)$ i

$$K_2(\xi_1,\xi_2)=\{(x_{ij},y_{ij})\mid \sum_{i=1}^{2}x_{ij}+u_j-v_j=\xi_j\quad u_j,v_j\geq 0\}=\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$$

[ja que sempre podem trobar $u_j,v_j\geq 0$ que satisfacin $\sum_{i=1}^{2}x_{ij}+u_j-v_j=\xi_j$.]

Llavors $K_2^P=\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$ i $K_2=\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Tipus recurs}}$ Es tracta d'un problema de recurs complet, i a més, de recurs simple ($W=[\,1\quad -1\,]$).

$\boxed{\mathcal{Q}(x)}$ Donat que es tracta d'un problema de recurs simple, on la única component aleatòria correspon al terme de la dreta (ξ_1,ξ_2), tenim directament que:

$$\mathcal{Q}(x)=\sum_{j=1}^{2}\mathcal{Q}_j(x)\quad \text{On}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_j(x)=\ & p_jE[\xi_j(\xi)]-(p_j-(p_j+o_j)F_j(\sum_{i=1}^{2}x_{ij}))(\sum_{i=1}^{2}x_{ij})- \\ & -(p_j+o_j)\int_{\xi_j(\xi)\leq\sum_{i=1}^{2}x_{ij}}\xi_j(\xi)f_j(\xi_j(\xi))d\xi_j(\xi)\qquad j=1,\ldots,2\end{aligned}$$

On

$$\xi_1(\xi)\ \text{Uniforme}[10,15]\Rightarrow f_1(\xi_1)=\frac{1}{5},\ F_1(\xi_1)=\frac{\xi_1-10}{5},\ E[\xi_1]=\frac{25}{2}$$
$$\xi_2(\xi)\ \text{Uniforme}[12,17]\Rightarrow f_2(\xi_2)=\frac{1}{5},\ F_2(\xi_2)=\frac{\xi_2-12}{5},\ E[\xi_2]=\frac{29}{2}$$

Llavors tenim:

$$\mathcal{Q}_1(x) = \frac{25}{2}p_1 - \left[p_1 - (p_1+o_1)\left[\frac{\sum_{i=1}^{2} x_{ij} - 10}{5} \right] \right] - (p_1+o_1)\int_{\xi_1 \leq \sum_{i=1}^2 x_{i1}} \xi_1 \frac{1}{5} d\xi_1 =$$

$$\left[\begin{array}{l} \int_{\xi_1 \leq \sum_{i=1}^2 x_{i1}} \xi_1 \frac{1}{5} d\xi_1 = \frac{1}{5}\int_{10}^{\sum_{i=1}^2 x_{i1}} \xi_1 d\xi_1 = \frac{1}{5}\left[\frac{\xi_1^2}{2} \right]_{10}^{\sum_{i=1}^2 x_{i1}} = \\ = \frac{1}{5}\left[\frac{\left[\sum_{i=1}^2 x_{i1}\right]^2}{2} - \frac{100}{2} \right] = \frac{\left[\sum_{i=1}^2 x_{i1}\right]^2}{10} - 10 \end{array} \right]$$

$$= \frac{25}{2}p_1 - \left[p_1 - (p_1+o_1)\left[\frac{\sum_{i=1}^{2} x_{ij} - 10}{5} \right] \right] - (p_1+o_1)\left[\frac{\left[\sum_{i=1}^2 x_{i1}\right]^2}{10} - 10 \right]$$

Fent un desenvolupament similar per a $\mathcal{Q}_2(x)$:

$$\mathcal{Q}_2(x) = \frac{29}{2}p_2 - \left[p_2 - (p_2+o_2)\left[\frac{\sum_{i=1}^{2} x_{i2} - 12}{5} \right] \right] - (p_2+o_2)\left[\frac{\left[\sum_{i=1}^2 x_{i2}\right]^2}{10} - \frac{144}{10} \right]$$

(c)

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 = \begin{cases} 15 & \text{si } p = 0.5 \\ 16 & \text{si } p = 0.5 \end{cases} \\ \xi_2 = \begin{cases} 13 & \text{si } p = 0.2 \\ 16 & \text{si } p = 0.8 \end{cases} \end{array}\right\} \text{Considerant } (\xi_1, \xi_2) \text{ tenim 4 possibles escenaris:}$$

$$s_1 \rightarrow \begin{cases} \xi_1^{s_1} = 15 \\ \xi_2^{s_1} = 13 \\ p_{s1} = 0.5 * 0.2 = 0.10 \end{cases} \qquad s_3 \rightarrow \begin{cases} \xi_1^{s_3} = 15 \\ \xi_2^{s_3} = 16 \\ p_{s1} = 0.5 * 0.8 = 0.4 \end{cases}$$

$$s_2 \rightarrow \begin{cases} \xi_1^{s_2} = 16 \\ \xi_2^{s_2} = 13 \\ p_{s2} = 0.5 * 0.2 = 0.10 \end{cases} \qquad s_4 \rightarrow \begin{cases} \xi_1^{s_4} = 13 \\ \xi_2^{s_4} = 16 \\ p_{s2} = 0.5 * 0.8 = 0.4 \end{cases}$$

Ara repliquem les variables de 2a etapa u_j, v_j per a cada escenari ($u_j^s, v_j^s, s = s_1, \ldots, s_4$) i formulem el següent problema lineal enter:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(f_{ij}y_{ij} + c_{ij}x_{ij}) + \sum_{s=s_1}^{s_4} p_s \left[\sum_{j=1}^2 (p_j u_j^s + o_j v_j^s) \right] \\ \text{s.a.:} & \left.\sum_{i=1}^2 x_{ij} + u_j^s - v_j^s = \xi_j^s \right\} \begin{array}{l} j = 1,2 \\ s = s_1, \ldots, s_4 \end{array} \\ & \left.\begin{array}{l} y_{ij} \in \{0,1\} \\ 0 \leq x_{ij} \leq M y_{ij} \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{array} \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ll} \min & cx + \mathcal{Q}(x) \\ \text{s.a.:} & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c = ? \\ o = 1 \quad p = 2 \\ m = 10 \quad M = 15 \quad \xi \sim U[m, M] \end{array}$$

$$\mathcal{Q}(x) = E_\xi(Q(x,\xi)) \quad \text{On} \quad Q(x,\xi) = \begin{cases} o(x-\xi) & \text{si } x > \xi \\ p(\xi - x) & \text{si } x < \xi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(x) = E_\xi(Q(x,\xi)) &= \int_\xi Q(x,\xi)f(\xi)d\xi = \int_m^x o(x-\xi)\frac{1}{M-m}d\xi + \int_x^M p(\xi-x)\frac{1}{M-m}d\xi = \\
&= \frac{1}{M-m}\,[\,\textstyle\int_m^x oxd\xi - \int_m^x o\xi d\xi + \int_x^M p\xi d\xi - \int_x^M pxd\xi\,] = \\
&= \frac{1}{M-m}\left[\,ox(x-m) - o\frac{x^2}{2} + o\frac{m^2}{2} + p\frac{M^2}{2} - p\frac{x^2}{2} - px(M-x)\,\right] = \\
&= \frac{1}{M-m}\left[\,ox^2 - oxm - o\frac{x^2}{2} + o\frac{m^2}{2} + p\frac{M^2}{2} - p\frac{x^2}{2} - pxM + px^2\,\right] = \\
&= \frac{1}{M-m}\,[\,x^2\,[\,\frac{o+p}{2}\,] - x(om+pM) + \left[\,\frac{om^2+pM^2}{2}\,\right]\,] =
\end{aligned}$$

El problema és ara:

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) = cx + \mathcal{Q}(x) \qquad \text{Derivem } f(x) \text{ i igualem a } 0: \\ &\text{s.a.:} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$f'(x) = c + \mathcal{Q}'(x) = c + \frac{1}{M-m}\,[\,(o+p)x - (om+pM)\,] := 0$$

Solució: $\boxed{x = \frac{(om+pM) - c(M-m)}{o+p}}$

Substituint els valors:

$$x = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 - c(15-10)}{1+2} = \frac{40-5c}{3}$$

Imposant que $x = 11$ tenim que $11 = \frac{40-5c}{3} \Rightarrow c = \frac{40 - 3 \cdot 11}{5}$

$$\boxed{c = \frac{7}{5} = 1.4} \quad \text{milers d'euros per Mb/s}$$