TRANSMISSIÓ ÒPTIMA DE MISSATGES EN UN ESQUEMA DE "ROUTING" DE CIRCUIT VIRTUAL

Jordi Castro
Universitat Politècnica de Catalunya
Departament d'Estadística i Investigació Operativa.

1. Presentació del problema.

Els algorismes o estratègies de *routing* (enrutament, encaminament) són els responsables de fer arribar els diferents paquets de missatges que continuament són enviats per Internet. A grosso modo aquests algorismes poden classificar-se en dues grans categories: *routing* dinàmic (també conegut amb el nom de *datagrames*) i *circuit virtual*. El primer sistema és el que actualment més s'està usant en Internet. En ell els paquets no tenen una ruta predefinida, i dinàmicament es decideix quin serà el següent node j de la xarxa on s'enviarà un paquet que es troba al node actual i. En aquest node i tindrem, de fet, una cua de paquets esperant ser enviats. Aquest sistema té l'avantatge d'aprofitar molt la capacitat de la línia de transmissió. Entre els seus inconvenients destaquem, en primer lloc, que els paquets han de portar la informació del seu node destí, el qual augmenta la mida del paquet. El segon gran inconvenient d'aquest sistema és que no és apropiat per transmetre els grans volums d'informació associats amb fitxers multimèdia, els quals acostumen a incloure audio o video.

Els sistemes de circuit virtual, per la seva banda, estableixen un camí abans d'iniciar la transmissió de les dades. Tots els paquets seguiran aquell camí durant tota la sessió. Aquests sistemes semblen ser una alternàtiva vàlida al de datagrames quan convé enviar grans volums de dades amb un temps de resposta elevat (per a video, per exemple). En aquesta pràctica considerarem una extensió d'aquest sistema, de forma que en establir la sessió permetrem que pugui determinar-se més d'una ruta entre el node emissor i el receptor (sistema multi-ruta). Les dades es distribuiran per les diferentes rutes. D'aquesta forma millorarem la resposta de la xarxa, ja que evitarem que fitxers de dades grans hagin de passar per una única línia. Això evitarà la saturació de línies. L'objectiu d'aquesta pràctica consisteix en intentar formular i solucionar un problema que ens proporcioni els camins o rutes òptimes en un esquema de *routing* d'aquestes característiques.

2. Modelització del problema.

2.1. Model bàsic.

En general una xarxa de transmissió pot representar-se com un graf $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, on $\mathcal{N}$ representa un conjunt de nodes, i $\mathcal{A}$ un conjunt d'arcs no-orientats que uneixen aquests nodes. Considerem una xarxa tan senzilla com la de la Figura 1, on $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ i $\mathcal{A} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. En aquest cas es vol enviar el fitxer F de 10 Mbytes del node 1 al node 4. Els valors sobre els arcs indiquen la seva capacitat c_{ij} de transmissió en nombre de Mbytes per segon, on i i j fan referència als dos nodes que són units pels arcs. Aquesta capacitat pot ser tant la capacitat màxima dels arcs, com la que aquests tenen actualment perquè ja estan ocupades les línies enviant altres missatges. Considerarem, a més, que els paquets tant poden circular del node i al j com a l'inrevès (xarxa sense orientació als arcs). El flux que circula entre els nodes i i j es denotarà per x_{ij}. Si $x_{ij} > 0$, el sentit dels paquets serà del node i al j; si $x_{ij} < 0$, els paquets aniran de j cap a i.

Si féssim passar el fitxer F de la Figura 1 seguint la ruta $\{(1, 2), (2, 4)\}$ tindríem que

$$x_{12} = 10, x_{13} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 10, x_{34} = 0.$$

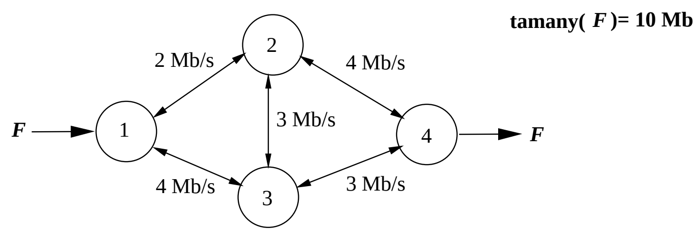

Figura 1. Xarxa de transmissió senzilla de 4 nodes.

El temps que tardaran els 10 Mb en ser enviats pot calcular-se com

$$\begin{aligned} & \max\{|x_{ij}|/c_{ij}, (i,j) \in \mathcal{A}\} \\ = & \max\{10/2, 10/4\} = 5 \text{ segons}, \end{aligned} \tag{1}$$

El valor absolut a $|x_{ij}|$ cal perquè podem trobar valors negatius, els quals ens indiquen que els paquets van del node j al node i. En aquest cas la línia (1,2) està funcionant com un coll d'ampolla (*bottleneck*). Fixem-nos que, en realitat, el temps d'espera seria superior al valor anterior de 5 segons, donat que hauríem de comptar el temps que tarda en propagar-se el missatge per cada línia. Llavors, després d'haver enviat els 2 darrers Mb del node 1 al node 2 (que correspondria a l'instant de temps 5 segons), encara hauríem d'esperar-nos a que aquests passessin per la línia (2,4) (1 segon més). A la pràctica, però, i per simplificar el model, considerarem que el temps total de transmissió ve determinat pel valor de l'expressió (1). Aquest valor és el temps que tarden les dades per passar per l'arc més congestionat (el coll d'ampolla).

El problema a solucionar per tal de trobar el temps mínim de transport pot ser formulat com:

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}} \quad & \max_{\forall x_{ij}} \left\{ \frac{|x_{ij}|}{c_{ij}} \right\} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k|(j,k)\in\mathcal{A}} x_{jk} = -b_j \quad \forall j \in \mathcal{N} \end{aligned} \tag{2}$$

El problema (2) intenta trobar el *routing* que minimitza la màxima congestió als arcs de la xarxa (el coll d'ampolla). Tenim una restricció per a cada node de la xarxa. Aquestes restriccions ens indiquen que tot el que entra al node j més tot el que surt ha de ser igual a $-b_j$. El valor de b_j ens indica l'entrada o sortida de paquets que hi ha en aquell node. Els valors negatius indiquen que es tracta d'un node receptor. Els valors positius corresponen a nodes emissors. I el valors zero s'associen a nodes que únicament reben i transmeten paquets. Per exemple, a la xarxa de la Figura 1 tindríem que

$$b_1 = 10, \quad b_2 = b_3 = 0, \quad b_4 = -10.$$

2.2. Transformació a un problema de programació lineal.

Els problemes amb l'estructura de (2) s'anomenen min-max (minimitzar un màxim de valors) i sovint requereixen de tècniques específiques de resolució. En aquest cas, però, podem formular-lo com un problema lineal fent les següents transformacions. En primer lloc, podem eliminar l'estructura min-max introduint una variable nova artificial y, tal com segueix:

$$\begin{aligned} \min_{x_{ij}} \quad & y \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i|(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{k|(j,k)\in\mathcal{A}} x_{jk} = -b_j \quad \forall j \in \mathcal{N} \\ & y \geq \frac{|x_{ij}|}{c_{ij}} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{aligned} \tag{3}$$

Al problema (3) intentem minimitzar una variable y que ha de ser major que tots els valors $|x_{ij}|/c_{ij}$. Com que estem minimitzant y, aquesta serà igual al màxim d'aquests valors. Aquestes restriccions si volem les podem reescriure situant totes les variables a l'esquerra com

$$y - \frac{|x_{ij}|}{c_{ij}} \geq 0 \qquad \text{o} \qquad c_{ij}y - |x_{ij}| \geq 0. \tag{4}$$

Podem usar indistintament qualsevol d'aquestes dues formulacions.

El problema (3) no és lineal per culpa del valor absolut de les variables ($|x_{ij}|$) Com podem eliminar aquest valor absolut? Doncs podem considerar que cada arc x_{ij} sense orientació de la xarxa es divideix en dos arcs orientats: un anirà del node i al j i el denotarem per x^+_{ij}; l'altre del j al i, i el denotarem per x^-_{ij}. Ara els arcs x^+_{ij} i x^-_{ij} prendran sempre valors positius, i evitem el tractar amb les variables anteriors x_{ij} que tant podien ser positives com negatives, segons cap a on enviessin el flux. El flux en valor absolut $|x_{ij}|$ que passa per un arc pot ser ara escrit com $x^+_{ij} + x^-_{ij}$. Fixem-nos que a la pràctica per l'arc (i, j) que sigui el coll d'ampolla només s'enviarà flux en un sentit de l'arc (és a dir, només una de les variables x^+_{ij} o x^-_{ij} serà diferent de 0, com a màxim). Això es veu clarament observant la Figura 2. En el cas (a) tenim que l'arc que uneix els nodes i i j ha de transmetre un total de 8 unitats (suposem Mb), on $x^+_{ij} = 5$ i $x^-_{ij} = 3$. Observem, però, que podríem haver considerat un *routing* millor si haguéssim considerat que $x^+_{ij} = 2$ i $x^-_{ij} = 0$, tal i com mostra la Figura 2(b). En ambdòs casos el que surt i arriba als nodes i i j és el mateix, però al cas (b) hem saturat molt menys l'arc que uneix els dos nodes. Per tant, si aquest arc fos el coll d'ampolla del problema, en fer l'optimització del problema, hauríem obtingut la solució de la Figura 2(b). Si aquest arc no fos el coll d'ampolla, però, la solució proporcionada per l'algorisme d'optimització podria haver estat com la de la Figura 2(a), sense modificar-nos el temps màxim de transmissió. Aquesta multiplicitat de solucions es deu a l'existència d'òptims alternatius en aquest model. Si trobem una solució on per un arc determinat $x^+_{ij} > 0$ i $x^-_{ij} > 0$ (com a la Figura 2(a)), sempre podem transformar-la a posteriori en una altra on $x^+_{ij} = 0$ o $x^-_{ij} = 0$ assignant a l'arc orientat que té el flux major la diferència entre els dos arcs orientats i fent l'altre zero (com a la Figura 2(b)).

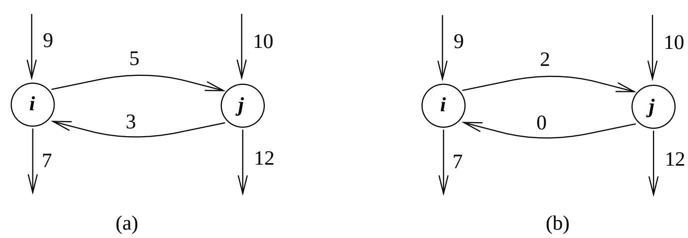

Figura 2. Dos possibilitats d'utilitzar l'arc entre els nodes i i j.
(a) Fluxos positius en els dos sentits.
(b) Fluxos positius en només un sentit .

El problema que finalment hauríem d'optimitzar seria:

$$\begin{aligned}
\min_{x^+_{ij}, x^-_{ij}} \quad & y \\
\text{s.a} \quad & \left(\sum_{i|(i,j)\in\mathcal{A}} x^+_{ij} + \sum_{i|(j,i)\in\mathcal{A}} x^-_{ji} \right) - \left(\sum_{k|(j,k)\in\mathcal{A}} x^+_{jk} + \sum_{k|(k,j)\in\mathcal{A}} x^-_{kj} \right) = -b_j \quad \forall j \in \mathcal{N} \\
& c_{ij}y - (x^+_{ij} + x^-_{ij}) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \\
& x^+_{ij} \geq 0,\ x^-_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Les primeres restriccions de (5) ens indiquen que tot el que entra a un node menys tot el que surt ha de ser igual a l'entrada/sortida de paquets en aquest node. Per exemple, per al nodes 1, 2 i 4 de la Figura 1, les equacions corresponents serien:

$$\begin{aligned} (x_{12}^- + x_{13}^-) - (x_{12}^+ + x_{13}^+) &= 10 \quad &[\text{node } 1] \\ (x_{12}^+ + x_{23}^- + x_{24}^-) - (x_{12}^- + x_{23}^+ + x_{24}^+) &= 0 \quad &[\text{node } 2] \\ (x_{24}^+ + x_{34}^+) - (x_{24}^- + x_{34}^-) &= -10 \quad &[\text{node } 4] \end{aligned}$$

Les segones restriccions de (5) corresponen als canvis introduïts a (4). Finalment trobem els límits de les variables, on s'indica que ara totes han de ser no-negatives, donat que són arcs orientats.

Si solucionem el problema de la Figura 1 usant la formulació (5) obtenim el resultat mostrat a la Figura 3 (o un alternatiu amb el mateix valor de funció objectiu).

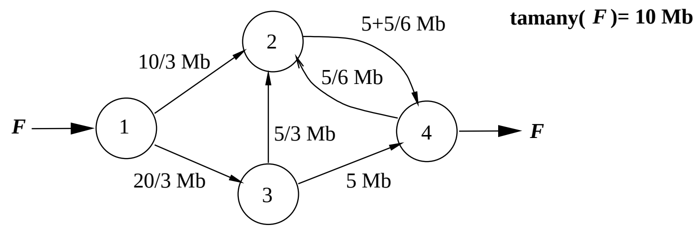

Figura 3. Solució del problema de la Figura 1 usant la formulació (5).

El valor òptim de la funció objectiu és $y^* = 5/3$ segons, i correspon al temps de transmetre 10/3 Mb per l'arc (1,2) que té una capacitat de 2 Mb/s. A posteriori podríem realitzar un postprocés per tal d'evitar que les variables x_{ij}^+ i x_{ij}^- associades al mateix arc siguin les dues positives. Això només passa en aquest cas a l'arc $(2,4)$, on $x_{ij}^+ = 5 + 5/6$ i $x_{ij}^- = 5/6$. Després del postprocés tindríem que $x_{ij}^+ = 5 + 5/6 - 5/6 = 5$ i $x_{ij}^- = 0$.

2.3. Extensió del model: múltiples orígens per a un fitxer.

Una extensió directa del nostre model consisteix en considerar que un fitxer es troba en diferents nodes, tal i com mostra la Figura 4. El conjunt de diferents nodes origen el denotarem per $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \{i \in \mathcal{N} | \text{ el fixer pot ser recuperat des del node } i\}. \tag{6}$$

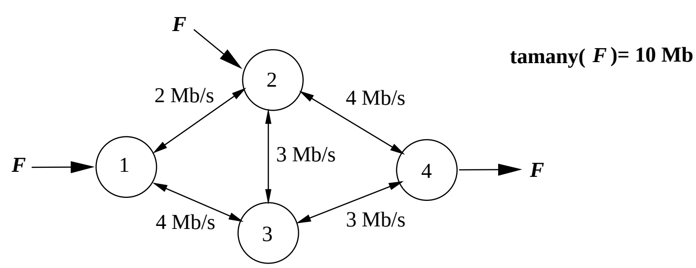

Figura 4. Xarxa de transmissió senzilla amb múltiples orígens per al fitxer F.

A la Figura 4, per exemple, tenim que $\mathcal{O} = \{1, 2\}$. En aquestes situacions la solució òptima pot indicar que de cada origen només s'ha de subministrar una part del fitxer. D'aquesta forma pot reduir-se el temps de transport associat a l'arc coll d'ampolla. Aquesta nova situació pot tractar-se estenent la xarxa de la Figura 4 mitjançant l'addició d'un node 0 fictici. Aquest node, però, no es considerarà un element del conjunt de nodes original $\mathcal{N}$ de la xarxa de transmissió. La nova situació es representa a la Figura 5. Per a tot node origen $i \in \mathcal{O}$ tenim un nou arc x_{0i}. Aquests arcs són orientats (només van de 0 a i) i representen la quantitat de F subministrada per cada origen.

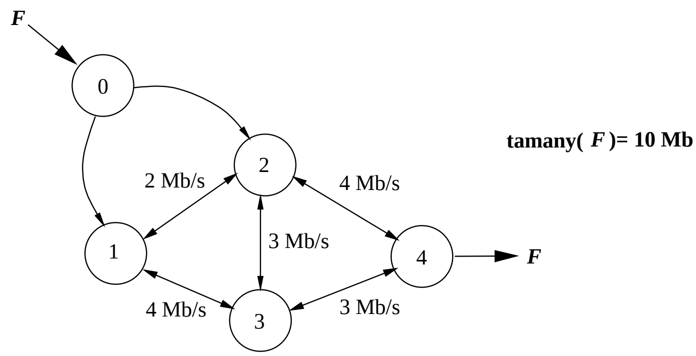

Figura 5. Xarxa de transmissió senzilla amb múltiples orígens, amb la inclusió del node fictici 0.

Si representem per $|F|$ el tamany del fitxer F i denotem per n_r el node receptor (per exemple, $|F| = 10$ Mb, i $n_r = 4$ a la Figura 5), l'extensió de la formulació (5) per tal de considerar el problema amb múltiples orígens pot ser escrita com

$$\begin{aligned}
&\min_{x_{0i}, x^+_{ij}, x^-_{ij}} \quad y \\
&\text{s.a} \sum_{i|(i,j)\in\mathcal{A}} x^+_{ij} + \sum_{i|(j,i)\in\mathcal{A}} x^-_{ji} - \sum_{k|(j,k)\in\mathcal{A}} x^+_{jk} - \sum_{k|(k,j)\in\mathcal{A}} x^-_{kj} = \begin{cases} -x_{0j} & \text{si } j \in \mathcal{O} \\ |F| & \text{si } j = n_r \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad \forall j \in \mathcal{N} \\
&\sum_{i\in\mathcal{O}} x_{0i} = |F| \\
&c_{ij} y - (x^+_{ij} + x^-_{ij}) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \\
&x^+_{ij} \geq 0,\ x^-_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \qquad x_{0i} \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{O}.
\end{aligned} \tag{7}$$

L'equació $\sum_{i\in\mathcal{O}} x_{0i} = |F|$ representa el balanç de fluxos al node fictici 0 que hem creat. En aquest cas obtindríem la solució de la Figura 6, que té un temps de transport de 1.4286 segons (o una alternativa amb el mateix temps).

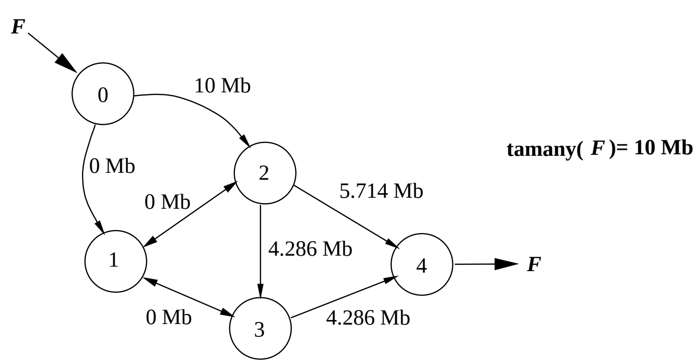

Figura 6. Solució del problema de la Figura 5 usant la formulació (7).

2.4. Cas particular a solucionar.

El problema que s'haurà de solucionar usarà la xarxa de la Figura 7. Aquesta topologia correspon a la de l'Arpanet, xarxa precursora de l'actual Internet, apareguda cap als anys 70. Suposarem que haurem de transportar un fitxer de entre 100 i 200 Mb des d'un conjunt de nodes origen fins el node 21.

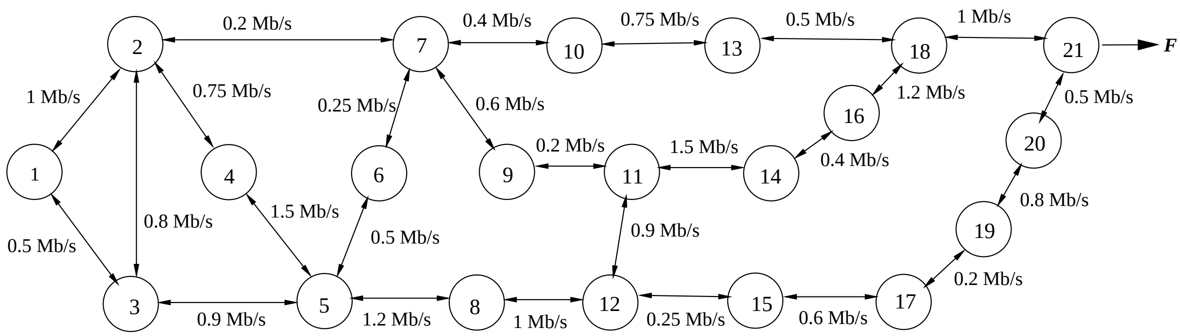

Figura 7. Topologia de l'Arpanet, una de les primeres xarxes de comunicacions, creada als anys 70.

Es demana que feu les següents tasques:

1) Escolliu un subconjunt de 3 nodes qualsevol del conjunt de nodes $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Aquest seran els vostres nodes emissors, i tots ells tindran còpies del fitxer que voleu enviar al node 21.
2) Escolliu a l'atzar la dimensió del fitxer que voleu enviar dels nodes emissors al 21. La dimensió ha de ser un enter entre 100 i 200 Mb.
3) Formuleu i solucioneu el problema d'optimització amb l'ajut de Lindo o Lingo. És recomanable usar Lingo, altrament el nombre de variables del problema us pot desbordar si el formuleu amb Lindo.
4) Feu un postprocés com el presentat a la Figura 2.
5) Entregueu un document amb:

   a) Indicació del nombre de variables i restriccions que té el vostre problema.
   b) El codi Lindo o Lingo que heu programat, indicant l'acord que heu seguit en donar nom a les diferents variables i restriccions del problema.
   c) La solució del vostre problema proporcionada per Lindo o Lingo. Marqueu els arcs que fan de coll d'ampolla.
   d) Una gràfica com la de la Figura 7 on es representi la solució que heu obtingut.
   e) Justificació usant la solució proporcionada per Lindo o Lingo de que el problema té òptims alternatius.
   f) Una gràfica com la de la Figura 7 on es representi la solució que heu obtingut després del postprocés.
   g) Comprovació (usant Lindo o Lingo) de que la solució obtinguda després de fer el postprocés és un òptim alternatiu al que originalment havíeu obtingut. Indiqueu com heu fet aquesta comprovació i proporcioneu la sortida proporcionada per Lindo o Lingo.