Pràctica 3. Comportamiento de la cola M/M/1.

Objetivo: Se dispone de una muestra de los tiempos entre llegadas a un S.E. y de los tiempos de servicio del servidor de este S.E. En ambos casos el tamaño de la muestra es de 1000 observaciones. Se sabe que corresponden a distribuciones exponenciales de tiempo. Se pretende simular mediante el programa `CUES.jar` el comportamiento de un S.E. comparando las magnitudes L, Lq, W, Wq obtenidas mediante la simulación con los que proporciona la teoría de colas.

1. Introducción al S.E. M/M/1

A menudo se presenta la situación en la que los elementos de una población o clientes solicitan cada uno de ellos, en instantes de tiempo diferentes un servicio determinado que es ofrecido por un único servidor que puede atender tan sólo a un cliente a la vez, de forma que los clientes deban esperar a ser atendidos. En caso de que los tiempos t_a entre las peticiones de servicio sean distribuidos exponencialmente con $E[t_a]=1/\lambda$ y el tiempo de t_s servicio esté distribuido también exponencialmente con $E[t_s]=1/\mu$ el sistema podrá representarse mediante el S.E. M/M/1

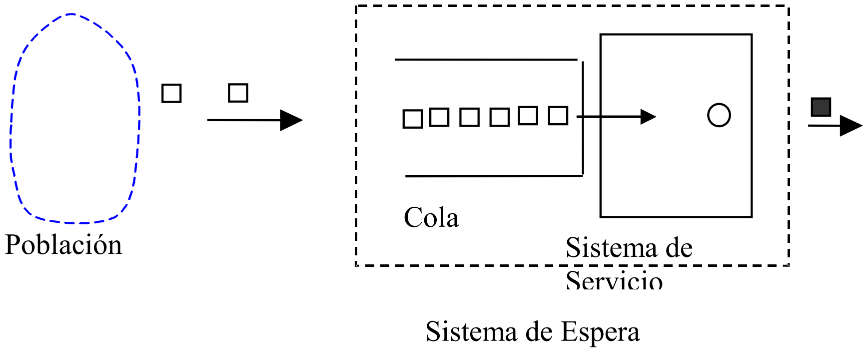

Figura 1. Componentes de un S.E. M/M/1.

El número de clientes en el S.E. no incrementará indefinidamente en el tiempo siempre que el cociente $\rho = \lambda / \mu$ entre la tasa temporal de peticiones y la tasa temporal de servicios que puede satisfacer el servidor sea estrictamente inferior a 1. En caso contrario se observará un comportamiento como el que se muestra en la figura 2.

2. Fórmulas para el S.E. M/M/1. ($\rho = \lambda / \mu < 1$)

P_0 = Fracción del tiempo que el S.E. está vacío. Probabilidad de encontrar el S.E. vacío
P_n = Fracción del tiempo que el S.E. aloja n clientes. Probabilidad de encontrar n clientes en el S.E.
L = Número medio de clientes en el S.E., L_q = Número medio de clientes en la cola.
W = Tiempo medio de permanencia en el S.E. por cliente.
W_q = Tiempo medio de permanencia en la cola per cliente.

$$P_0 = 1 - \rho \,, \qquad (1) \qquad\qquad P_n = \rho^n \cdot P_0 \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

$$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \qquad (3) \qquad\qquad W = L / \lambda \qquad (4)$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}, \qquad (5) \qquad\qquad W_q = L_q / \lambda \qquad (6)$$

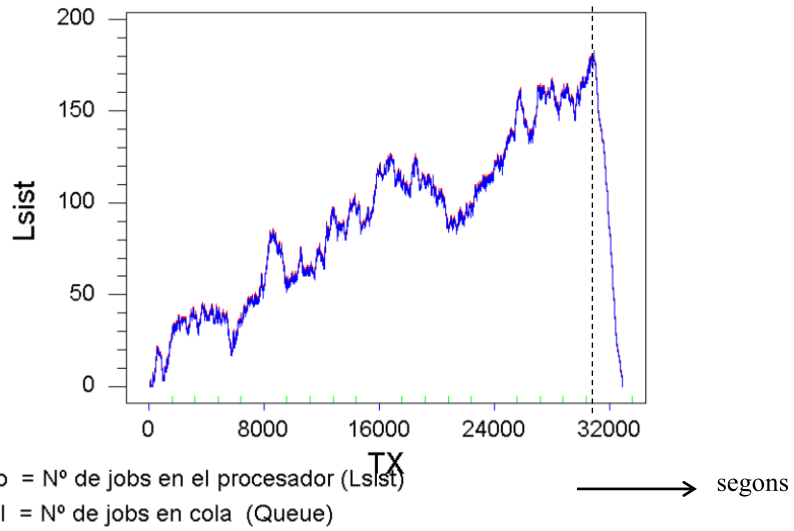

Figura 2. Caso $\rho = \lambda / \mu \geq 1$. Resultado de la simulación de un S.E. M/M/1 en que la tasa de llegadas de clientes λ és igual o superior a la tasa de servicio μ del servidor. En abscisas, tiempo, en ordenadas, número de clientes en el S.E.

3. Simulación del S.E. M/M/1.

Podéis utilizar el programa CUES.jar o bien el módulo de simulación de la suite Qts_Plus. Tras hacer doble click sobre el ejecutable se activará la ventana de la izquierda; abrid ‘Arxiu’ y elegid ‘Paràmetres del Model` para introducir los valores de la cola M/M/1. Si queréis repetir la simulación con una semilla diferente, escoged ‘Arxiu -> llavor’ en la pantalla de la izquierda.

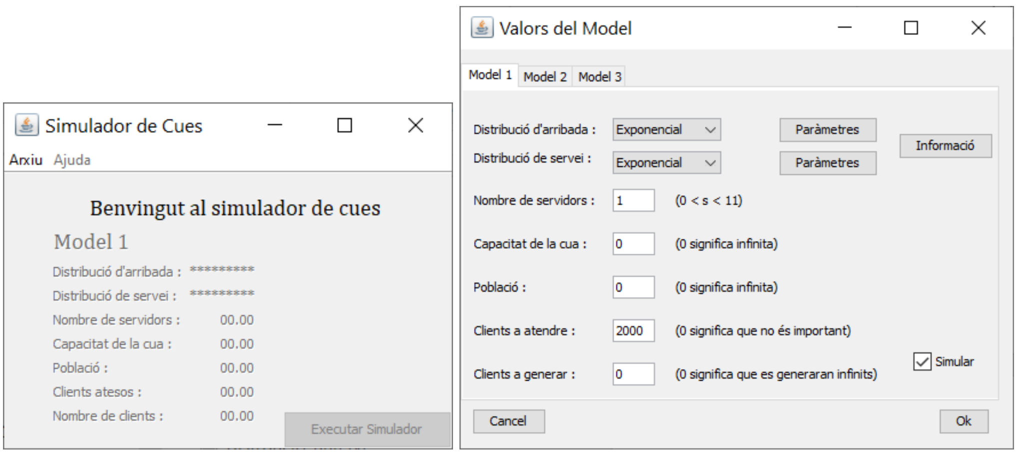

Figura 3. Pantallas iniciales de CUES.jar

4. Presentación de resultados del programa CUES.jar

Adicionalmente a mostrar por pantalla los gráficos correspondientes a las figuras 4 a 7, el programa genera en el directorio mismo donde se ubica el ejecutable, los ficheros `W.txt`, `Wq,txt`, `arribades.txt`, `serveis.txt`, `probabilitats.txt`, que contienen para los clientes generados por el simulador: tiempos en el S.E., tiempos en cola, tiempos entre llegadas y tiempos de servicio. El fichero probabilitats.txt contiene una estimación de las probabilidades de estado estacionario.

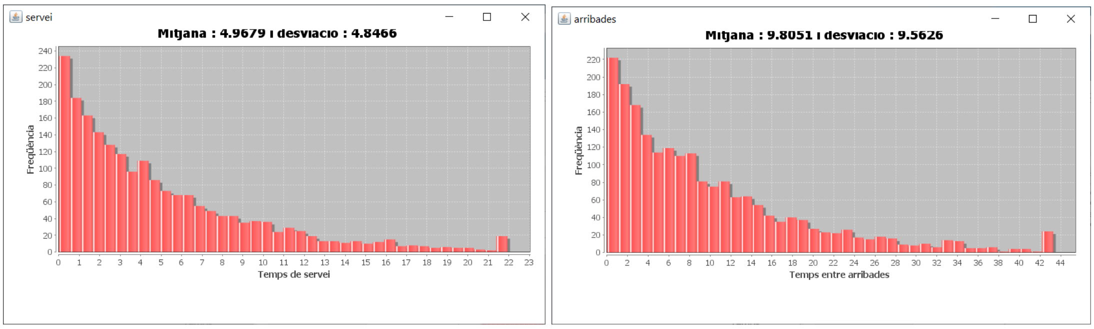

Figura 4. Histogramas de tiempos entre llegadas y de tiempos de servicio. (el pico final acumula el resto de observaciones de la cola de la muestra)

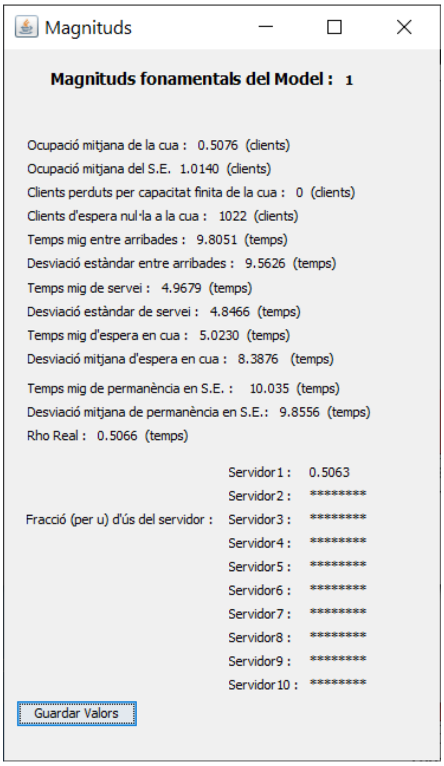

Figura 5. Pantalla de resumen de resultados de la simulación.

Ofrece valores medios y desviaciones estándar de los procesos de llegada y de servicio (que coinciden con lo reportado en los histogramas de la figura 4 anterior).

También proporciona valores medios y desviaciones estándar de los tiempos de permanencia y de espera en cola y de las ocupaciones del S.E. y de la cola.

Prestad atención al valor de Rho Real (la obtenida por simulación) que debe permanecer <1.

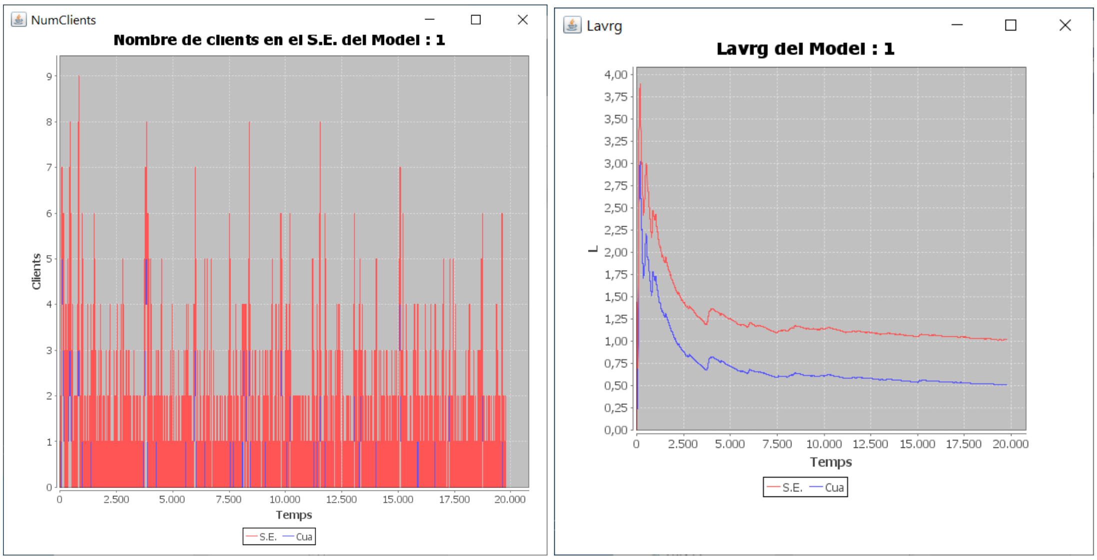

Figura 6. Comportamiento del S.E. M/M/1.

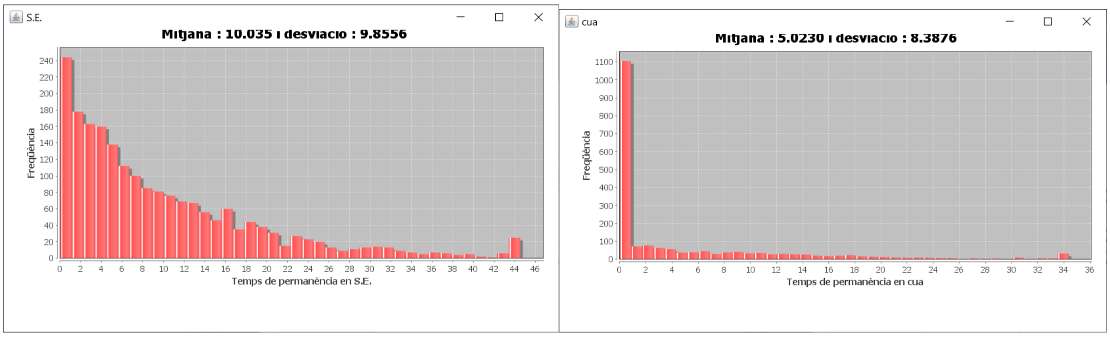

Figura 7. Histogramas de los tiempos de permanencia en el S.E: y de los tiempos de espera en cola; el pico inicial recoge los clientes que no esperan (o muy poco) por encontrar la cola vacía.

Práctica 3. CUESTIONARIO.

Nombre y Apellidos 1: **Curso:**
Nombre y Apellidos 2: **Fecha:**

Fichero para el proceso de llegadas: (Nota: la práctica puede realizarse también con el módulo de simulación de Qts_xcel, si bien es preferible CUES.jar)

1 Adoptad como tiempos entre llegadas y tiempos de servicio unos que sean exponencialmente distribuidos y con el mismo valor medio que el de vuestras muestras, si éstas no provenían de una distribución exponencial. Para los valores de λ, μ y de ρ estimados mediante la muestra, calculad los valores para las magnitudes del S.E. M/M/1:

$$P_0 = 1 - \rho \,, \qquad (1)$$

$$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\,, \qquad (3) \qquad\qquad W = L / \lambda \qquad (4)$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}\,, \qquad (5) \qquad\qquad W_q = L_q / \lambda \qquad (6)$$

2 Ejecutad CUES.jar (2000 clientes o más si es necesario) y comparad los valores para Po, L, W y Wq con los obtenidos en el apartado anterior.

3 ¿Se ha estabilizado el valor para Lsistavg?; ¿qué indica?

4. Repetid los apartados 1 y 2 anterior aumentando λ para que el factor de carga ρ alcance el valor 0.95 a) con 2000 clientes, b) con los clientes que creáis de forma que se alcance una estimación de las magnitudes L_q, L, W_q, W con igual precisión que en el apartado 2.

5 Para los casos en los apartados 2 y 4b), a qué distribución de probabilidades obedecen las muestras obtenidas de los tiempos de permanencia en el sistema w y los tiempos de espera en cola de los clientes que han esperado (variable $(w_q|w_q>0)$). Analizad los ficheros que proporciona el programa `CUES.jar` (`W.txt`, `Wq.txt`). Si usáis `Qts_xcel` entonces calculad la cola con la opción M/M/1 y analizad la pestaña `TimeDsitributionChart`.
Calculad: $P_r(w \geq 2/\mu)$, $P_r(w_q \geq 2/\mu)$, $P_r((w_q|w_q>0) \geq 2/\mu)$.

6 En caso de que las muestras que os han asignado sean ambas exponenciales, adoptad como proceso de llegades una k-Erlang (k > 1) con igual esperanza que el de la muestra assignada para las llegades. En caso contrario, mantened para los processos de llegada y servicio las distribuciones de las muestras que os han asignado. Utilizad ahora el programa CUES.jar para efectuar una simulación de una cola G/G/1 con las distribuciones correspondientes. Obtened mediante este programa los valores Po, L, W y Wq etc. anteriores. ¿A qué atribuís las diferencias respecto a los valores obtenidos en el apartado 4?

(escoged k = NIUB mod 10)