CURS 2016-17 Q2- Teoria de Cues i Simulació
Grau Interuniversitari d'Estadística UB-UPC
1er Examen Parcial

PART 2. Problema 1 (10 punts)

En una mina a l'aire lliure, hi ha ben a prop un moll de transport amb capacitat perquè només hi atraqui un únic vaixell de càrrega. Donada la gran demanda d'aquest mineral sempre hi ha vaixells fondejats a prop de forma que, en acabar de ser carregat un i salpar, immediatament un altre ocupa el seu lloc. Les unitats de transport del mineral entre la mina i el port són 50 camions enormes (de 400Tn) i només 2 d'ells poden ser descarregats a la vegada en el vaixell; si n'hi ha més d'un llavors ha de fer cua i són descarregats per ordre d'arribada. Cada camió treballa cíclicament entre la mina i el port i ha d'efectuar les següents operacions: a) tornar a la mina un cop ha descarregat, b) repostar combustible, c) carregar mineral, d) anar al port i e) descarregar el mineral transportat en el vaixell. En les operacions a)+d) el temps és de 4 hores (i aproximadament constant), en l'operació b) el temps necessari està distribuït exponencialment amb esperança 1h i en l'operació c) el temps està distribuït exponencialment amb esperança 20hores. Finalment en l'operació e) (descàrrega) és necessari un temps exponencialment distribuït d'esperança 50 minuts. Se suposa funcionament continu les 24h del dia.

a) [2,5p] Establiu un model de cues pels camions que esperen al port a poder ser descarregats als vaixells. Describiu les hipòtesis en les que descansa el vostre model; calculeu el factor de càrrega de la cua en qüestió i la probabilitat de trobar-la buida.
b) [1,5p] Calculeu quina és la probabilitat que tenen el camions de tenir d'esperar a ser descarregats.
c) [1p] Calculeu el nº mig de camions en espera per a ser descarregats al port i el temps mig que un camió està al port.

Es planteja la possibilitat de incloure una zona d'aparcament per un d'aquests camions gegants i s'estima que el temps en que permaneixeran aparcats segueix la llei de probabilitat donada per la seva funció de densitat:

f(t) = 2 t si 0<= t <= 1hora, f(t) = 0 si t > 1hora.

d) [1p] quin és el temps mig que ocupen la plaça.?
e) [1p] Quina és la probabilitat per a un camió que acaba d'arribar de que estigui al menys ½ hora.
f) [1.5p] Si un camió porta ja ½ hora aparcat quin és el temps mig que encara continuarà aparcat?
g) [1.5p] Un camió arriba a la plaça de pàrquing i se la troba ocupada i no té informació de quan va arribar l'ocupant de la plaça. Quin és el temps mig que haurà d'esperar en fer cua per ocupar la plaça? Quina és la probabilitat de que esperi més de 20 minuts?

a) Suposem que tots 50 camions estiguessin sempre a la mina. Cada un d'ells està a la mina + la carretera un temps $a+d = 4$ hores (ctant), $b = 1h$, $c = 20h$

$a+d+b+c = 25$ hores en promig, el servei és un temps x exponencialment distribuït, $E[X] = 5/6\,h.$; 2 servidors

Pel teorema de Palm, la mina es comportarà com una font exponencial amb $\lambda = 50/25\ h^{-1} = 2\,h^{-1}$

$\rho = \frac{2}{2\cdot 6/5} = \frac{10}{12} = 5/6 < 1$ una M/M/2, $\theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$$P_0 = \left[\sum_{l=0}^{1} \frac{\theta^l}{l!} + \frac{\theta^s}{s!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = \left[1 + 5/3 + (5/3)^2\, 6/2\right]^{-1} = 1/11$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "2"] & 1 \arrow[l, bend left, "6/5"] \arrow[r, bend left, "2"] & 2 \arrow[l, bend left, "12/5"] \arrow[r, bend left, "2"] & 3 \arrow[l, bend left, "12/5"] \arrow[r, bend left, "2"] & 4 \arrow[l, bend left, "12/5"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$P_1 = G\cdot P_0 = \frac{2}{6/5}\cdot\frac{1}{11} = \frac{10}{66} = 0'\overline{15}$$

b) $$1 - P_0 - P_1 = \sum_{l=2}^{\infty} P_l = \text{probabilitat d'esperar} = 0'\overline{75}$$

c) $$C(s,\theta) = \frac{(5/3)^2\cdot 6/2}{1 + 5/3 + (5/3)^2\, 6/2} = 0'\overline{75} \qquad (= 1 - P_0 - P_1)$$

$$L_q = C(s,\theta)\frac{\rho}{1-\rho} = 0'\overline{75}\cdot 5 = 3'\overline{78} \text{ camions}$$

$$W_q = L_q/\lambda = \frac{3'\overline{78}}{2} = 1'8939\ h$$

$$W = 1'8939 + 5/6 = 2'72 \rightarrow L = W\cdot\lambda = 5'45 \text{ camions}$$

Aproximaríem millor el sistema si adoptéssim

$$\lambda' = (50 - 5'\overline{45})/25 = 1'7818\ h^{-1},\quad \theta' = \frac{1'7888}{6/5} = 1'48$$

$$\rho' = \theta'/2 = 0'74\overline{24}$$

$$C(s,\theta) = \frac{1'48^2/2\ \frac{1}{1-0'74\overline{24}}}{1 + 1'48 + \frac{(1'48)^2}{2}\frac{1}{1-0'74\overline{24}}} = 0'63267$$

$$L_q = 0'63267\ \frac{0'74\overline{24}}{1-0'74\overline{24}} = 1'82 \text{ camions} \rightarrow L = 3'308 \text{ camions.}$$

etc. (procés iteratiu).

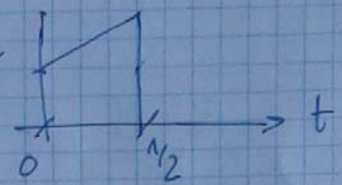
a) $E[Z] = \frac{2}{T^2}\int_0^T t^2\,dt = \frac{2}{T^2}\,\frac{t^3}{3}\Big]_0^T = 2/3\,T \qquad (T = 1h.)$

b) $P(Z \geq 1/2) = R_Z(1/2) = 3/4$

$F_Z(t) = (t/T)^2$ si $t \leq T$, $F_Z(t) = 1$ si $t > T$.

$R_Z(t) = 1-(t/T)^2$ si $0 \leq t \leq T$, $= 0$ si $t > T$

c) $f_{S|\theta}(t) = \dfrac{f_Z(t+\theta)}{R_Z(\theta)} = \quad \theta = 1/2$



$$\begin{cases} \frac{4}{3}(1+2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & t > 1/2 \end{cases}$$

$$E[S|\theta] = \frac{4}{3}\int_0^{1/2}(1+2t)\,t\,dt = \frac{4}{3}\left(\frac{t^2}{2}\Big]_0^{1/2} + 2\,\frac{t^3}{3}\Big]_0^{1/2}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = 0'2\overline{7}\,h$$

$= 16'2$ min.

d) $f_r(t) = \dfrac{R_Z(t)}{E[Z]} = \frac{3}{2}(1-t^2), \quad 0 \leq t \leq 1h$

$$E[r] = \frac{1}{E[Z]}\int_0^1 (1-t^2)\,t\,dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right)\Big]_0^1 =$$

$= 3/8\,h$

$$P(r \geq 1/3) = 1 - \int_0^{1/3} f_r(x)\,dx = 1 - \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big]_0^{1/3} =$$

$$= 1 - 3/2\left((1/3) - (1/3)^3\,\frac{1}{3}\right) = 1 - 1/2\left(1-(1/3)^3\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\,\frac{26}{27} = 0'\overline{518}$$