INTRODUCCIÓ ALS MODELS NO EXPONENCIALS I XARXES DE CUES

- **INTRODUCCIÓ A LES XARXES DE CUES.**
  Concepte de xarxa oberta i tancada.
  Xarxes obertes i Teorema de Jackson.
- **MODELS NO EXPONENCIALS**
  Cua M/G/1: Fòrmula de Pollaczeck-Khintchine.
  Cua G/M/1: casos Ek/M/1, Hip/M/1, Hyp/M/1.
  Ús de QTS_EXCEL.
- **APROXIMACIONS PER A CUES GI/G/s.**
  Aproximació d'Allen-Cuneen.
  Aproximacions per a cues congestionades (Heavy Traffic)

XARXES DE CUES EXPONENCIALS

- **Sistemes de cues exponencials formant una xarxa de muntatge de ordenadors o cotxes, per exemple.**

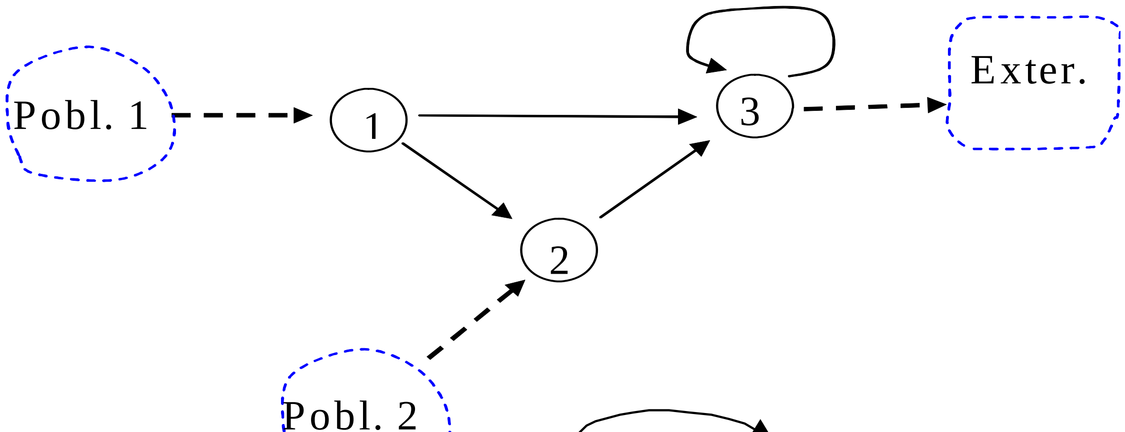
- **Podem considerar dos tipus de xarxes de S.E.:**

  a) OBERTES. reben entrades de clients procedents de una o varies poblacions externes i que tenen sortides cap a l'exterior;.

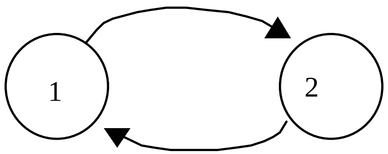
  b) TANCADES. No reben entrades de poblacions externes ni tenen sortides a l'exterior. Número constant de clientes circulant dins de la xarxa.

Exemple.

Xarxa oberta de S.E.



Exemple. Sistema M/M/s/./N:



Xarxes Obertes. Teorema de Jackson

- **Condicions sota les que les xarxes obertes de S.E. presenten propietats per efectuar una anàlisis per descomposició.**

1. **El S.E. (nodo) i té un número de servidors s_i de característiques idèntiques entre sí. Els temps de servei de cada servidor tenen distribució exponencial de probabilitats amb capacitat individual de servei μ_i.**
2. **La capacitat de la cua en cada S.E. és il·limitada.**
3. **Els clients que han estat servits en el nus i es reparteixen entre els nusos $j \in E(i)$, emergents del i i, amb probabilitats $p_{ij} > 0$ constants al llarg de tota l'evolució del sistema.**
4. **el temps associat a l'arc (i,j) és zero.**

- **Si totes les arribades externes estan distribuïdes poissonianament i es verifiquen les condicions anteriors llavors s'anomenen *xarxes de Jackson* i sobre elles pot aplicar-se el resultat del teorema de Jackson (1957) .**

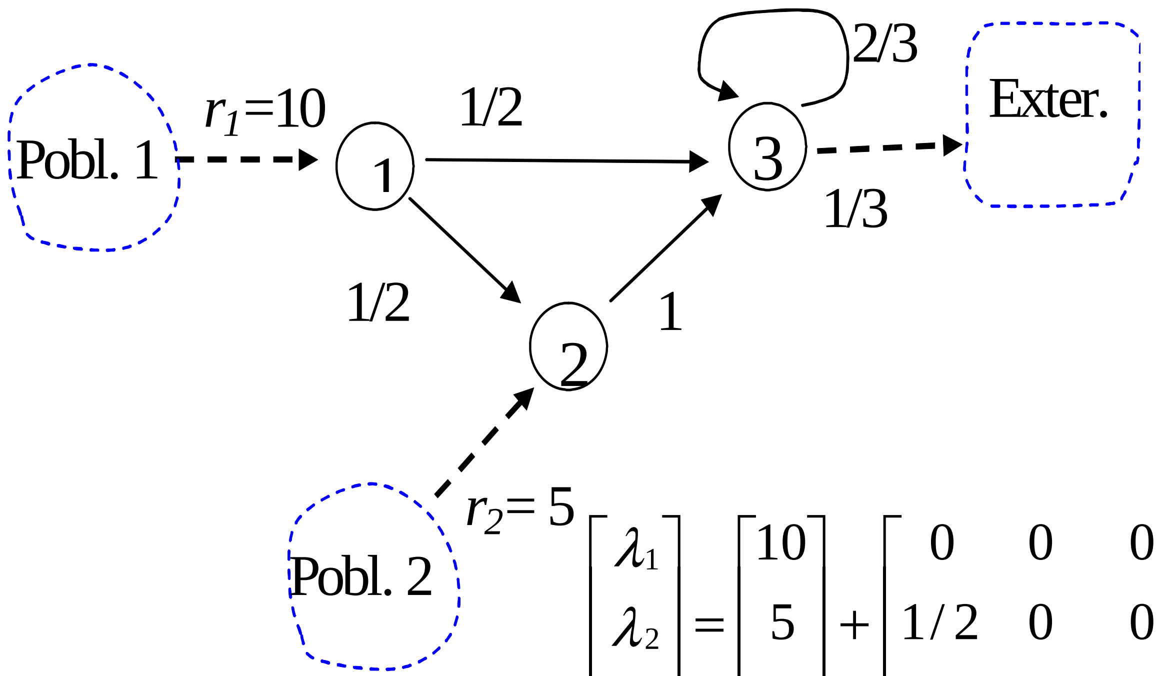
Teorema de Jackson. **Segui una xarxa oberta de S.E. verificant les condiciones per a la descomposició anteriors, amb solucions del sistema:**

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{ij} \quad j = 1, \ldots, N$$

tals que $\lambda_i < s_i \cdot \mu_i$ **per a tot S.E. *i=1,…,N.***

Llavors cada S.E. es comporta com una cua M/M/s_i amb entrades de clientes con taxa λ_i **i que presentarà en estat estacionari una distribució de probabilitats pròpia de les cues M/M/s i independent de la dels altres sistemes dins de la xarxa.**

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{N1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1N} & p_{2N} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 5\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}\rightarrow\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 1 & 0\\ -1/2 & -1 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 5\\ 0\end{bmatrix}\right.$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 10\\ \lambda_2 &= 5+1/2\,\lambda_1\\ \lambda_3 &= 1/2\,\lambda_1+\lambda_2+2/3\,\lambda_3\end{aligned}\quad\rightarrow\quad\left\{\begin{aligned}\lambda_1 &= 10\\ \lambda_2 &= 10\\ \lambda_3 &= 45\end{aligned}\right.$$

- Per tant les xarxes de Jackson exhibeixen de la propietat que la distribució de probabilitats del número de clients en una estació *i* y el número mig de clients en la estació es pot calcular tractant l'estació *i* como un modelo M/M/s_i amb taxa d'arribades λ_i i taxa de servei per servei μ_i.

- El procediment d'anàlisis consisteix en els següents punts:

1. Estableix la matriu d'incidències entre nusos, **P,** constituïda per la probabilitat p_{ij} de cada possible transició de nus.
2. Resoldre el sistema de equacions lineal: $\underline{\lambda} = \mathbf{r} + \underline{\lambda} \cdot \mathbf{P}$.
3. Verificar que $\lambda_i < s_i \cdot \mu_i$ para *i=1,…,N.*
4. El número de clientes total en la xarxa, L_{Total}, és la suma dels clientes en cada estació de servei: $L_{Total} = \sum_{i=1}^{N} L_i$.

5. El temps esperat de permanència al sistema es $W = \frac{L_{Total}}{\lambda}$ on $\lambda = \sum_{i=1}^{N} r_i$ és el número mig de clients que arriben des de l'exterior al sistema per unitat de temps.

Exemple. Es vol dimensionar la xarxa de S.E. anterior i es disposa de servidors con taxa individual de servei $\mu = 12$. Determinar en cada nus el número mínim de servidors de forma que la xarxa de S.E. presenti estat estacionari i calcular les demores mitjanes en tots els S.E. de la xarxa.

Se sap que les entrades als S.E. 1, 2 i 3 són respectivament: 10, 10, 45. Per tant:

1. Per al nus 1, si $s_1 = 1$, $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 = 10/12 < 1$.
2. Per al nus 2, si $s_2 = 1$, $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2 = 10/12 < 1$.
3. Per al nus 3, cal dotar-lo de $s_3 = 4$ servidors i llavors $\rho_3 = \lambda_3/(s_3 \cdot \mu_3) = 45/(4 \cdot 12) < 1$.

Els nusos 1 i 2 amb un sol servidor són cues de tipus M/M/1 amb les mateixes taxes d'entrada:

$$L_1 = L_2 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 5, \quad W_1 = W_2 = \frac{L_1}{\lambda_1} = 1/2 \qquad P_0 = 1 - \rho_1 = 1 - 10/12 = 1/6;$$

El nus 3 es comporta com una cua M/M/4:

Si $\theta=\lambda_3/\mu_3$ =45/12 llavors:

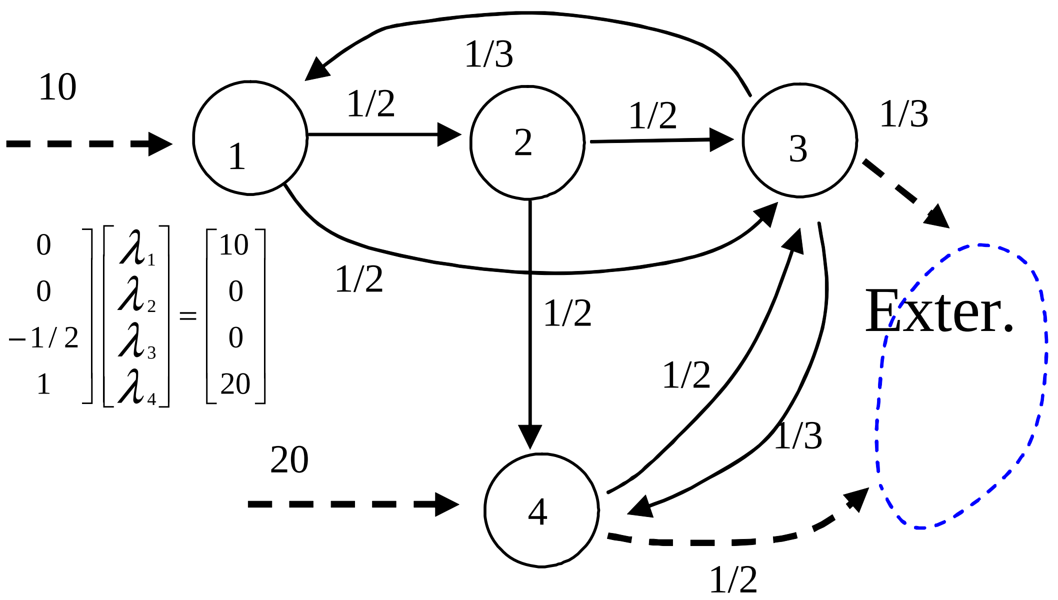
$$P_0 = \left[1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{4!}\theta^4 \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i \right]^{-1} = \left[20{,}57+\frac{1}{4!}\left(\frac{45}{12}\right)^4 \cdot 16 \right]^{-1} = 0{,}006561$$

Exemple

Es disposa de servidors amb taxa de servei $\mu=8$. Per a la xarxa determinar:

a) El número mínim de servidors en cada sistema de espera de forma que s’arribi a l’estat estacionari.

b) La taxa de sortida de clients a l’exterior per als S.E. 3 i 4.



$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/3 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/3 & 0\\ -1/2 & 1 & 0 & 0\\ -1/2 & -1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & -1/2 & -1/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21{,}53\\ 10{,}76\\ 34{,}84\\ 36{,}92\end{bmatrix}$$

Per tant, per al sistema d'espera 1 són necessaris 3 servidors, per al nus 2, 2 servidors, per al nus 3 són necessaris 5 servidors i per al nus 4, 5 servidors.

Les sortides a l'exterior per al nus 3 = 34,84/3=11,61333.

Les sortides per al nus 4 = 36,920/2=18,46.

- Per al nus 1, ρ = 0,89708 $\theta=\lambda_1/\mu$ = 21,53/8 = 2,69125

$$P_0 = \left[1+\theta+\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{3!}\theta^3\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i \right]^{-1} = 1/38{,}9=0.02572$$

- Per al nus 2, $\rho = \lambda_2/2\mu$ = 10,76/16=0,6725 , $\theta=\lambda_2/\mu$ = 1,345

$$L_q = \frac{P_0\theta^2\rho}{2!(1-\rho)^2} = 1.11 \qquad W = \frac{L_q}{\lambda_2}+\frac{1}{\mu} = 0{,}2282$$

El model M/G/1

Els S.E. que responen a model M/G/1 són aquelles que:

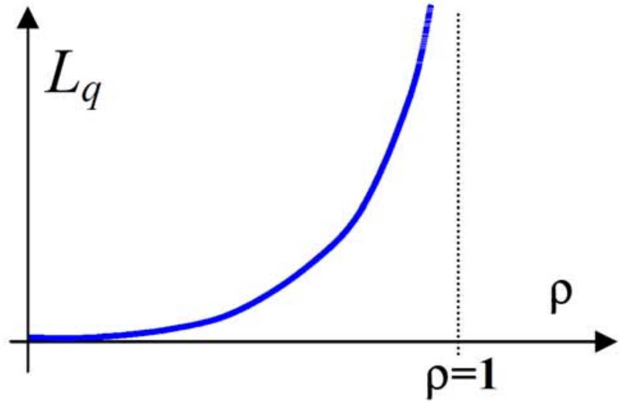
- **Les arribades segueixen un procés de Poisson amb taxa constant i igual a λ i són i.i.d.**
- **Els temps de servei obeeixen a una distribució de probabilitat comuna qualsevol i són i.i.d, d'esperança $1/\mu$ i variança σ^2**
- **Hi ha un únic servidor al sistema.**

Per aconseguir que s'arribi a l'estat estacionari n'hi ha prou amb que el factor de càrrega sigui < 1. (ρ <1)

$$P_0 = 1 - \rho$$

La fórmula de Pollaczek-Khintchine determina l'esperança matemàtica de la longitud de cua en règim estacionari: L_q

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \left(1+\mu^2\sigma^2\right)\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$



A partir de las fórmules de Little s'obtenen la resta de magnituds, *L, W, W_q*.

La fórmula reflecteix la influència de la dispersió dels temps de servei (variança σ^2) en el comportament del S.E.:

A major σ^2, major serà la longitud mitjana de cua L_q a igualtat de ρ i λ

Cas particular M/M/1, tenemos $\sigma^2 = 1/\mu^2$ i la fórmula de Pollaczek-Khintchine es converteix en,

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\cdot \lambda^2 / \mu^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

coincidint amb el resultat trobat anteriorment.

➡ **Cas particular M/E$_k$/1: la distribució dels tempos de servei és Erlang de paràmetres k y μ = 1/E[x], sa variança és 1/(kμ^2) , i en aplicar la fórmula de Pollaczek-Khintchine:**

$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\cdot \lambda^2 / k\mu^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k}\frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

- **En el cas M/D/1**, la distribució dels temps de servei és constant, de mitjana $1/\mu$ unitats de temps (μ serveis per unitat de temps) y variança $\sigma^2 = 0$, la fórmula de Pollaczek-Khintchine determina l'expressió de la longitud mitjana de la cua com,

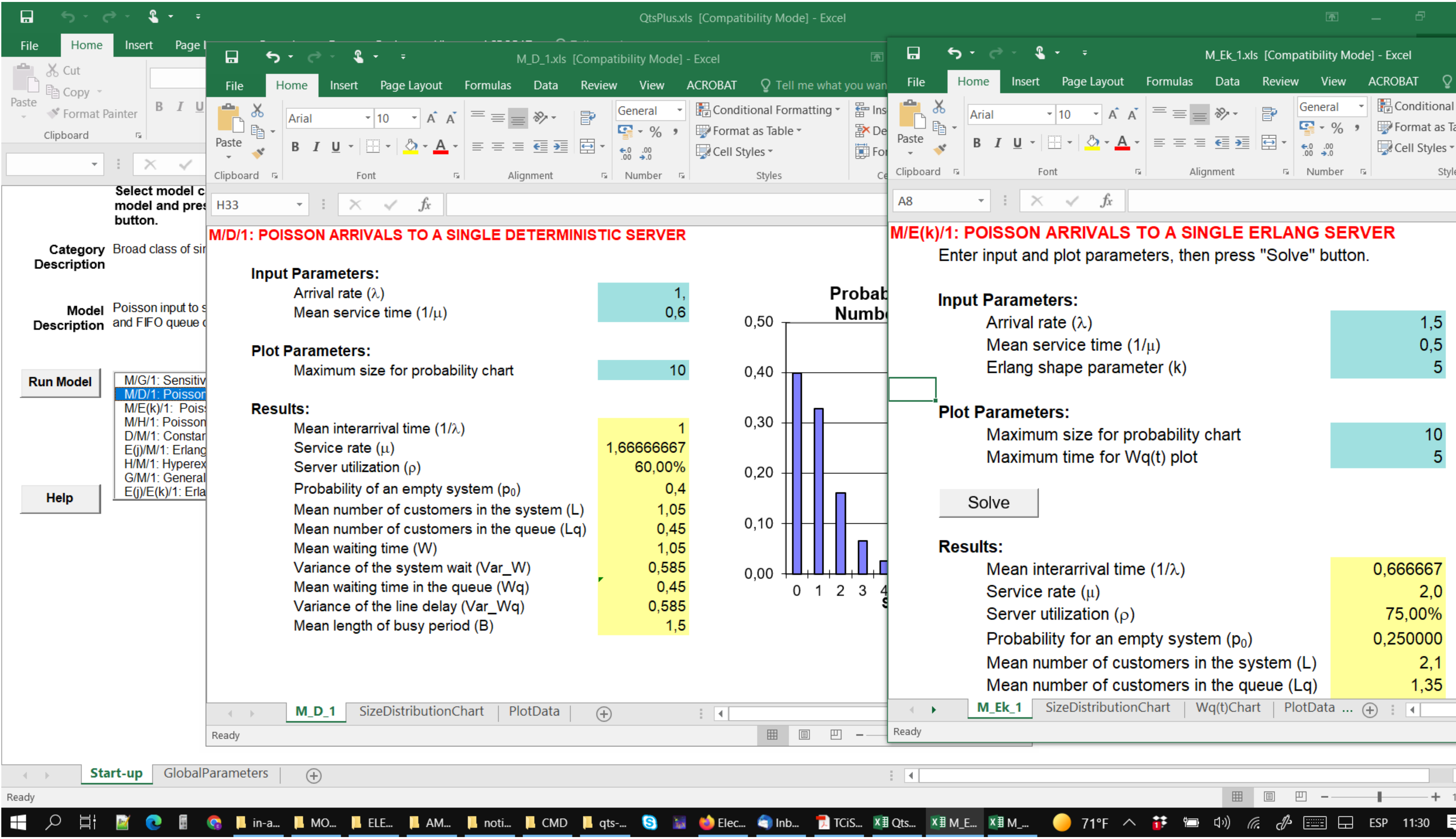
$$L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$$

$$\begin{array}{ccccc} L_q & \leq & L_q & \leq & L_q \\ D & & E_k & & M \end{array}$$

Universitat de Barcelona

UPC

QTS_EXCEL: CASOS M/Ek/1, M/D/1



Fórmula d'aproximació d'Allen-Cuneen

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}[\tau]}, \ \mu = \frac{1}{\mathrm{E}[x]}, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = 1 - \epsilon$$

$$\sigma_\tau^2 = \mathrm{Var}[\tau], \ \sigma_x^2 = \mathrm{Var}[x]$$

Exacta per a M/M/s, M/G/1

Per a qualsevol sistema GI/G/s es verifica:

$$\boxed{\mathrm{E}[w_q] = W_q \approx \frac{C(s,\theta)(\lambda^2\sigma_\tau^2 + \mu^2\sigma_x^2)}{2s\mu(1-\rho)}}$$

$$C(s,\theta) = P_{M/M/s}(N \geq s) = \frac{\frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}}{\sum_{\ell=0}^{s-1}\frac{\theta^\ell}{\ell!} + \frac{\theta^s}{s!(1-\rho)}}, \quad \theta = \frac{\lambda}{\mu}$$

APROXIMACIÓ DE LA CUA GI/G/s

Condicions properes a la saturació: "heavy traffic"

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{E}[\tau]}, \ \mu = \frac{1}{\mathrm{E}[x]}, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = 1 - \epsilon$$

$$\sigma_\tau^2 = \mathrm{Var}[\tau], \ \sigma_x^2 = \mathrm{Var}[x]$$

Teorema de Köllerström.

Per a la cua GI/G/s, w_q (v.a. temps d'espera en cua) segueix una distr. aprox. exponencial i:

$$\mathrm{E}[w_q] = W_q \approx \frac{\lambda(\sigma_\tau^2 + \frac{1}{s}\sigma_x^2)}{2(1-\rho)} \rightarrow L_q = \frac{\lambda^2\sigma_\tau^2 + \rho^2\mu^2\sigma_x^2}{2(1-\rho)}$$