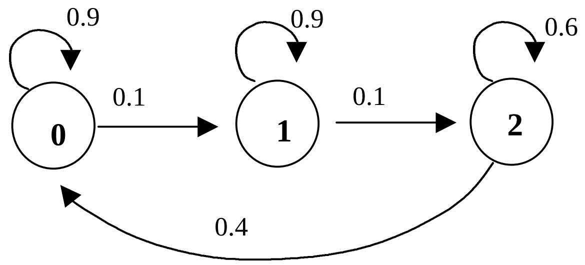
EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curso 01/02 2º Q). Cadenas de Markov

P1) El técnico de reparaciones de una compañía desempeña su labor desplazándose al domicilio de los clientes que tienen contratado servicio de mantenimiento. Los estados que describen su actividad son los siguientes: estado 0: ocioso y a la espera de la llamada de un cliente; estado 1: desplazándose hacia el domicilio del cliente y estado 2: ejecución propiamente de la reparación en el domicilio del cliente. Tras efectuar una reparación se supone que vuelve a pasar al estado 0 inmediatamente. Una modelización posible de la evolución de los estados viene dada por la siguiente cadena de Markov:



en la que cada transición equivale a un período de tiempo de 1 día.

Se pide:
1) Clases y periodicidad de la cadena que modeliza la labor del técnico.
2) Fracción del tiempo total que se destina a la tarea propiamente dicha de reparación.
3) Tiempo medio hasta el inicio de la siguiente reparación contado desde el final de la última reparación.
4) Debido a la dureza del trabajo se sabe que uno de cada diez técnicos abandonan el trabajo en mitad de una reparación. Calcular la esperanza del tiempo de permanencia en la empresa de un técnico que acaba de entrar cuando en el momento de la incorporación no hay ninguna reparación pendiente de ser realizada.

EXAMEN FINAL DE I.O.E. (Curso 01/02 2º Q). Teoría de Colas.

P1) Un determinado proceso productivo depende del funcionamiento de un componente. El tiempo entre avería y avería que este componente presenta se distribuye exponencialmente con esperanza de 2 días. Tras *k* averías se produce la rotura definitiva del componente y éste debe ser reemplazado definitivamente por uno nuevo. Cuando no hay componentes disponibles para efectuar la sustitución entonces el proceso debe detenerse. Los técnicos de producción han tomado una muestra relativa a los tiempos de vida de un número elevado de componentes (5000) y han obtenido las siguientes estadísticas básicas:

```
Variable           N        Mean      Median      TrMean       StDev    SE Mean
t_vida          5000      19,826      19,262      19,590       6,186      0,087

Variable     Minimum     Maximum          Q1          Q3
t_vida         4,006      48,484      15,467      23,445
```

Por otra parte las irregularidades del suministro hacen que en la práctica el tiempo entre dos entregas consecutivas de un componente sea aleatorio y se distribuya exponencialmente. La fábrica dispone de un almacén que puede contener un número ilimitado de componentes de repuesto. Con bastante exactitud los técnicos han determinado que la fracción del tiempo que el proceso productivo está detenido es del 10,78%.

1) Determinar de forma aproximada el valor de *k* y del resto de los parámetros de la ley de probabilidades del tiempo de vida de un componente.
2) Establecer un modelo de colas para el número de componentes (almacén + funcionamiento). Cual es la tasa temporal de llegadas al almacén.
3) Calcular el número medio de piezas en el almacén.
4) Calcular el tiempo medio de permanencia de un componente en el almacén sabiendo que éstos son utilizados según estricto orden de llegada.
5) Calcular la probabilidad de que se tarde más de 40 días en recibir 2 componentes.

Experimentalmente, los técnicos han determinado que la distribución de probabilidades de estado estacionario para el número de piezas en almacen+funcionamiento viene dado por:
Pn = 0.2068 exp(-0.2034*n), si n>=3

6) Para evitar costes de almacenamiento, han construido un nuevo almacén en el que como máximo caben 4 piezas, pudiendo permanecer fuera del mismo una pieza que no encuentre lugar sin deterioro alguno. Determinar la fracción del tiempo que se encuentran piezas extra fuera del almacén.

P2) Un trabajador autónomo consigue trabajos temporales cada 30 días en promedio estando este tiempo distribuido exponencialmente. Una vez ha conseguido uno de estos trabajos la duración del mismo es también aleatoria, distribuida exponencialmente y de duración media 60 días. La retribución obtenida depende del número total de días trabajados en cada contrato, siendo de 100€ diarios. Para los períodos de desempleo tiene contratado un seguro por el cual recibe 50€ por día que esté en paro.

Establecer un modelo de colas para responder a las siguientes cuestiones:

1) Ingresos medios anuales (1 año=365 días)
2) Número medio de contratos anuales.
3) Probabilidad de estar desempleado durante 6 meses o más.

TEORIA de COLAS. PROBLEMA 1.

1)

$\frac{E[T]}{Var^{1/2}[T]} = \sqrt{k} \approx \frac{\overline{T}}{s_T} = \frac{19{,}826}{6{,}186} = 10{,}27$, $\Rightarrow$ k = 10 ó k=11. Dado que el tiempoi medio por etapa es de 2 días, si k=11, entonces el $E[T]$ = 22, mientras que si se toma k=10, entonces $E[T]$ =20. Dado que la muestra es de tamaño 5000 y el valor `SeMean` es de 0,087 es muy poco probable que sea k=11**. Se adopta, pues, *k*=10.**

2) Es un modelo M/E_{10}/1

P_0 = 1 - r = 0,1078 $\Rightarrow$ ρ=0,8922 = $E[T]\,\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow$Tasa de llegadas λ =0,8922/20 = 0,04462 componentes/día.

Desviación del tiempo de servicio : $Var^{1/2}[T] = 2\sqrt{10} = 6{,}324$ *días*

3) $L_q = \frac{s^2 l^2 + r^2}{2(1-r)} = \frac{\left(0{,}04461 \cdot 2 \cdot \sqrt{10}\right)^2 + 0{,}8922^2}{2 \cdot 0{,}1078} = 6{,}1557\,componentes$

4) $L_q = \frac{W_q}{l} = \frac{6{,}1557}{0{,}04461} = 134\,días$

5) Ta = tiempo hasta la segunda llegada se distribuye según 2-Erlang:

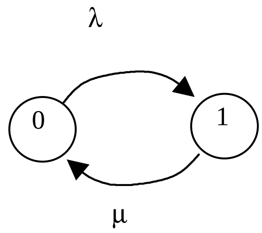
1/μ = $E[Ta]$ = 2/λ = 2/0,04461 = 44,83 dies.

$$P(Ta \geq t) = e^{-mkt} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(mkt)^i}{i!} = e^{-0.04461 \cdot 40}(1 + 1{,}7844) = 0{,}4675 \quad (l = mk;\ 0{,}04461 \cdot 40 = 1{,}7844)$$

6) $P(N \geq 6) = \sum_{n=6}^{\infty} a\,e^{-bn} = a\,e^{-b6} \sum_{n=0}^{\infty} a\,e^{-bn} = \frac{a\,e^{-b6}}{1 - e^{-b}} = 0{,}3316; \quad (a = 0{,}2068,\ b = 0{,}2034)$

P2)(Hay dos enfoques posibles y completamente equivalentes: poblaciuón finita M/M/1/./1 o bien capacidad finita M/M/1/1)

En todo caso el diagrama es:



λ=1/30 μ=1/60

C_1= 60/30=2

P_0=1/(1+2) = 1/3, P1= 2/3

1) 50/3 + 100·2/3 = 83,33 €/día, 30416,6 €/año

2) Número medio de contratos anuales $\overline{\lambda}$=λ P_0 = 1/90 $días^{-1}$

3) P($t_{paro} \geq 6$) = $e^{-180/30}$ = e^{-6} = 2,47 ·10^{-3}

CADENAS DE MARKOV. PROBLEMA 1.

1) cadena aperiódica. 1 classe. Cadena ergódica.

2) $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; **(I - $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$)** p = 0 ; se busca p_2

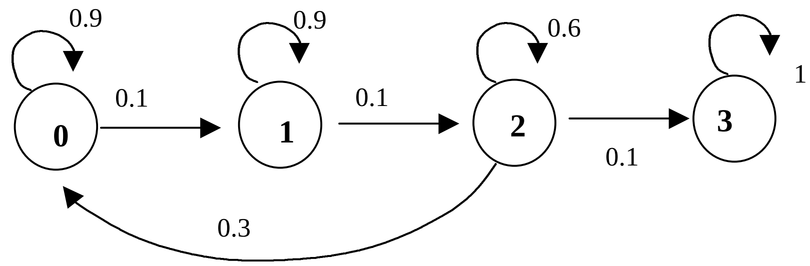
$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & -0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_0 = 0{,}6\,, \quad p_1 = 0{,}0\overset{\frown}{6}\,, \quad p_2 = 1/3$$

3)

$$\begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix};$$ **20 días**

4)



$$\begin{pmatrix} m_{03} \\ m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{03} \\ m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}; \quad m_{03} = 90\ días$$