

Cues $M^{[X]}/E_k^{[V]}/1$. Fòrmula d'aproximació de Powell¹

Implementa l'aproximació de Powell a (*) per una cua $M[X]/E_k[V]/1$ (Bulk arrival - Bulk Service)

Nota: S'ha efectuat en el full de càlcul una correcció en els coeficients a i f

1. Descripció de magnituds:

1. V - v.a. discreta. Capacitat disponible del servidor (i.e. número màxim de clients que podrà servir en arribar al S.E.); Se suposa una capacitat màxima K , de forma que $V \leq K$; $v = E[V]$; $C_v = \sigma_v/v$
2. S - v.a. continua: temps entre dues arribades consecutives d'un servidor (entre dos serveis consecutius). $E[S] = 1/\mu$, $C_s = \mu\sigma_s$
3. τ - v.a. continua: temps entre dues arribades consecutives de paquets de clients. $E[\tau] = 1/\lambda$
4. X - v.a. discreta: número de clients en un paquet. $x = E[X]$; $C_x = \sigma_x/x$.
5. Y - v.a. discreta: número de clients en un cycle.

Número mig de clients arribats en un cycle: $E[Y] = \frac{\lambda x}{\mu}$

Factor de càrrega de la cua $\rho = \frac{\lambda x}{\mu v}$. Estat estacionari si $\rho < 1$.

Es verifiquen les següents relacions:

$$Var[Y] = (\lambda x)^2 Var[S] + \frac{\lambda}{\mu} (Var[X] + x^2); \quad C_Y^2 = \frac{Var[Y]}{E^2[Y]} = C_s^2 + \frac{\lambda}{\mu} (1 + C_x^2)$$

2. Arribades de clients observades pel servidor

El número total mig \tilde{x} de clients arribats observats per paquet és:

$$\tilde{x} = \frac{(x(1 + C_x^2) - 1)}{2}$$

El número total mig \tilde{y} de clients arribats observats per cycle és:

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda x}{\mu} (1 + C_s^2 + \frac{\mu}{\lambda} (1 + C_x^2)) - 1 \right)$$

3. Fòrmula de Powell

3.1. Ocupació màxima en promig

Si \hat{Q} és el valor mig de la cua màxima que es dona (és a dir, la que hi ha tot just abans de què arribi un servidor)

$$\hat{Q} = \frac{v}{2} \left\{ \frac{1 + C_v^2}{1 - \rho} + \frac{\rho^2(C_s^2 - 1)}{1 - \rho} \right\} + \frac{x\rho(1 + C_x^2)}{2(1 - \rho)} + \frac{1}{2} - K + \epsilon(v, \rho) \quad (1)$$

El terme de correcció $\epsilon(v, \rho)$ esdevé important per valors de ρ baixos; val:

$$\epsilon(v, \rho) = a + (f + b\rho + g\rho^2)v + c(\rho v)^{\frac{1}{2}} + eK + d\check{Y}^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a &= -0,4358, & b &= 0,6804, & c &= -0,8862 \\ d &= 0,4155, & e &= 0,9925, & f &= -0,4775, & g &= -0,1892 \end{aligned} \quad (3)$$

(\check{Y} és el moment tercer del número total de clients arribats per cycle i generalment és desconegut).

¹Powell, W.B. "Approximate, Closed form moment formulas for bulk arrival, bulk service queues." Transportation Science, Vol 20, No 1, 1986

3.2. Ocupació mitjana L i demora W per client

$$L = \hat{Q} + \rho v \left\{ \frac{(1 + C_s^2)}{2} - 1 \right\}$$

$$W = \frac{L}{\lambda x} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\hat{Q}}{\rho v} - 1 \right\} + \frac{1}{2\mu} \{1 + C_s^2\}$$

Cal tenir en compte, però que: $\lim_{\rho \rightarrow 0+} \frac{\hat{Q}}{\rho} = v$ i, per tant què, per $\rho \approx 0$ és $W \approx \frac{1}{2\mu} \{1 + C_s^2\}$

3.3. Cua residual aproximada

Valor mig de la cua mínima (valor mig de les cues que queden immediatament després d'anar-se'n el servidor)

$$R_L = L - \frac{\rho v}{2} (1 + C_s^2) \quad (4)$$

a=	-0,5	-0,4358
b=	0,6804	
c=	-0,8862	
d=	0,4155	
e=	-0,0075	
f=	-0,625	-0,4775
g=	-0,1892	

x =
lambda =
mu =
rho =
K =
Cv =
Cs =
Cx =
v =

1
100
0,1
0,6
100
0,5
1
0
50

= grandària mitjana de paquet de pax.
= taxa temporal d'arribades de paquets
= taxa temporal d'arribades de busos
= factor de càrrega
= Capacitat màxima de cada bus
= Coeficient de variació de la capacitat efectiva dels busos
= Coeficient de variació del temps entre arribades dels busos
= Coeficient de variació de la grandària dels paquets de passatgers.
= Capacitat efectiva mitjana dels busos (<= K)
= Igual que l'anterior però calculada d'acord amb x, lambda, mu i el valor fixat de rho
Correccio = -20,34752 =terme de correcció psi de Powell; hi falta el terme corresponent al moment
||Corr/Q1||= 0,25635 3er de Y generalment desconegut

Fixes
Outputs
Inputs

Q1 =	79,37500
Q=	59,02748
L=	59,02748
W=	19,67583

rho	Q	Q1	Corr	Corr/Q1	L	W	Q/rho	W/W0	RL	flux mig.pax.	pax per cycle
0	0,00000	31,75000	-32,50000	1,02362	0,00000	10,00000	41,03574	1,00000	0,00000	0,0000	0,0000
0,1	4,10357	35,27778	-31,17420	0,88368	4,10357	10,00000	41,03574	1,00000	0,00000	0,5000	5,0000
0,2	10,81069	39,68750	-28,87681	0,72760	10,81069	10,81069	54,05345	1,08107	0,81069	1,0000	10,0000
0,3	18,77951	45,35714	-26,57764	0,58596	18,77951	12,51967	62,59835	1,25197	3,77951	1,5000	15,0000
0,4	28,54786	52,91667	-24,36881	0,46051	28,54786	14,27393	71,36965	1,42739	8,54786	2,0000	20,0000
0,5	41,21400	63,50000	-22,28600	0,35096	41,21400	16,48560	82,42800	1,64856	16,21400	2,5000	25,0000
0,6	59,02748	79,37500	-20,34752	0,25635	59,02748	19,67583	98,37914	1,96758	29,02748	3,0000	30,0000
0,7	87,26910	105,83333	-18,56423	0,17541	87,26910	24,93403	124,67015	2,49340	52,26910	3,5000	35,0000
0,8	141,80678	158,75000	-16,94322	0,10673	141,80678	35,45169	177,25847	3,54517	101,80678	4,0000	40,0000
0,9	302,01059	317,50000	-15,48941	0,04879	302,01059	67,11346	335,56732	6,71135	257,01059	4,5000	45,0000
0,95	620,17364	635,00000	-14,82636	0,02335	620,17364	130,56287	652,81436	13,05629	572,67364	4,7500	47,5000
0,975	1255,48903	1270,00000	-14,51097	0,01143	1255,48903	257,53621	1287,68106	25,75362	1206,73903	4,8750	48,7500

