FIB

Departament d'Estadística i Investigació Operativa

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

UPC

Probabilitat i variables aleatòries Exemples i exercicis

Bloc A – Probabilitat i Estadística

2024

Índex

Exemples i exercicis d’experiències aleatòries
Exemple Lecture Notes
Exemples i exercicis d’arbres, taules i independència
Exemple Moneda
Exercici Aeroport (probs facturació i embarcament)
Exercici Aeroport (probs facturació i control passaport)
Exemple Memòria Cache i Altres aplicacions
Exemple Moneda (VAD)
Exercici Aeroport (variables de viatgers i temps)
Exemple Quantils en VAD i VAC
Exercici 3 Bits (VAD, parell de VAD, indicador Cov i Cor)
Exemple parell de VAD amb Dos daus
Exemple parell de VAD amb indicadors Cov i Cor
Exercici parell de VAD (Memòria i Bloquejos)

Exemples d'experiències aleatòries

- Simples
  - llençar una moneda → Ω ={cara, creu}={c, +}
  - llençar un dau → Ω ={1,2,3,4,5,6}
  - extreure una bola d'una urna (blanca, negra) → Ω ={b,n}

- Complexes
  - extreure amb reposició dues boles d'una urna → Ω ={bb, bn, nb, nn}
  - segons el resultat del llançament d'una moneda (c,+), escollir una urna d'entre dues amb composició diferent, i extreure'n una bola (b,n):

    Ω ={cb, cn, +b, +n}
  - cas servidor i xarxa: possibilitats segons si servidor i xarxa funcionen (y) o no (n)

    Ω ={yy, yn, ny, nn}

Exercicis d'experiències aleatòries

- Trobar Ω en els següents casos
  - nombre de defectes ("tares") en una peça industrial

    Solució: Ω ={0,1,2,3,…}
  - treure dues boles d'una urna amb 4 boles negres i 1 blanca

    Solució: Ω ={ }
  - diferència en valor absolut entre el nombre de cares i creus en 10 tirades

    Solució: Ω ={0,2,4,6,8,10}

- Operacions amb conjunts. Verifiqueu:
  - A ∩ B = ¬(¬A U ¬B)
  - A U B = ¬(¬A ∩ ¬B)

Exemple (pg 10 lecture 5 a Lecture Notes, EIO Mirror a bibliografia)

Diferenciar el tipus de probabilitat segons el denominador

Programa	Compila	No compila	Total
C++	72	48	120
Java	64	16	80
Total	136	64	200

sobre total

Programa	Compila	No compila	Total
C++	0.36	0.24	0.60
Java	0.32	0.08	0.40
Total	0.68	0.32	1.00

Quina és la probabilitat de que s'executi en C++ i compili? **0.36 (72/200)**

Sobre fila

Programa	Compila	No compila	Total
C++	0.60	0.40	1.00
Java	0.80	0.20	1.00
Total	-	-	-

Quina és la probabilitat de que compili un programa en C++? **0.60 (72/120)**

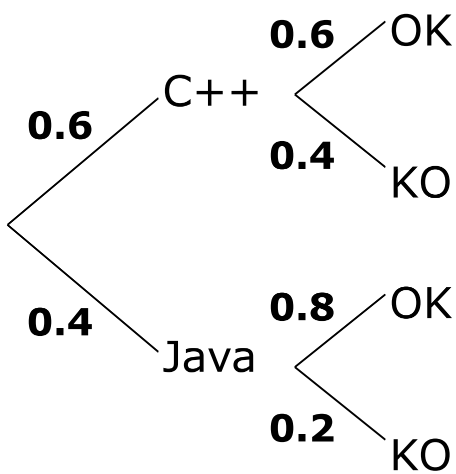
Sobre columna

Programa	Compila	No compila	Total
C++	0.53	0.75	-
Java	0.47	0.25	-
Total	1.00	1.00	-

Quina és la probabilitat que provingui de C++ si ha compilat? **0.53 (72/136)**

Exemple (pg 10 lecture 5 a Lecture Notes, EIO Mirror a bibliografia)

Les probabilitats condicionades es col·loquen a les branques dels arbres:



El 80% dels programes Java compila a la primera... però **quin % dels programes que compilen a la primera estan escrits en Java?**

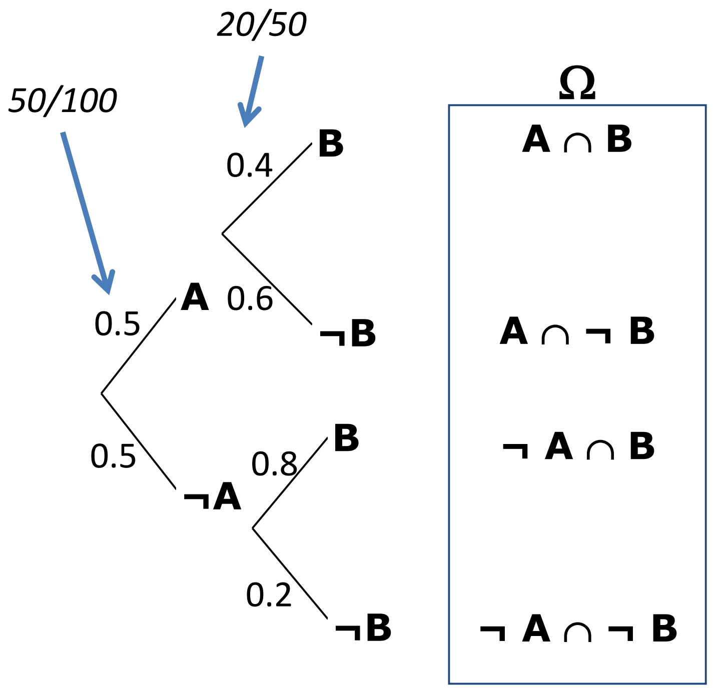
Sol: 32/68

	OK	¬OK	Total
C++	0.36	0.24	0.6
Java	0.32	0.08	0.4
Total	0.68	0.32	1

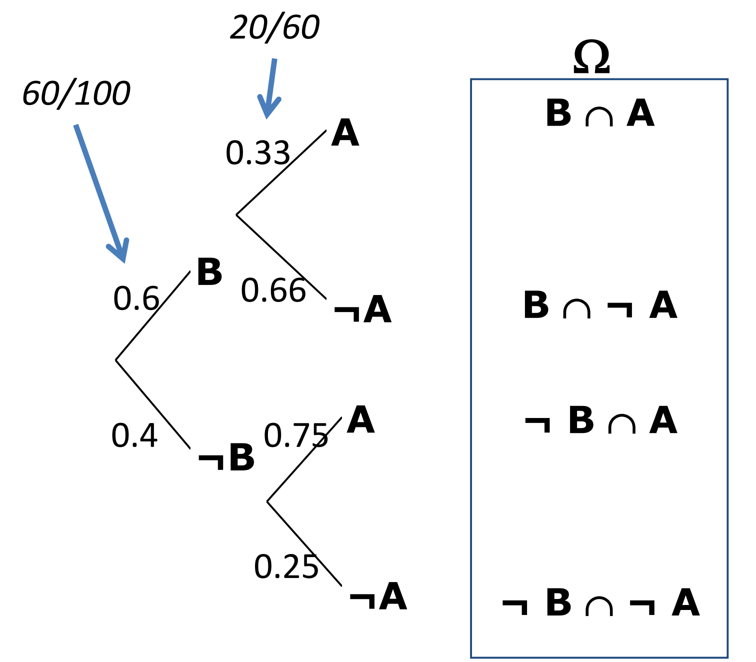
Exemple (arbre i taula de probabilitats)

Amb aquesta taula, es poden construir 2 arbres

	B	¬B	Total
A	20	30	50
¬A	40	10	50
Total	60	40	100

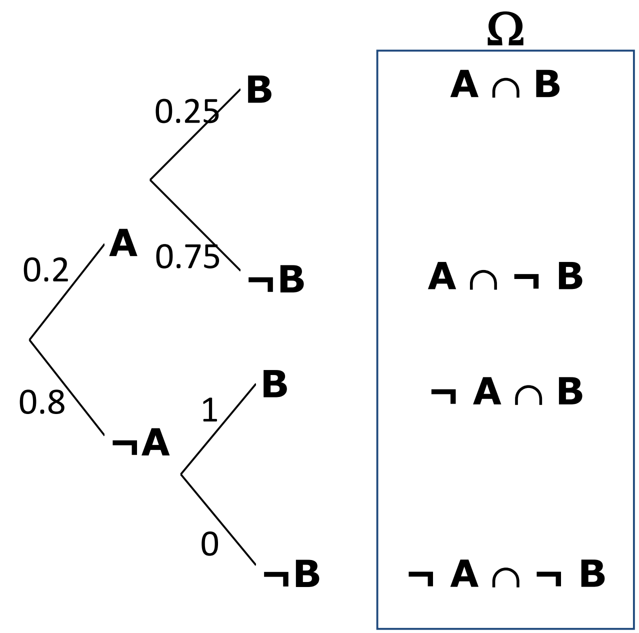


o bé



Exercici (arbre i taula de probabilitats)

Amb aquest arbre i el número total (n=100) es pot construir la taula. **Prova-ho!**



	B	**¬B**	**Total**
A	5	15	20
¬A	80	0	80
Total	85	15	100

Exemple taules de probs (cas independent o dependent)

2 casos de probabilitats de gènere (masc/fem) i tres categories d'edat
(també poden ser 2 mostres de 100 observacions, amb 60 homes i 40 dones. I 10, 40 i 50 de cada categoria d'edat, però amb diferents distribucions conjuntes)

	1	2	3	
masc.	0.06	0.24	0.30	0.60
fem.	0.04	0.16	0.20	0.40
	0.10	0.40	0.50	

	1	2	3
masc.	0.6	0.6	0.6
fem.	0.4	0.4	0.4
	1	1	1

SI independència

	1	2	3	
masc.	0.05	0.30	0.25	0.60
fem.	0.05	0.10	0.25	0.40
	0.10	0.40	0.50	

	1	2	3
masc.	0.5	0,75	0.5
fem.	0.5	0.25	0.5
	1	1	1

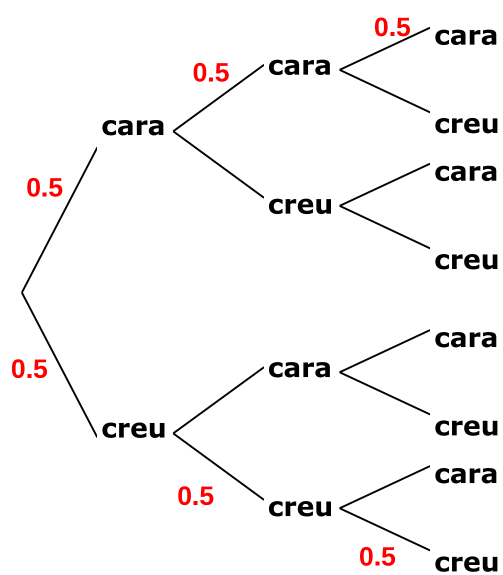
NO independència

Exemple <u>Moneda</u>. Experiència aleatòria

- Estudiarem l'experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> vegades.**
- Abans de fer cap realització i coneixent les característiques de l'experiència, calcularem:
  - P(A) sent A = "obtenir **2 cares"**
  - P(B) sent B = "obtenir **almenys 2 cares"**

(*també es calcularan aquestes probabilitats mitjançant una variable aleatòria*)

Independència



(Cara,Cara,Cara) = w1	P(w1) = P(C)·P(C)·P(C) = 1/8
(Cara,Cara,Creu) = w2	P(w2) = 1/8
(Cara,Creu,Cara) = w3	P(w3) = 1/8
(Cara,Creu,Creu) = w4	P(w4) = 1/8
(Creu,Cara,Cara) = w5	P(w5) = 1/8
(Creu,Cara,Creu) = w6	P(w6) = 1/8
(Creu,Creu,Cara) = w7	P(w7) = 1/8
(Creu,Creu,Creu) = w8	P(w8) = 1/8

Exemple Moneda. Càlcul de probabilitats

Calcular:

- A = “Obtenir dues cares”
- B = “Obtenir almenys dues cares”

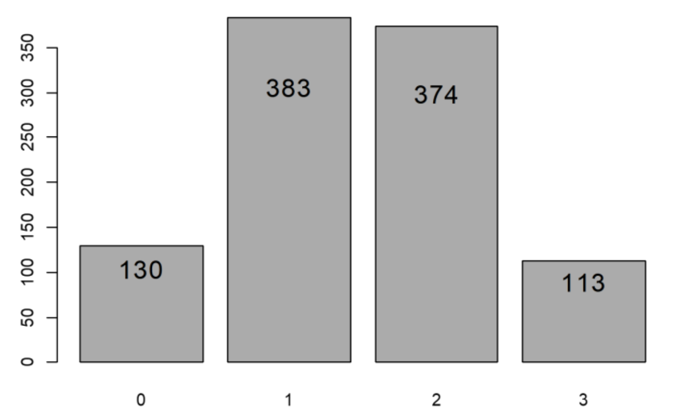
Solució: si es coneixen tots els resultats d’una experiència aleatòria, i la probabilitat de cada esdeveniment elemental, acumulem probabilitats:

P(A) = P(w2) + P(w3) + P(w5) = 1/8+1/8+1/8 = 3/8

P(B) = P(w2) + P(w3) + P(w5) + P(w1) = 1/8+1/8+1/8+1/8 = 1/2

Nota: Per altra part, si l’experiència es realitza repetidament, *observarem* unes freqüències semblants a les probabilitats de l’esdeveniment.

(*però això és un tema d’estadística descriptiva*)



Exercici Aeroport (probs. facturació i embarcament)

Per estudiar l'eficiència en un aeroport, una primera aproximació ens porta a estudiar les probabilitats d'haver-se d'esperar a l'hora de facturar i a l'hora d'embarcar. Considerem el cas d'un aeroport on s'ha comprovat que per a un viatger que arriba, la probabilitat de trobar cua a facturació és 0.4; i de trobar cua a l'embarcament és 0.6 si va trobar cua a facturació, i 0.2 si no en va trobar.

Calculeu les següents probabilitats:

a) de trobar cua a la facturació i a l'embarcament [0.24]

$P(F \text{ i } E) = P(F) * P(E|F) = 0.4 * 0.6 = 0.24$

b) de trobar cua a l'embarcament [0.36]

$P(E) = P(F \text{ i } E) + P(\neg F \text{ i } E) = 0.4*0.6 + 0.6*0.2 = 0.36$ o $= P(E \mid F)P(F) + P(E \mid \neg F)P(\neg F) = 0.6*0.4 + 0.2*0.6 = 0.36$

c) de trobar cua a l'embarcament si s'ha trobat cua a la facturació [0.60]

$P(E|F) = 0.6$

d) d'haver trobat cua a la facturació si no ha trobat cua a l'embarcament [0.25]

$P(F|\neg E) = P(F \text{ i } \neg E) / P(\neg E) = (0.4*0.4) / (0.4*0.4+0.6*0.8) = 0.25$

Exercici Aeroport (probs. facturació i control passaport)

Per estudiar l'eficiència en un aeroport, una primera aproximació ens porta a estudiar les probabilitats d'haver-se d'esperar a l'hora de facturar i al control de passaports (CP). Considerem el cas d'un aeroport on s'ha comprovat que per a un viatger que arriba, la probabilitat de trobar cua a facturació és 0.64. Posteriorment s'ha comprovat que les probabilitats d'esperar o no per el CP depenen del fet d'haver esperat al moment de facturar, com mostra la següent taula:

	si s'ha hagut d'esperar per facturar	si no s'ha hagut d'esperar per facturar
no espera	0.187	0.238
espera el primer a la cua	0.687	0.461
espera perquè ja hi ha una cua	0.126	0.301

Calcula:

1. la probabilitat de no esperar a facturació ni a CP [0.09]
2. la probabilitat de ser atès immediatament al CP (és a dir, no hi ha ningú passant el control) [0.21]
3. la probabilitat d'haver d'esperar a facturació o a CP [0.91]
4. la probabilitat d'haver d'esperar a un dels llocs (però només a un) [0.39]
5. si un viatger arriba al CP i ha d'esperar perquè hi ha una persona passant el control, i cap més: quina és la probabilitat de haver esperat a facturació? [0.72]
6. Els passatgers A i B arriben a l'aeroport en dos moments independents per agafar els seus vols. Trobeu la probabilitat que els dos hagin de posar-s'hi a la cua al CP [0.624]

Exemple Memòria Cache

Alguns processadors utilitzen un tipus especial de caches, on la memòria està distribuïda en quatre bancs. Aquests processadors són capaços de fer dos accessos simultàniament, mentre no tinguin que accedir al mateix banc. Quina és la probabilitat de conflicte?

Una situació simple assumeix que no hi ha cap relació entre el banc accedit per un accés i l'altre.

	Accés #2			
Accés #1	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16
	1/16	1/16	1/16	1/16

Probabilitat conflicte = 1/4

Però potser el comportament del processador és més complex. Per exemple: certa propensió a utilitzar pel segon accés el següent banc:

	Accés #2			
Accés #1	0.05	**0.10**	0.05	0.05
	0.05	0.05	**0.10**	0.05
	0.05	0.05	0.05	**0.10**
	0.10	0.05	0.05	0.05

Probabilitat conflicte = 0.20

Exemple (altres aplicacions)

SOME APPLICATIONS OF BAYES

(Lecture7 de Lecture Notes de Probability with R EIO Mirror a bibliografia)

• Hardware Fault Diagnosis

Extreient d'una Base de Dades les probabilitats de certs *problemes* ($P(A_i)$),
i coneixent també la probabilitat de *fallada* segons el problemes ($P(F|A_i)$),
es pot calcular quin problema és més probable quan es dóna una fallada ($\max(P(A_i|F)$)

• Machine Learning

(cas d'algoritmes de classificació d'aprenentatge supervisat)

Coneixent a priori les probabilitats de pertanyer a unes certes *classes* ($P(A_i)$),

i coneixent també la probabilitat de certa *característica* segons la classe ($P(F|A_i)$),

es pot calcular quina classe és més probable quan es dóna certa característica ($\max(P(A_i|F)$)

RELIABILITY. System reliability

(Lecture8 de Lecture Notes de Probability with R EIO Mirror a bibliografia)

• Series System (la probabilitat de funcionar el sistema és el producte de les probabilitats de funcionar dels components)

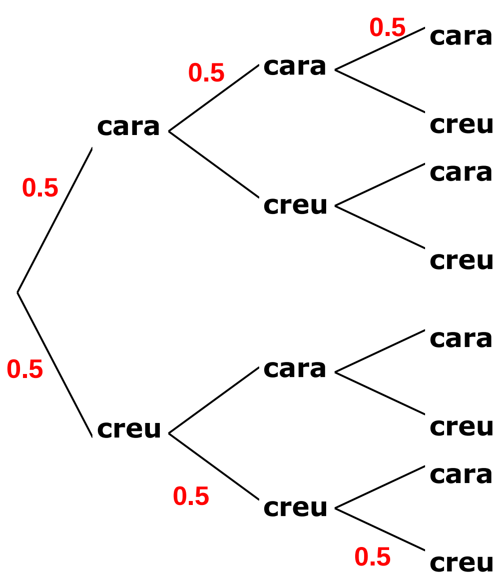
• Parallel Systems (la probabilitat de funcionar el sistema és 1 menys la probabilitat de que fallin tots (que és el producte de les probabilitats de fallar dels components))

Exemple <u>Moneda</u>. Variable aleatòria discreta

Estudiarem l'experiència aleatòria de llençar una moneda equilibrada <u>tres</u> vegades. Calcularem:

- P(A) sent A = "obtenir 2 cares"
- P(B) sent B = "obtenir almenys 2 cares"

Al bloc 1 s'han calculat les probabilitats a partir de l'arbre i dels successos; ara ho calcularem **definint la variable aleatòria X = "número de cares"**



(Cara,Cara,Cara) = w1	P(w1) = 1/8	**X = 3**
(Cara,Cara,Creu) = w2	P(w2) = 1/8	**X = 2**
(Cara,Creu,Cara) = w3	P(w3) = 1/8	**X = 2**
(Cara,Creu,Creu) = w4	P(w4) = 1/8	**X = 1**
(Creu,Cara,Cara) = w5	P(w5) = 1/8	**X = 2**
(Creu,Cara,Creu) = w6	P(w6) = 1/8	**X = 1**
(Creu,Creu,Cara) = w7	P(w7) = 1/8	**X = 1**
(Creu,Creu,Creu) = w8	P(w8) = 1/8	**X = 0**

Exemple Moneda. Variable aleatòria discreta

En l'experiència aleatòria de **llençar una moneda equilibrada tres cops**, podem calcular probabilitats definint la variable aleatòria "número de cares".

X	$P_X(X)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

$P(A) = P(X{=}2) = p_X(2) = 3/8$

$P(B) = P(X \geq 2) = 1\text{-}P(X<2) = 1\text{-}P(X \leq 1) = 1\text{-}F_X(1) = 1\text{-}4/8=4/8=1/2$ (o $p_X(2)+p_X(3)=4/8$)

I calcular l'esperança i la variància de la variable aleatòria:

$E(X) = 0{\cdot}1/8+1{\cdot}3/8+2{\cdot}3/8+3{\cdot}1/8 = 1.5$

$V(X) = (0 - 1.5)^2{\cdot}1/8 + (1 - 1.5)^2{\cdot}3/8 + (2 - 1.5)^2{\cdot}3/8 + (3 - 1.5)^2{\cdot}1/8 = 0.75$

Nota: NO confondre amb l'*indicador de tendència central d'una mostra:* **mitjana** d'unes dades recollides al realitzar repetidament l'experiència aleatòria. [Per exemple, si recollim 8 realitzacions en 50 voluntaris — cadascú repeteix 8 vegades, els tres llençaments i apunta el promig del nombre de cares en les 8 experiències. Una possiblitat és: dos voluntaris han tret de mitjana 0.75 cares; un ha tret 2.125 cares, i la resta han quedat entremig d'aquests valors, sent el cas més repetit, el treure 1.375 cares de mitjana] ***Conclusió : La mitjana mostral pot variar; l'esperança no.***

Exercici Aeroport (VAD i VAC de viatgers i temps)

Continuant amb l'exemple de l'aeroport, ens plantegem estudiar determinades variables aleatòries per a modelar i obtenir informació en diversos aspectes del funcionament d'un aeroport.

En primer lloc, s'ha establert que la distribució de X: "nombre de viatgers que arriben a un punt de facturació per minut" és com es veu a continuació:

k	$P_X(X = k) = Px(k)$	$P_X(X \leq k) = Fx$
5	0.12	0.12
6	0.32	0.44
7	0.48	0.92
8	0.08	1

Calculeu la probabilitat que arribin 7 viatgers;
menys de 7 viatgers;
més de 7 viatgers;
entre 7 i 8 viatgers.

Trobem també l'esperança, la variància i la desviació tipus:

E(X) =

V(X) = $\rightarrow \sigma_X$ =

Exercici Aeroport (VAD i VAC de viatgers i temps)

D'una altra banda, quan s'ha estudiat el temps que un viatger roman en el taulell de facturació, s'ha trobat que la següent funció:

$$f_X(k) = 0.2 \cdot e^{-0.2k} \quad \text{per } x > 0$$

és un model adequat per a representar la variable aleatòria T de "temps (en minuts)".

Calculeu la probabilitat que el temps sigui 7 minuts;
menys de 7 minuts;
més de 7 minuts;
entre 7 i 8 minuts

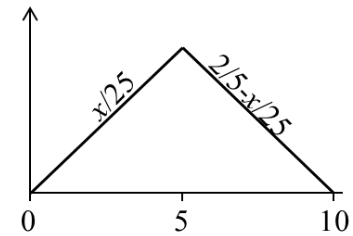
Com podem saber quin és el temps que, en mitjana*, un viatger roman en facturació?

* Nota: la paraula "mitjana" tant pot referir-se a l'esperança com a la mitjana mostral comú. En quin contexte s'està aplicant aquí?

Exemples de Quantils en VAD i VAC

Càlcul de quantils en VAC:

"L'esforç requerit per desenvolupar un projecte" en persones/mes, VAC de la fig



Quantes persones/mes són necessàries per al 90% dels projectes? Quin és el quantil 0.9 per a la variable "esforç per desenvolupar projecte"? Amb quin valor x fem que $F_X(x) = 0.9$?

Pista: podem trobar analíticament F_X, i resoldre l'equació, o en aquest cas podem aprofitar que l'àrea sota la funció de densitat és un triangle...

Solució: 7.76 homes/mes.

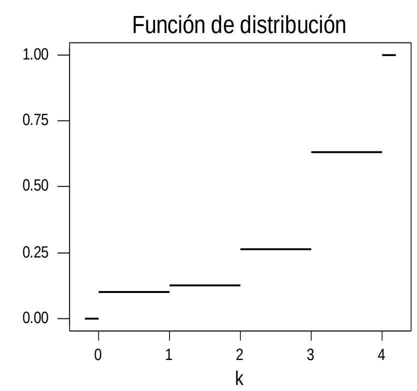
Càlcul de quantils en VAD pot portar a una solució aproximada:

Exemple:

Quin és el quantil de 0.25?
[o quin *és el percentil* 25? o del 25%]

2 és el valor on es troba una probabilitat de 0.25

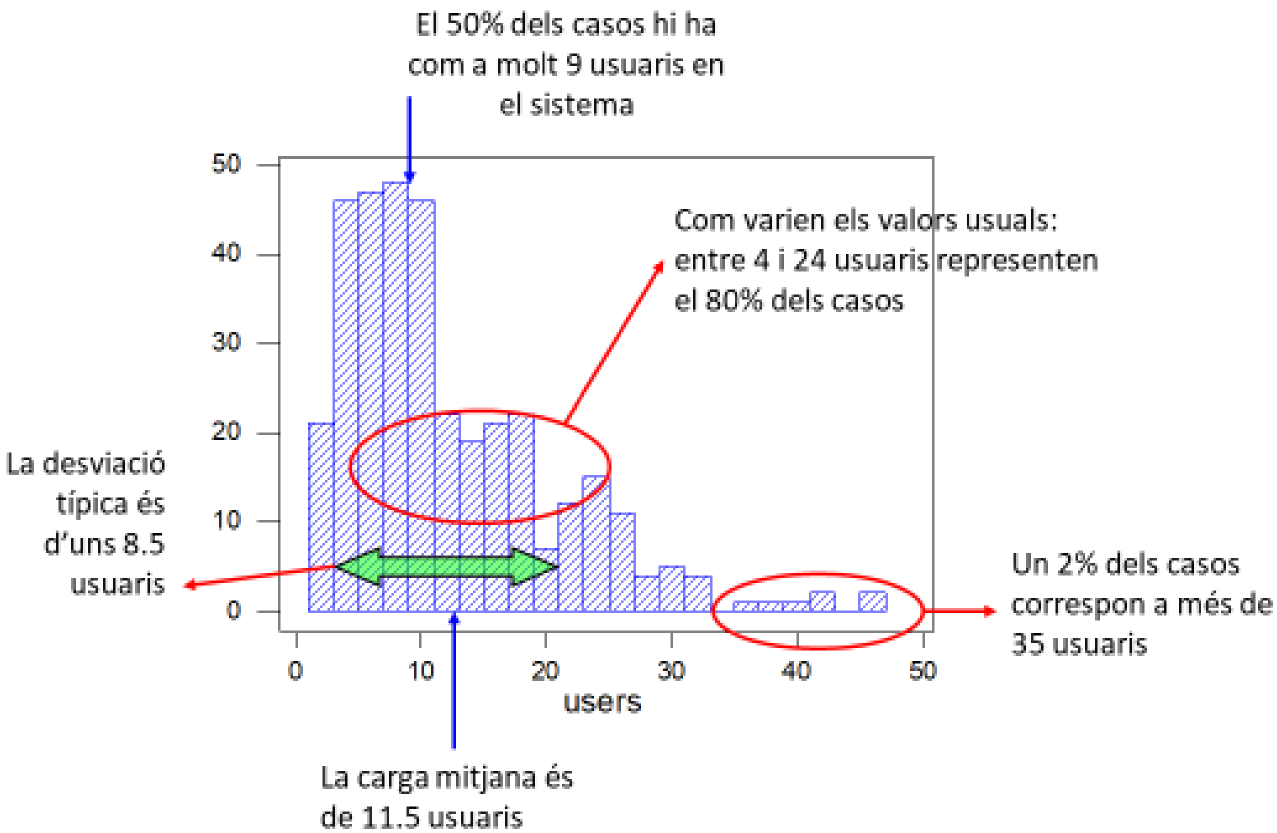
k	$F_X(k)$
$(-\infty,0)$	0.00000
[0,1)	0.10144
[1,2)	0.12448
[2,3)	0.26272
[3,4)	0.63136
$[4,+\infty)$	1.00000



Opció a seguir: Agafarem el primer valor tal que la funció de distribució superi la probabilitat desitjada

Exemple mostral de quantils i percentils

L'equivalent mostral dóna lloc als **quantils** utilitzats en estadística descriptiva. Expressats en percentatge dóna lloc als **percentils**.
Exemples: el primer quartil (Q1) és el percentil 25 o quantil 0.25, el tercer quartil (Q3) és el percentil 75 o quantil 0.75, la mediana (Me) és el percentil 50 o quantil 0.50.



Exercici “3 Bits”

Considerem el conjunt de tots els paquets de 3 bits que es poden enviar per una línia de comunicació:

Ω = {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}

Suposem que totes les seqüències són equiprobables.

Es defineixen dues variables aleatòries:

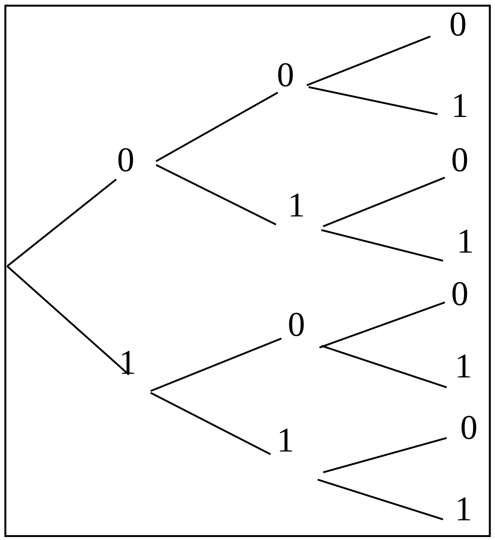
X: “suma dels 3 bits” → $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$

Y: “alternances en la seqüència de bits”. → $\Omega_Y = \{0,1,2\}$

1) Construïu l’arbre de probabilitats
2) Definiu la funció de probabilitat de les variables X i Y
3) Calculeu els valors esperats
4) Calculeu les variàncies

Exercici "3 Bits". Variables X i Y (indicadors E() i V())

1) Arbre de probabilitats



Possibilitats	X (suma)	Y (#alternances)
000		
001		
010		
011		
100		
101		
110		
111		

3) Esperances

E(X) = 1.5

E(Y) = 1

2) Funcions de probabilitat

x	$P_X(x)$
0	
1	
2	
3	

y	$P_Y(y)$
0	
1	
2	

4) Variàncies

V(X) =

V(Y) =

Exercici "3 Bits". Parell de VADs X i Y. (indicador Cov)

En l'exemple anterior dels paquets de 3 bits que es poden enviar a través d'una línia de comunicació [Ω = {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}] teníem les v.a.:

X: "suma dels 3 bits"

Y: "número d'alternances en la seqüència de bits"

Ompliu la taula amb la funció de probabilitat conjunta de les variables X i Y, a partir de la taula següent:

Possibilitats	X (suma)	Y (#alternances)
000	0	0
001	1	1
010	1	2
011	2	1
100	1	1
101	2	2
110	2	1
111	3	0

P_{YX}	*X=0*	*X=1*	*X=2*	*X=3*	
Y=0					1/4
Y=1					1/2
Y=2					1/4
	1/8	3/8	3/8	1/8	

Calculeu Cov(X,Y) = 0

Calculeu Cor(X,Y) = 0

Considereu la variable "Y|X=0" i calculeu E(Y|X=0)= 0*1+1*0+2*0=0

i V(Y|X=0)= $(0-0)^2*1 = 0$

I si considerem la variable X^2=X·X, calculeu E(X^2)= $0*1/8+1*3/8+(2^2)*3/8+(3^2)*1/8 = 3$

Exemple parell de VAD amb Dos Daus

En l'exemple de llançar dues vegades un dau equilibrat, a partir de les dues variables X "primer resultat" i Y "segon resultat" definim unes noves variables:

S = "suma dels dos resultats"

D = "diferència en valor absolut dels dos resultats"

Nota: Això **NO** són les taules de probabilitat conjunta, sinò unes taules auxliars amb els resultats possibles en les dues tirades

S=X+Y	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

K	**$P_S(S=k)$**
2	0.028
3	0.056
4	0.083
5	0.111
6	0.139
7	0.167
8	0.139
9	0.111
10	0.083
11	0.056
12	0.028

Nota: Per obtenir aquestes probabilitats es pot dividir els casos favorables entre els casos possibles només quan els succesos siguin equiprobables.

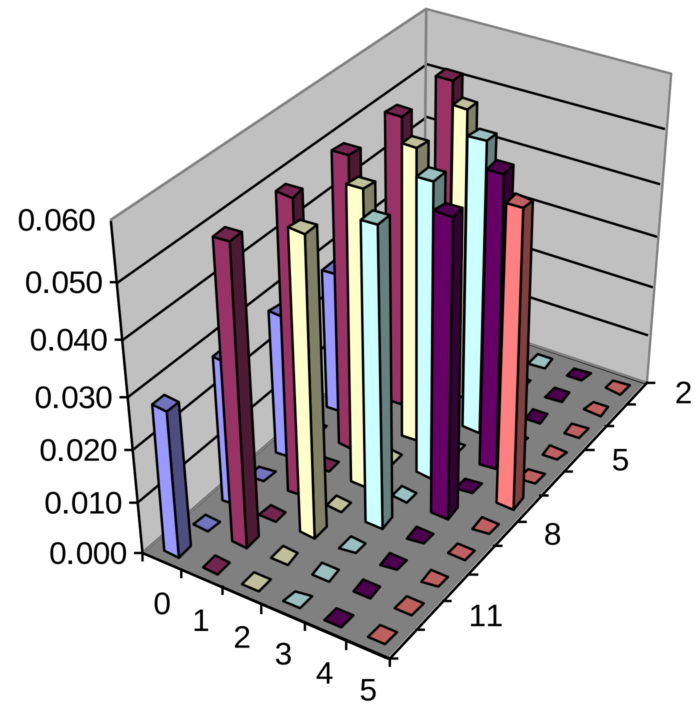
D=|X-Y|	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

K	**$P_D(D=k)$**
0	0.167
1	0.278
2	0.222
3	0.167
4	0.111
5	0.056

Exemple parell de VAD amb Dos Daus

A continuació, s'ha de trobar la funció P(*S*=s ∩ *D*=d), buscant els resultats coincidents.

S/D	0	1	2	3	4	5	
2	0.028	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.028
3	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.000	0.056
4	0.028	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.083
5	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.000	0.111
6	0.028	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.139
7	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.056	0.167
8	0.028	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.139
9	0.000	0.056	0.000	0.056	0.000	0.000	0.111
10	0.028	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.083
11	0.000	0.056	0.000	0.000	0.000	0.000	0.056
12	0.028	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.028
	0.167	0.278	0.222	0.167	0.111	0.056	1.000



Quan *S*=12 i *D*=0? Sols si *X*=6 i *Y*=6 → P(S=12,D=0) = 1/36

Quan *S*=9 i *D*=3? Quan *X*=6 i *Y*=3, o si *X*=3 i *Y*=6 → P(S=9,D=3) = 1/36 + 1/36=1/18

Quan *S*=7 i *D*=4? No existeix un resultat on es pugui produir aquesta combinació → P(S=7,D=4) = 0

Exemple parell de VAD amb Dos Daus

Són S i D independents? **No**. Es pot mirar de diverses maneres:

1) $P(S|D=i) \neq P(S)$ per alguna i
2) $P(D|S=i) \neq P(D)$ per alguna i
3) $P(D=i, S=j) \neq P(D=i) \cdot P(S=j)$ per alguna i i alguna j

Nota: És molt més fàcil demostrar la NO independència perquè només s'ha de trobar un cas que corrobori que no compleix la condició [P.ex, per demostrar que són independents, amb la primera propietat s'hauria de demostrar que $P(S|D=i) = P(S)$ per qualsevol ***i***]

	$P_{S\|D}(S\|D=0)$	$P_{S\|D}(S\|D=1)$	$P_{S\|D}(S\|D=2)$	$P_{S\|D}(S\|D=3)$	$P_{S\|D}(S\|D=4)$	$P_{S\|D}(S\|D=5)$
2	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
6	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
7	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	1.00
8	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
9	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
10	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Exemple parell de VAD amb Dos Daus

- Què passa amb μ i σ per la variable *S* quan està condicionada per *D* [llavors parlem d'*esperances* i *variàncies condicionades* perquè utilitzem $P_{X|Y=y}(x)$ en lloc de $P_X(x)$)]
- Per *D*=0, S té un valor esperat de 7, i una desviació estàndard de 3.42 (gran dispersió).
- A mesura que *D* creix, la esperança es manté, però la desviació disminueix perquè la probabilitat es concentra al voltant del 7

	$P_{S\|D}(S\|D=0)$	$P_{S\|D}(S\|D=1)$	$P_{S\|D}(S\|D=2)$	$P_{S\|D}(S\|D=3)$	$P_{S\|D}(S\|D=4)$	$P_{S\|D}(S\|D=5)$
2	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
6	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
7	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	1.00
8	0.17	0.00	0.25	0.00	0.50	0.00
9	0.00	0.20	0.00	0.33	0.00	0.00
10	0.17	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
12	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
μ	**7.00**	**7.00**	**7.00**	**7.00**	**7.00**	**7.00**
σ	**3.42**	**2.83**	**2.24**	**1.63**	**1.00**	**0.00**

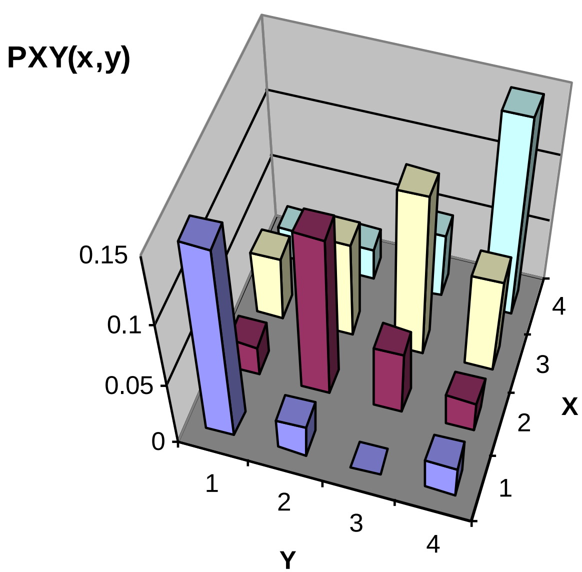
Exemple parell de VAD amb indicadors Cov i Cor

X/Y	1	2	3	4	
1	0.150	0.025	0.000	0.025	0.200
2	0.025	0.125	0.050	0.025	0.225
3	0.050	0.075	0.125	0.075	0.325
4	0.025	0.025	0.050	0.150	0.250
	0.250	0.250	0.225	0.275	1.000

Suposem dos variables *X* i *Y* que presenten la funció $P_{X,Y}(x,y)$ de la taula.
Veiem que:

$\mu_X = 2.625$ $\sigma_X = 1.065$

$\mu_Y = 2.525$ $\sigma_Y = 1.140$



Observeu la relació entre les variables: en general, el valor de Y és de la magnitud de *X*, hi ha una *relació directa*, encara que no sigui determinista [*Y* = *X*]

covariància → **Cov(*X*,*Y*) = 0.647**

[idea de relació positiva]

correlació → $\rho_{X,Y}$ **= 0.533**

[indica *magnitud* de la relació, ja que sabem que l'indicador està entre -1 i 1]

Exercici parell de VAD: Memòria i Bloquejos

Tenim la distribució de probabilitat conjunta entre “Memòria d’un ordinador entre 1 i 6 GB” (M) i “nombre (entre 0 i 5) de bloquejos o incidències mensuals” (B)

Distribució conjunta M/B	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.00	0.020	0.030	0.050	0.060	0.08
2	0.00	0.015	0.015	0.035	0.045	0.03
3	0.00	0.030	0.060	0.050	0.030	0.03
4	0.06	0.050	0.045	0.030	0.030	0.00
6	0.10	0.075	0.030	0.000	0.000	0.00

k	**$P_M(k)$**
1	0.24
2	0.14
3	0.20
4	0.215
6	0.205

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$P_B(k)$	0.16	0.19	0.18	0.165	0.165	0.14

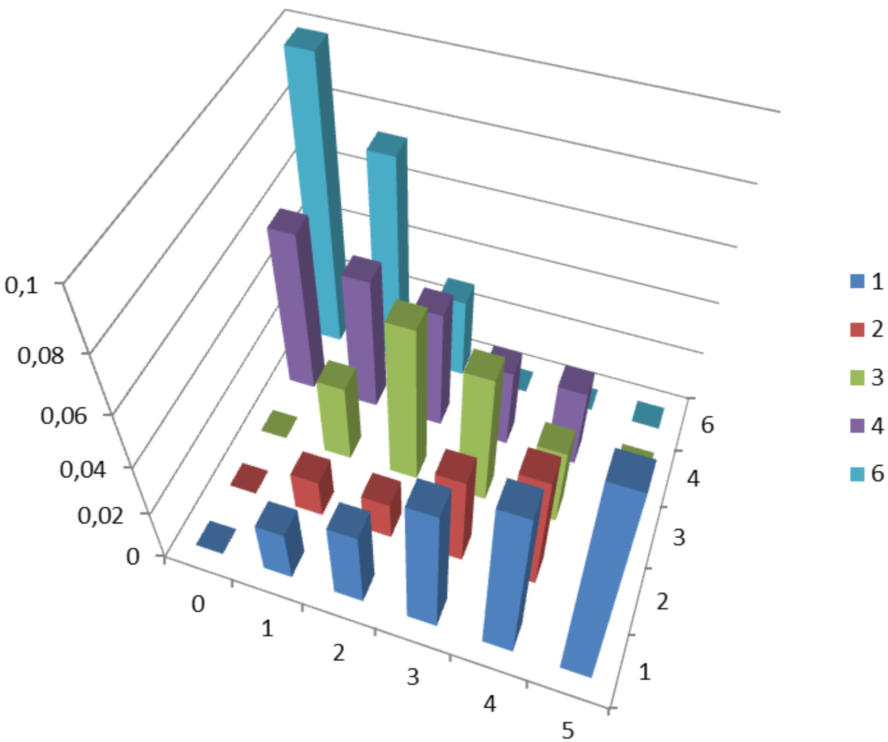
Distribucions marginals

1. Representeu $P_{M\,/\,B=3}()$ i $P_{M\,/\,B=4}()$. Que es dedueix d’això?
2. Representeu $P_{B\,/\,M=2}()$ i $P_{B\,/\,M=4}()$. Que es dedueix d’això?
3. Calculeu prob. que un ordinador tingui menys de 3 GB i més de 2 incidències [0.30]
4. Calculeu prob. que tingui més de 2 incidències si té menys de 3 GB [0.79]
5. Calculeu prob. que tingui més de 3 GB si ha tingut menys de 2 incidències [0.81]

Exercici parell de VAD: Memòria i Bloquejos

En mitjana, els ordinadors tractats tenen una memòria de 3.21 GB, i han patit una mitjana de 2.405 incidències mensuals. La distribució és bastant uniforme, amb desviacions estàndards de 1.765 GB i 1.66 inc./m.

Les dues variables no són independents, la funció $P_{M,B}()$ mostra una clara relació inversa (com més memòria, menys incidències):



Quant val la Covariància?

Quant val la Correlació?

Si $|\rho_{X,Y}|$ és alta, la variabilitat de *B* condicionada amb *M* és sensiblement menor que la global de *B*.