NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

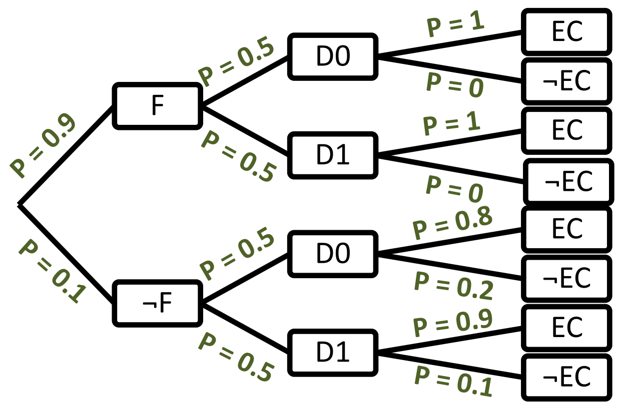
Problema 1 (B1). Es considera que la probabilitat que un disc dur funcioni correctament és 0.9. Nosaltres hem dissenyat un programa per testejar el bon funcionament d'un disc dur. Aquest programa transmet amb la mateixa probabilitat bits, 0 o 1, per ser escrits en el disc dur. En el cas que aquest NO funcioni correctament, si es transmet un 0, hi ha 4 que s'escriuen bé per cadascun que s'escriu malament; mentre que si es transmet un 1, la relació és de 9 a 1. Si el disc dur funciona correctament, l'escriptura es fa sempre de forma correcta. ***[Totes les respostes valen 1.25 punts]***

Definim els següents successos:

F: "El disc dur funciona correctament" ; **¬F**: "El disc dur NO funciona correctament"
D0: "Es transmet un dígit 0" ; **D1**: "Es transmet un dígit 1"
EC: "Escriptura correcta" ; **¬EC**: "Escriptura incorrecta"

Fem una prova transmetent un únic bit.

1) Omple l'arbre amb les probabilitats pertinents en les branques



2) Quina és la probabilitat de que un bit NO s'escrigui correctament si sabem que el disc dur NO funciona i que el programa ha enviat un 1?

$P(\neg EC|\neg F \cap D1) = 0.1$

3) Quina és la probabilitat que un bit s'escrigui correctament?

$$P(EC) = P(EC|F \cap D0) \cdot P(F \cap D0) + P(EC|F \cap D1) \cdot P(F \cap D1) + P(EC|\neg F \cap D0) \cdot P(\neg F \cap D0) + P(EC|\neg F \cap D1) \cdot P(\neg F \cap D1) = 1 \cdot 0.5 \cdot 0.9 + 1 \cdot 0.5 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.985$$

4) Quina és la probabilitat que un disc dur NO funcioni i s'escrigui correctament un bit?

$$P(\neg F \cap EC) = P(\neg F \cap EC|D0) \cdot P(D0) + P(\neg F \cap EC|D1) \cdot P(D1) = \frac{P(\neg F \cap EC \cap D0)}{P(D0)} \cdot P(D0) + \frac{P(\neg F \cap EC \cap D1)}{P(D1)} \cdot P(D1)$$
$$= 0.1 \cdot 0.5 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.5 \cdot 0.9 = 0.085$$

5) Quina és la probabilitat que el disc dur funcioni sense problemes si s'ha escrit correctament?

$$P(F|EC) = \frac{P(EC|F) \cdot P(F)}{P(EC)} = \frac{1 \cdot 0.9}{0.985} = 0.914$$

6) Digues si les següents parelles d'esdeveniments són independents o no i argumenta el perquè.

Parelles de successos	**Independents?**	**Argumentació**
F i D0	**Sí**/No	P.ex, P(D0|F) = P(D0|¬F) = 0.5
F i EC	Sí/**No**	P.ex, P(EC|F) = 1 ≠ P(EC|¬F) < 1
D0 i EC	Sí/**No**	P.ex, P(EC∩D0) = 0.9·0.5·1+0.1·0.5·0.8= 0.49 ≠ P(EC) · P(D0) = 0.985 · 0.5= 0.4925

La lletra "A" majúscula en llenguatge binari s'escriu com: **01000001**
La lletra "B" majúscula en llenguatge binari s'escriu com: **01000010**

7) A continuació, farem que el programa enviï la seqüència de bits corresponents a una "A" de forma independent. Trobeu la probabilitat que la lletra "A" s'escrigui correctament

A="La lletra A s'escriu correctament"
$P(A) = P(A|F) \cdot P(F) + P(A|\neg F) \cdot P(\neg F) = 1 \cdot 0.9 + 0.8^6 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.921$

8) Trobeu la probabilitat que al transmetre la lletra A s'escrigui com una B [*Pista: considereu la partició {F, ¬F}*]
AB=" La lletra A s'escriu com una B"
$P(AB) = P(AB|F) \cdot P(F) + P(AB|\neg F) \cdot P(\neg F) = 0 \cdot 0.9 + 0.8^5 \cdot 0.9^1 \cdot 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.00059$
Aclariment: P(AB|¬F) = P(0 bien y 1 bien y 0000 bien y 0 mal y 1 mal | ¬F) = 0.8 0.9 0.8^4 0.2 0.1

NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema B2. Una botiga virtual ha incorporat un sistema de promoció al preu dels seus productes . L'usuari quan es connecta i escull un article veu una ruleta com la de la figura 1, que es posa en marxa i li ofereix un descompte a l'atzar, en aquest cas d'entre 1 i 10 euros. No cal dir que el sistema és completament fiable, segons els seus creadors. Per el cas de la figura de dalt, per exemple, està comprovat que cada sector (de 45 graus) té les mateixes possibilitats de sortir que un altre.

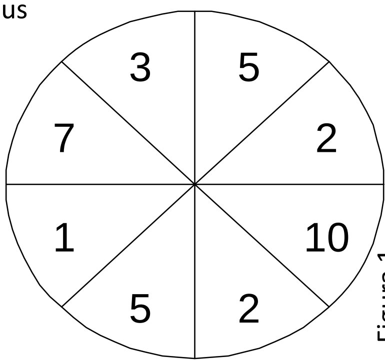
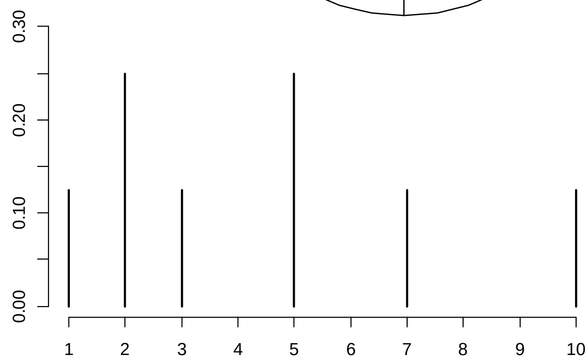


Figura 1

1. *Definiu la funció de probabilitat de la variable "Descompte" donant la taula i representant-la gràficament. Trobeu la seva esperança, variància i desviació tipus.*

   [6p]

x	$P_X(x)$
1	0.125
2	0.25
3	0.125
5	0.25
7	0.125
10	0.125



E(X) = 1 0.125 + 2 0.25 + 3 0.125 + 5 0.25 + 7 0.125 + 10 0.125
= **4.375**
V(X) = 1 0.125 + 4 0.25 + 9 0.125 + 25 0.25 + 49 0.125 + 100 0.125 – 4.375^2 = **7.9844**
σ_X = **2.825668**

Els programadors de la web han dissenyat un altre tipus de ruleta, la *ruleta sorpresa*, que és com la de la figura 2: els sectors poden ser diferents, i la probabilitat de cada sector és proporcional a l'àrea (o a l'angle). Per exemple, si l'usuari obté aquesta ruleta, els angles de cada sector són:

Sector	1	2	3	4	5	6	7	8
Angle	75	35	40	20	60	50	25	55
Descomp	2	5	3	7	1	5	2	10

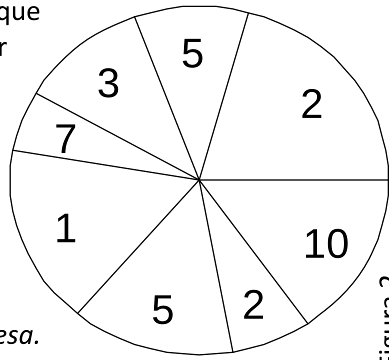
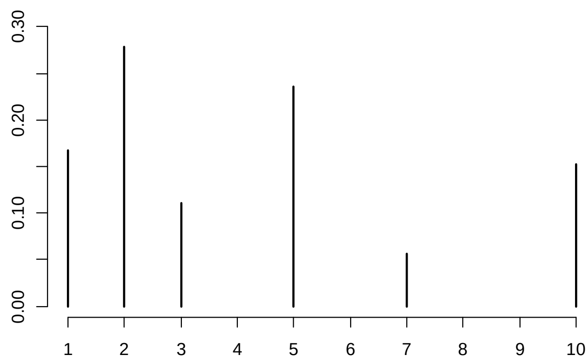


Figura 2

2. *Torneu a fer el mateix de la pregunta 1, però amb el descompte de la ruleta sorpresa.*

   [5p]

x	Angles	$P_Y(x)$
1	60	0.1667 = 60/360
2	75+25	0.2778 = 100/360
3	40	0.1111 = 40/360
5	35+50	0.2361 = 85/360
7	20	0.0556 = 20/360
10	55	0.1528 = 55/360



E(Y) = 1 0.1667 + 2 0.2778 + 3 0.1111 + 5 0.2361 + 7 0.0556 + 10 0.1528 = **4.1528**
V(Y) = 1 0.1667 + 4 0.2778 + 9 0.1111 + 25 0.2361 + 49 0.0556 + 100 0.1528 – 4.1528^2 = **8.9350**
σ_Y = **2.9891**

3. *Quina és la probabilitat, amb cadascuna, d'obtenir un descompte de 5 euros o més? Quina és més beneficiosa pels propietaris de la botiga virtual, i perquè? [4p]*

$P(X \geq 5) = 0.25 + 0.125 + 0.125 = 0.5$

$P(Y \geq 5) = 0.2361 + 0.0556 + 0.1528 = 0.4444$

El valor esperat de descompte és més petit amb la ruleta sorpresa (4.15€ i 4.375€), llavors la diferència de 22.5 cèntims és el que el propietari s'estalvia en mitjana amb cada usuari.

El *descompte doble* és una promoció especial que han pensat aplicar a un de cada cent visitants, i consisteix en mostrar i sumar els descomptes de ambdues ruletes (que són independents).

4. *Podeu dir quin és el valor esperat del descompte doble? I la seva desviació tipus? La correlació entre ambdós descomptes? Amb quina probabilitat l'afortunat pot obtenir més de 18 euros de descompte? [3p]*

DD: "descompte doble" = X+Y
E(DD) = E(X) + E(Y) = 4.375 + 4.1528 = **8.5278€**
V(DD) = V(X) + V(Y) {perquè són independents} = 7.9844 + 8.9350 = 16.9194. Correlació = 0
σ_{DD} = **4.1133€**
P(DD>18) = P(DD=20) {només hi ha una possibilitat: X=10 i Y=10} = $P(X=10 \cap Y=10) = P_X(10)\, P_Y(10)$
= 0.125 0.1528 = **0.0191**

Sigui V la rotació (en radians) que l'algorisme aplicarà a la ruleta, fent l'animació corresponent. Es desitja un mínim d'una volta i un màxim de cinc voltes. Per reproduir el moviment, els programadors primer obtenen un nombre real aleatori U entre 0 i 1 amb la funció `rand()` (ja sabeu que tots el nombres que retorna la funció són equiprobables), després el multipliquen per 8π i li sumen 2π. Responeu:

5. *a) Trobeu la variància de la VA U, mitjançant càlcul integral (no val utilitzar propietats de cap model) [2p]*
La V(U) val $E(U^2) - E(U)^2$. És directe que E(U) = ½.

$$E(U^2) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

V(U) = 1/3 -1/4 = 1/12

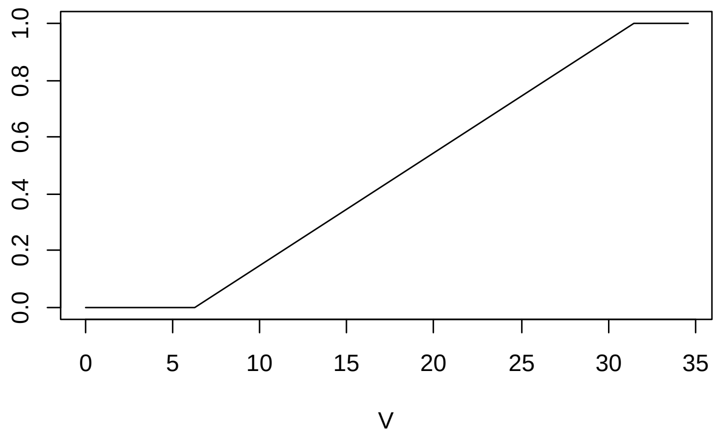
b) Com s'expressa V en funció d'U? Especifiqueu on pren valors aquesta variable. [1p]
V = 2π + 8π U. Entre 2π i 10π

c) Expresseu la funció de densitat i la funció de distribució de V, i representeu aquesta gràficament. [2p]

$f_V(v) = {}^{1}/_{8\pi} \quad 2\pi < v < 10\pi; \quad 0 \quad \text{si no}$

$F_V(v) = {}^{(v-2\pi)}/_{8\pi} \quad 2\pi < v < 10\pi;$

$0 \quad \text{si } v < 2\pi;$
$1 \quad \text{si } v > 10\pi$



d) Com justificaríeu que el valor esperat de V equival a tres voltes? [1p]
E(V) = 2π + 8π E(U) = 2π + 8π 1/2 = 6π (tres voltes)

e) Quina és la seva desviació tipus? I si la rotació s'expressa en graus? [1p]
$V(V) = (8\pi)^2\, V(U)$
$V(V) = (8\pi)^2/12; \quad \sigma_V = 8\pi/\sqrt{12}$

Si fos en graus: $\sigma_{V'} = 180/\pi \; 8\pi/\sqrt{12} = 415.7°$ (1.15 voltes)

e-mail FIB USERID: @est.fib.upc.edu

Problema 3. *Justifiqueu les respostes. Tots els apartats valen 1 punt, excepte el 5 i el 8.*

1. Modelem el temps $\mathbf{T_1}$ del Jutge en comprovar un programa amb una Exponencial de $E(T_1)=5''$. Trobeu $P(T_1>5)$

Si $E(T_1) = 5 \rightarrow \lambda = 1/E(T_1) = 1/5$

$$P(T_1 > 5) = 1 - F_{T_1}(5) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{1}{5}\cdot 5}\right] = e^{-1} \approx 0{,}36787944 \approx \mathbf{0{,}368}$$

Si λ=5, -- 1/2p

2. Trobeu el valor t_1 pel qual podem garantir, amb una probabilitat de 0.99, que el codi ja estarà comprovat

$$0.99 = P(T_1 < t_1) = F_{T_1}(t_1) = 1 - e^{-\frac{1}{5}\cdot t_1} \;;$$

$$e^{-\frac{1}{5}\cdot t_1} = 1 - 0.99 = 0.01 \;;$$

$$-{}^{t_1}\!/_5 = \ln(0.01) \;;$$

$$t_1 = -5 \cdot \ln(0.01) \approx -5 \cdot -4{,}605170186 \approx \mathbf{23.026}$$

3. Una nova versió triga un temps $\mathbf{T_2}$ que modelem amb una Normal de $E(T_2)=5$ i $V(T_2)=4$. Trobeu $P(T_2>\mathbf{5})$

$$T_2 \sim N(\mu = 5, \sigma = 2)$$

$P(T_2 > 5) = \mathbf{0.5}$ Per la simetria de la D.N.

(Tb ok: perquè en la D.N., esperança i P50 coincideixen)
(Tb ok: perquè en la D.N., mitjana i mediana coincideixen)

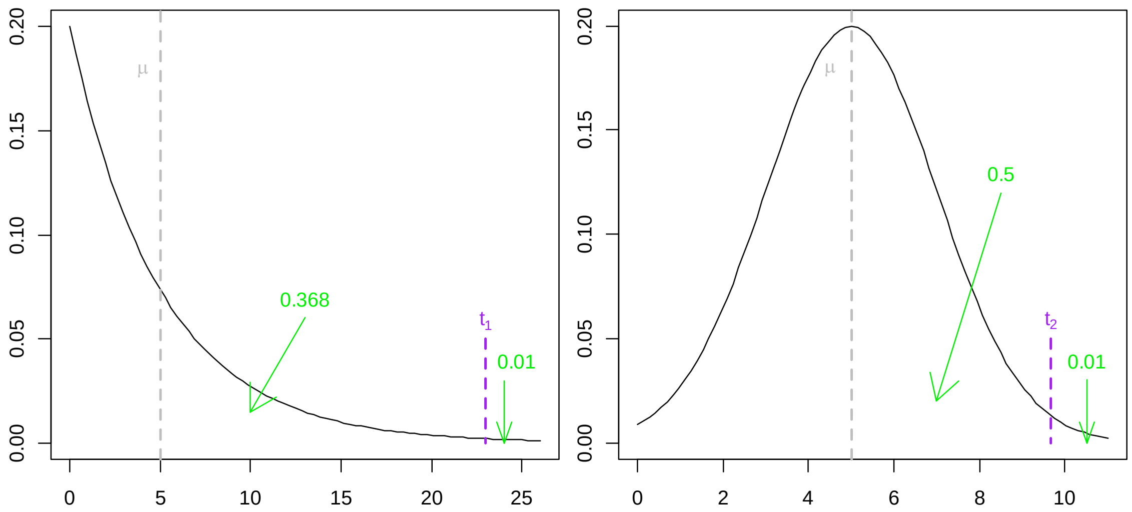
4. Trobeu el valor t_2 pel qual podem garantir, amb una probabilitat de 0.99, que el codi ja estarà comprovat.

$$T_2 \sim N(\mu = 5, \sigma = 2)$$

$$(Taules) \rightarrow 0.99 = P(Z < 2.33) \;;$$

$$0.99 = P(Z < 2.33) = P[(Z\sigma + \mu) < (2.33 \cdot 2 + 5)] = P(T_2 < 9.66)$$

5. Representa gràficament la funció de densitat de $\mathbf{T_1}$ i $\mathbf{T_2}$, marcant en els eixos l'esperança, els valors **5**, t_1, t_2 ; i, sota les dues distribucions, les àrees corresponents a les seves probabilitats. *(2 punts)*



6. El Jutge s'ha fet tan popular que ara treballa segons una arquitectura distribuïda amb molts servidors independents. El nombre **K** de processos oberts en un servidor i en un moment donat el modelem amb una Poisson de E(P)=6.8. Si k és superior a 9, el servidor envia un senyal per indicar que es troba en situació crítica i no pot assumir temporalment més tasques. Trobeu la probabilitat de que el servidor es trobi en situació crítica.

$K \sim P(\lambda = 6.8)$

$P(K > 9) = 1 - P(K \leq 9) = 1 - F_K(9) = (Taules) = 1 - 0.850 = \mathbf{0.150}$

7. Si tenim 21 servidors independents amb probabilitat 0.1 de estar en situació crítica, amb quina distribució exacta modelem el nombre $\mathbf{S_{21}}$ de servidors en situació crítica? Troba la probabilitat de que 5 es trobin en situació crítica.

$S_{21} \sim B(n = 21, \pi = 0.1)$

$$P(S_{21} = 5) = \binom{21}{5} \cdot 0.1^5 \cdot 0.9^{16} = \frac{21!}{5!\,16!} \cdot 0.1^5 \cdot 0.9^{16} =$$

$$= 21 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 0.1^5 \cdot 0.9^{16} \approx 0.03770711 \approx \mathbf{0.0377}$$

Si $S_{21} \sim P(\lambda = 21 \cdot 0.1 = 2.1)$ y $P(S_{21} = 5) = \frac{2.1^5 e^{-2.1}}{5!} \approx 0.0417$ → ½ punts

8. L'èxit ens ha obligat a instal·lar-ho en 50 servidors. Proposa una distribució continua per modelar aproximadament S_{50}. Troba amb aquest model la probabilitat de que 10 o menys servidors es trobin en situació crítica. *(2 punts)*

$S_{50} \sim N(\mu = 50 \cdot 0.1, \sigma^2 = 50 \cdot 0.1 \cdot 0.9) \sim N(\mu = 5, \sigma^2 = 4.5) \sim N(\mu = 5, \sigma \approx 2.1213)$

$$P(S_{50} \leq 10) = P\left[\frac{S_{50} - \mu}{\sigma} \leq \frac{10 - 5}{2.1213}\right] \approx P(Z \leq 2.36) \approx (taules) = \mathbf{0.9909}$$

Si discreta $S_{50} \sim P(\lambda = 50 \cdot 0.1 = 5)$ y $P(S_{50} \leq 10) = F(10) = taules = 0.986$ → 1 punt

Si discreta $S_{50} \sim B(n = 50, \pi = 0.1)$ y $P(S_{50} \leq 10) =¿R, calculadora? = 0.9906$ → 1 punt