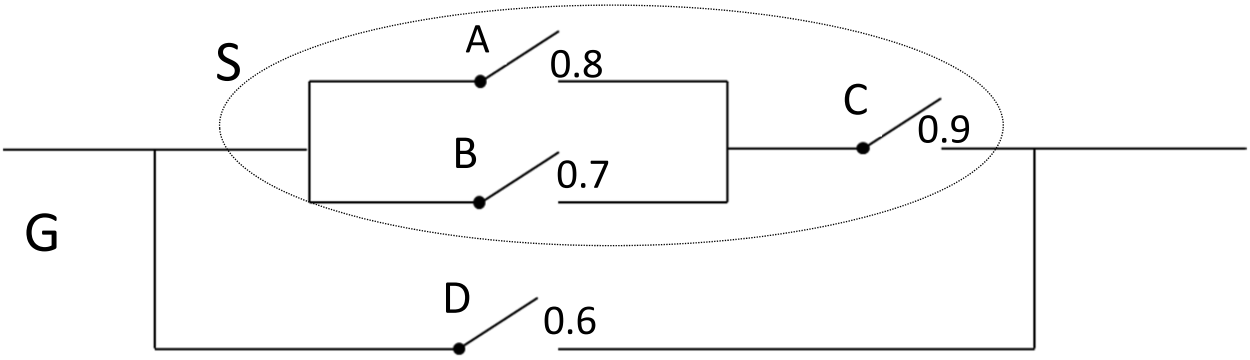
NOM:____________________________COGNOM:____

(***Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs***)

Problema 1 (B1)

Resta punts si P> 1 o si fa $\cap$ ó $\cup$ a probabilitats en lloc de a esdeveniments (les probs són números que és sumen i resten)

Tenim el següent circuit elèctric en el qual hi ha 4 portes que poden estar connectades (A,B,C i D) amb probabilitats 0.8, 0.7, 0.9, 0.6 o desconnectades (¬A, ¬B, ¬C i ¬D). Les connexions o no de les portes són independents entre elles. Indiquem amb S el sub-circuit indicat (format per A,B i C), i G al global (format per S i D). Calculeu amb mínim 3 decimals correctes:



1. (1 punt) La probabilitat que les 4 portes estiguin connectades.

$$P\{A \cap B \cap C \cap D\} =$$
$$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) =$$
$$= 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.9 \cdot 0.6 = 0.3024$$

2. (1 punt) La probabilitat que el corrent passi pel sub-circuit S.

$$P(S) = P\{C \cap (A \cup B)\} =$$
$$= P(C) \cdot [P(A) + P(B) - P(A)P(B)] =$$
$$= 0.9\ [0.8 + 0.7 - 0.8 \cdot 0.7] =$$
$$= 0.846$$

3. (1 punt) La probabilitat que el corrent passi pel circuit global G.

$$P(G) = 1 - P\{\neg S \cap \neg D\} = 1 - 0.154 \cdot 0.4 = 0.9384$$

Tb: $P(G) = P\{S \cup D\} = P(S) + P(D) - P(S)P(D) =$

$$= 0.846 + 0.6 - 0.846 \cdot 0.6 = 0.9384$$

4. (1 punt) Demostra que S i C no són independents.

$1 = P(C \mid S) \neq P(C) = 0.9$ → S i C NO són independents.

Tb: $0 = P(S \mid \neg C) \neq P(S) = 0.846$ → S i C NO són independents.

Tb: $P\{S \cap C\} = P\{[C \cap (A \cup B)] \cap C\} = P\{C \cap (A \cup B)\} = P(S)$

Com $P\{S \cap C\} = P(S) \neq P(S)\,P(C)$ → S i C NO són independents.

Si raona, però no compara ni valors ni expressions → ½ p

5. (1 punt) La probabilitat que la porta D estigui desconnectada quan sabem que el corrent circula per G.

$$P(\neg D|G) = 1 - P(D|G) = 1 - P(D\cap G) / P(G) = 1 - P(D)/P(G) = 1 - 0.6 / 0.9384 = 0.360614$$

Tb: $P\{\neg D \cap G\} = P\{\neg D \cap (S \cup D)\} = P\{\neg D \cap S\} = P(\neg D) \cdot P(S) = 0.4 \cdot 0.846 = 0.3384$

$P(\neg D | G) = P(\neg D \cap G) / P(G) = 0.3384 / 0.9384 = 0.360614$

6. (1 punt) La probabilitat que circuli el corrent per G quan sabem que la porta D està desconnectada.

$$P\{G | \neg D\} = P\{\neg D \cap G\} / P(\neg D) = 0.3384 / 0.4 = 0.846$$

Tb: $P(G | \neg D) = P(\neg D \cap G) / P(\neg D) = P(\neg D \cap S) / P(\neg D) = P(\neg D) \cdot P(S) / P(\neg D) = P(S) = 0.846$

Tb: $P(G \cap \neg D) = P(\neg D \cap G) \rightarrow$

$P(C|\neg D) \cdot P(\neg D) = P(\neg D | G) \cdot P(G) \rightarrow$

$P(C|\neg D) = P(\neg D | G)\ P(G) / P(\neg D) = 0.360614 \cdot 0.9384 / 0.4 = 0.846$

7. (2 punts) Compara les preguntes 3 i 6 i els seus resultats.

3) $P(G) = 0.9384$ i 6) $P\{G | \neg D\} = 0.846$

$\underbrace{\text{G i D no són independents,}}_{1p}$ ja $\underbrace{\text{que saber que D no funciona, baixa les expectatives sobre G}}_{1p}$

OK si compara 2 (valor original a l'enunciat) i 6 —tot raonant perquè són iguals (veure resposta alternativa anterior)

8.(2 punts) Compara les preguntes 5 i 6 i els seus resultats.

5) $P\{\neg D | G\} = 0.360614$ i 6) $P\{G | \neg D\} = 0.846$

Comparteixen el mateix numerador "$P\{\neg D \cap G\}$",
però canvien en el denominador (marcat per la condició),
que són: $P(G) = 0.9384$ i $P(\neg D) = 0.4$ — 1p

El primer resulta més petit ja que divideix pel succés G amb més probabilitat ("és més gran"). 1p

Si diu "són probabilitats diferents perquè són esdeveniments diferents" → ½ p.

NOM:___________________________COGNOM:____

(*Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs*)

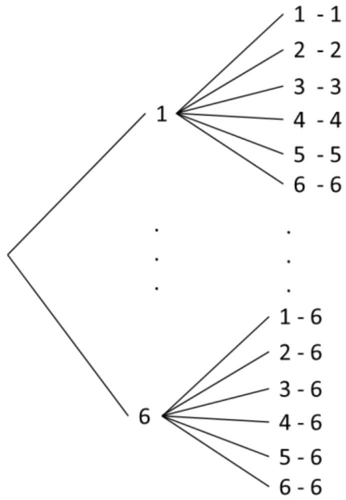
Problema 2 (B2)

Considerem dues tirades d'un dau equilibrat de 6 cares.
Considerem la repetició de 2 variables aleatòries:

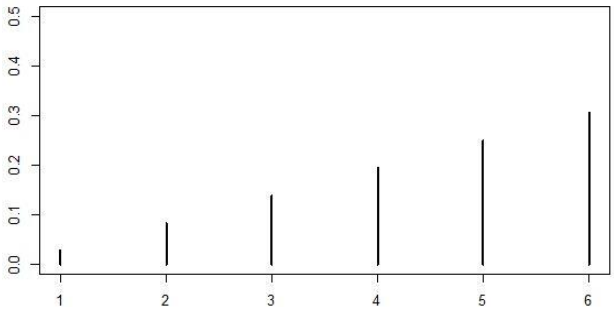
X = màxim dels dos resultats,
Y = el nombre de vegades que surt un resultat parell.

1. (3 punts) Per la variable X, calculeu:
   a) la funció de probabilitat i la seva gràfica,
   b) l'esperança i la desviació,
   c) comenteu les característiques de la gràfica de la funció de probabilitat (simetries, creixements i centre de gravetat).

Cal veure que $R_x = \{1,2,3,4,5,6\}$



a) $p_x(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)}{36}, & si\ x = 1, \dots, 6 \\ 0, & altrament \end{cases}$



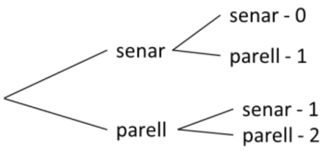
b) $E[X] = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = 4{,}4722$

$$\sigma_X = \sqrt{\left(1 \times \frac{1}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 9 \times \frac{5}{36} + 16 \times \frac{7}{36} + 25 \times \frac{9}{36} + 36 \times \frac{11}{36}\right) - 4{,}4722^2} = \sqrt{\frac{791}{36} - 4{,}4722^2} = \sqrt{1{,}9714} = 1{,}4041$$

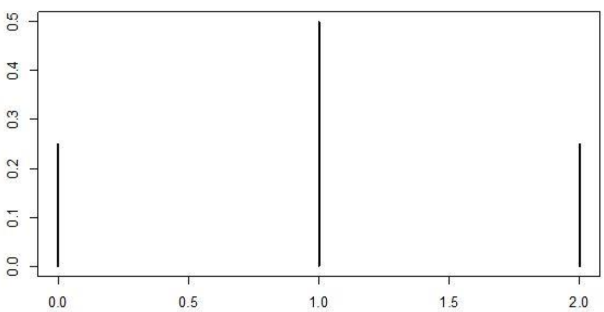
c) La funció és molt dispersa, no presenta simetries però creix perquè conforme els valors de X són més grans més sovint són el màxim de l'observat.

2. (3 punts) Per la variable Y, calculeu:
   a) la funció de probabilitat i la seva gràfica,
   b) l'esperança i la desviació,
   c) comenteu les característiques de la gràfica de la funció de probabilitat (simetries, creixements i centre de gravetat).

Cal veure que $R_Y = \{0,1,2\}$



a) $p_y(y) = \begin{cases} \frac{9}{36}, & si\ y = 0,2 \\ \frac{18}{36}, & si\ y = 1 \\ 0, & altrament \end{cases}$



b) $E[Y] = 0 \times \frac{9}{36} + 1 \times \frac{18}{36} + 2 \times \frac{9}{36} = 1$

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(0 \times \frac{9}{36} + 1 \times \frac{18}{36} + 4 \times \frac{9}{36}\right) - 1^2} = \sqrt{1{,}5 - 1} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}7071$$

c) La funció és simètrica perquè parell-senar són conceptes intercanviables i té centre de gravetat a l'1 ja que és el valor més freqüent.

3. (2 punts) Si definim un índex de variabilitat relativa d'una variable com el quocient entre la desviació i l'esperança, calculeu-lo per a les 2 variables X i Y, indicant la que té més variabilitat relativa i per quina raó creieu que passa.

$$\frac{\sigma_X}{E[X]} = \frac{\sqrt{1{,}9714}}{4{,}4722} = 0{,}3139$$

$$\frac{\sigma_Y}{E[Y]} = \frac{\sqrt{0{,}5}}{1} = 0.7071$$

En termes relatius, Y es més dispersa que X però no en termes absoluts. Y té una esperança (centre de gravetat) menor que X que fa que les desviacions relativament tinguin un significat més acurat i eventualment diferent al que tenien inicialment.

4. (2 punts) Definim la variable Z= el nombre de vegades que surt un resultat senar. Calculeu la taula de probabilitat conjunta entre Y i Z, la covariància entre Y i Z, i interpreteu la correlació en termes de signe i valor.

Z es distribueix com Y.

	z=0	z=1	z=2
y=0	0	0	1/4
y=1	0	1/2	0
y=2	1/4	0	0

$$Cov = (0-1)(0-1)0 + (0-1)(1-1)0 + \frac{(0-1)(2-1)1}{4} + 0 + \frac{(1-1)(1-1)1}{2} + 0 + \frac{(2-1)(0-1)1}{4} + 0 + 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$Corr = -0{,}5/0{,}5 = -1$$

La correlació -1 ens dóna a entendre que existeix una relació lineal inversa perfecta.

NOM: ________________ COGNOMS: ____

(***Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs***)

Problema 3 (B3). Cada pregunta val 1 punt.

Tenim una variable X que calcula l'error que es comet en una certa mesura i que segueix el model Normal amb esperança 0 unitats i variància 4 unitats al quadrat.

1. Calculeu la probabilitat que l'error sigui superior a 2 unitats.

   P(X>2) = 1 – P(X<=2) = 1 – P(Z<=(2-0)/2) = 1 – P(Z<=1) = 1 – 0.8413 = 0.1587
   (taules)

2. Calculeu per a quin valor k resulta que la probabilitat que l'error sigui superior a k unitats val 0,25.

   P(X>k) = 0.25 P(X<=k) = 0.75 P(Z<=(k-0)/2) = 0.75
   Taules 0.7517 -> 0.68=(k-0)/2 -> k=1.36

Ara considerem que observem repetidament amb independència n errors; és a dir, n observacions de la variable X.

3. La nova variable que compta quantes de les n observacions tenen un valor superior al valor k de l'apartat 2, quin model segueix?, amb quins paràmetres?
   Q és Bin(n,p=0.25)

4. Calculeu la probabilitat que d'aquestes n observacions, més de 7 tinguin un valor superior al valor k de l'apartat 2, quan n val 10.
   P(Q>7) = 1 – P(Q<=7) = 1 – 0.9996 = 0.0004
   (taules)

5. Calculeu la probabilitat que d'aquestes n observacions, més de 70 tinguin un valor superior al valor k de l'apartat 2, quan n val 200 (ho heu de fer usant una aproximació).

   Q és Bin(n=200, p=0.25) aproximant a Normal és N(μ=50, σ=6.12)
   P(Q > 70) = 1 – P(Q<=70) = 1 – P(Z<=(70-50)/6.12) = 1 – P(Z<=3.27) = 1 – 1 = 0

Considerem ara $X_1, .., X_{100}$, 100 variables que calculen certa mesura de les quals desconeixem el model que segueixen però sí que sabem que són independents i idènticament distribuïdes amb esperança 2 unitats i variància 4 unitats al quadrat.

6. Calculeu la probabilitat que la suma de les 100 mesures (és a dir, la suma de les 100 variables) sigui superior a 180 unitats usant el Teorema Central del Límit.

   S és N(μ=2*100, σ=2*sqrt(100)) és N(μ=200, σ=20)

   P(S>180) = 1 – P(S<=180) = 1 – P(Z<=(180-200)/20) = 1 – P(Z<=-1) = 1 – (1 – P(Z<=1)) = P(Z<=1) = 0.8413

7. Trobeu el valor c que compleix $P[200 - c < X_1 + \cdots + X_{100} < 200 + c] = 0{,}95$ usant igualment el Teorema Central del Límit.

   ((200+c) – 200) / 20 = 1.96 -> c=39.2

Finalment, considerem tres variables X i Y que tenen model $N(0,1)$ i que són independents. Calculeu:

8. $P(X + Y > 1) =$ P(W >1) = 1 – P(W<=1) = 1 – P(Z<=(1-0)/sqrt(2)) = 1 – P(Z<=0.71) = 1 – 0.7611 = 0.2389
   X+Y=W és N(μ=0,σ=sqrt(2))

9. $P(X > Y + 1) =$ P(X – Y > 1) = P(W>1) = apartat 8 = 0.2389
   X-Y=W és N(μ=0,σ=sqrt(2))

10. E(4X+Y^2+8) = 4E(X) + E(Y^2) + 8 = 4*0 + 1 + 8 = 9
    E(Y^2)=V(Y)+$(E(X))^2$ = 1+0 = 1