Solució problema 1

A (1 punt cada apartat)

Com que cada tirada és la realització de la mateixa experiència aleatòria amb independència, les probabilitats demanades són molt simples de calcular:

1 És la probabilitat d'una sola intersecció de quatre successos independents i val $(1/3)^4$.

2 Com que la creu pot sortir en quatre posicions diferents, és la probabilitat de la unió disjunta de quatre interseccions equiprobables de successos independents, resultant al final $4(1/3)^3(2/3)$.

3 És la probabilitat d'una sola intersecció de successos independents i val $(1/3)^2(2/3)^2$.

4 Com que la quarta tirada és una experiència aleatòria independent de la primera tirada, val simplement 1/3.

5 És la probabilitat de la unió disjunta del succés "sortir 4 cares" i del succés "sortir 3 cares i una creu" i per tant val $(1/3)^4+4(1/3)^3(2/3)$.

En aquests cinc exercicis es valora sobretot conèixer el concepte d'independència i saber quan cal descompondre successos en unions disjuntes.

6 La variable que compta el nombre de cares en quatre tirades segueix la llei binomial amb paràmetres n=4 i p=1/3 i per tant la seva esperança és 4/3; la variable que compta el nombre de creus en quatre tirades segueix la llei binomial amb paràmetres n=4 i p=2/3 i per tant la seva esperança és 8/3.

7 La variabilitat del nombre de cares la dóna la variància d'una llei binomial: 4·1/3·(1-1/3)=8/9.

B (1.5 punts)

Ara ens plantegem el problema estadístic de decidir si la probabilitat de cara és 1/2 o no (equiprobabilitat o no).

Es tracta doncs d'una prova d'hipòtesis sobre una probabilitat teòrica π (probabilitat de cara):

H_0: $\pi=1/2$ versus H_1: $\pi\neq 1/2$

Estadístic: (p-π)/sqrt(π(1-π)/n)

Aquest estadístic, atès que tenim 150 realitzacions de l'experiència, segueix aproximadament la llei N(0,1)

Sota la hipòtesi nul·la l'estadístic queda (p-1/2)/sqrt(1/2·1/2/n)

El valor observat de l'estadístic sota la hipòtesi nul·la és (55/150-1/2)/sqrt(1/2·1/2/150)

Resulta -3.2660

La regió d'acceptació de la hipòtesi nul·la al 95% de confiança és (-1.96, 1.96)

Per tant, amb una confiança del 95% i segons les realitzacions observades, rebutgem la hipòtesi nul·la d'equiprobabilitat.

C (1.5 punts)

Seguim plantejant-nos un problema estadístic, amb les mateixes observacions d'abans, però ara voldríem donar possibles valors del paràmetre definidor del trucatge (π, probabilitat de cara) que no contradiguin l'observat.

La metodologia més adequada és construir un interval de confiança per al paràmetre π a partir de les observacions:

Estadístic: $(p-\pi)/\mathrm{sqrt}(\pi(1-\pi)/n)$

Interval al 95% de confiança: $p-1.96\mathrm{sqrt}(\pi(1-\pi)/n)\leq\pi\leq p+1.96\mathrm{sqrt}(\pi(1-\pi)/n)$

Naturalment hem d'estimar el paràmetre π en l'error tipus per p (55/150) o seguint un criteri conservador per 0.5

Usant per exemple el criteri conservador resulta l'interval (0.2866, 0.4467)

Per tant serien trucatges no contradictoris amb l'observat tots els definits per una probabilitat de cara dintre de l'interval

Així per exemple P(cara)=0.30 i P(creu)=0.70, P(cara)=0.40 i P(creu)=0.60.

A l'apartat C es valora entendre el concepte d'interval de confiança per a un paràmetre com a conjunt de valors que no contradiuen les observacions que han permès de construir l'interval.

NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 2 (B3-B4). Un estudi sobre fotografies digitals ha conclòs que la mida de les fotos es distribueix aleatòriament amb esperança 1 MB, però la distribució i la variabilitat difereixen segons el tipus de la càmera emprada per a obtenir la imatge.

1.- Per un primer tipus de càmera (A) en que la mida de les fotografies segueix una distribució exponencial, definiu la variable Y "mida d'una fotografia en la càmera A" : Y és Exp(λ=1) (E(Y) = 1 MB V(Y) = 1 MB^2)
i calculeu:

1.1.- (0,5 punts) la probabilitat que la mida d'una fotografia estigui entre 0.5 i 1.5 MB

$P(0.5 < Y < 1.5) = F_Y(1.5) - F_Y(0.5) = (1-\exp(-1*1.5)) - (1-\exp(-1*0.5)) = (1-0.22) - (1-0.61) = 0.39$

1.2.- (0,5 punts) la probabilitat que la mida d'una fotografia sigui superior a 2 MB

$P(Y>2) = 1-P(Y<=2) = \exp(-1*2) = 0.14$

2.- Per un segon tipus de càmera (B) en que la mida de les fotografies segueix una distribució uniforme amb σ=0.5 MB

2.1.- (0,5 punts) Definiu la variable X "mida d'una fotografia en la càmera B" indicant-ne els paràmetres, l'esperança i la variància

$E(X) = 1$ MB $\quad 1 = (a+b) / 2 \quad 2 = a+b$
$V(X) = (0.5)^2 = 0.25$ MB^2 $\quad 0.25 = (b-a)^2 / 12 \quad 1.7 = b-a$
$\Rightarrow$ a=0.15 i b=1.85
X és Unif [a=0.15,b=1.85]

2.2.- (0,5 punts) Calculeu la probabilitat que la mida d'una fotografia estigui entre 0.5 i 1.5 MB

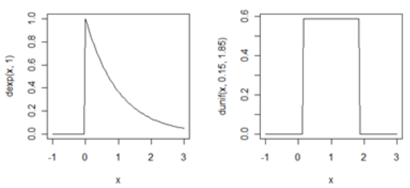
$P(0.5 < X < 1.5) = F_X(1.5) - F_X(0.5) = ((1.5-0.15)/1.7) - ((0.5-0.15)/1.7) = 0.79 - 0.21 = 0.58$

2.3.- (0,5 punts) Calculeu la probabilitat que la mida d'una fotografia sigui superior a 2 MB

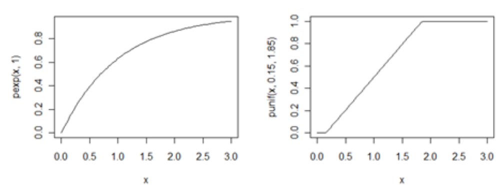
$P(X>2) = 0$ (la variable només pren valors entre a=0.15 i b=1.85)

3.- (0,5 punts) Dibuixeu aproximadament les distribucions dels dos casos anteriors i comenteu les característiques més destacades de la distribució de la mida de les fotografies en cada cas.

Unif: entre a i b totes les mides són igual de probables
Exp: la variabilitat és més gran; són més probables les mides petites però també són possibles mides molt grans



(funcions de densitat de Exp i Unif)



(funcions de distribució de probabilitat de Exp i Unif)

4.- En un cas de càmera B es fan ***n*** fotografies independents i es guarden juntes en el que anomenem bloc.

4.1.- (1 punt) Definiu la variable S "mida total de les ***n*** fotografies". Indiqueu i justifiqueu el model de probabilitat i els seus paràmetres

$S = X_1+X_2+...+X_n$ amb $E(X_i)=1=\mu_X$ i $V(X_i)=0.25=(0.5)^2=(\sigma_X)^2$
S és $N(\mu_S=n, \sigma_S=0.5\sqrt{n})$ ja que segons el TCL $\mu_S=n\,\mu_X$ i $\sigma_S= \sigma_X \sqrt{n}$

4.2.- (1 punt) Quin valor màxim pot tenir ***n*** per tal que amb una seguretat del 95% un bloc no ocupi més de 40 MB?

$P(S<40) = P(Z < ((40-n)/(0.5\sqrt{n}))) = 0.95$ -> $(40-n)/(0.5\sqrt{n}) = 1.645$ -> $\cancel{n >= 67}$

5.- En un cas concret recollim 30 mides d'una mostra aleatòria simple de fotos obtingudes amb una càmera del cas B que resumim en els següents resultats:

$$\sum x_i = 33 \quad \sum x_i^2 = 42.98$$

5.1.- (0.5 punts) Calculeu estimacions puntuals de la mitjana i de la desviació tipus de la mida de les fotografies d'aquesta càmera.

$\bar{x}$ = 33 / 30 = 1.1 MB
s^2 = (42.98 – (33^2/30)) / 29 = 0.23 -> *s = 0.48 MB*

5.2.- (0.5 punts) Calculeu l'error tipus de la mitjana i expliqueu què significa

se = 0.48 / √30 = 0.088

És un indicador de la variabilitat de la v.a. mitjana.
Indica la variabilitat de l'estimador mitjana. Com més gran és el valor de n aconseguim menys variabilitat (més precisió)

5.3.- (2 punts) Calculeu l'estimació per interval de confiança al 95% per a la mitjana poblacional, i interpreteu-lo

Partint només de les dades mostrals, l'IC és
$1.1 \pm t_{29,0.975}\, 0.48/\sqrt{30} = 1.1 \pm 2.045 * 0.087 = 1.1 \pm 0.18$ -> [0.92 , 1.28]

Indica que tenim una confiança del 95% de que el veritable valor del paràmetre mitjana poblacional de la mida de les fotografies està entre 0.92 MB i 1.28 MB

5.4.- (1 punt) Justifiqueu si es pot creure o no que aquestes fotografies corresponen a un model amb esperança 1 MB amb una confiança del 95%

Si, perquè 1 MB cau dins IC del 95%
Una PH sobre si el paràmetre mitjana poblacional és 1 Mb concluiria que s'accepta amb confiança del 95%

5.5.- (1 punt) Calculeu el nombre de fotografies que caldrien per assegurar que l'amplitud màxima de l'interval de confiança al 95% per a la mitjana poblacional fos de 0.30 (és a dir, de 0.15 pel semi-interval). Assumiu que la desviació poblacional és de 0.5 MB

L'amplitud de l'interval seria $2 * z_{0.975}\, 0.5/\sqrt{n} = 0.30$
Per tant, $z_{,0.975}\, 0.5/\sqrt{n} = 0.15$
$1.96 * 0.5 = 0.15 * \sqrt{n}$
$6.53 = \sqrt{n}$ -> n >= 43

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

qt(0.975,49)=2.0096	qt(0.975,48)=2.0106	qt(0.975,98)=1.9845	pt(0.975,49)= 0.83283	pt(0.975,48)= 0.83278	pt(0.975,98)=0.83402
qt(0.95,49) = 1.6766	qt(0.95,48) = 1.6772	qt(0.95,98) = 1.6606	pt(0.95,49) = 0.82661	pt(0.95,48) = 0.82656	pt(0.95,98) = 0.82778
qt(0.90,49) = 1.2991	qt(0.90,48) = 1.2994	qt(0.90,98) = 1.2902	pt(0.90,49) = 0.81374	pt(0.90,48) = 0.81369	pt(0.90,98) = 0.81484

Problema 3 (B5-B6). Desitgem comparar els temps de les aplicacions media.io (**M**) i audio.online (**A**) per convertir de .mp3 a .wma. Per això, hem seleccionat a l'atzar 50 cançons a l'atzar del *Top 500 Rock and Roll songs* i hem recollit el temps **Y** de conversió per cada cançó amb cada aplicació executades amb ordre aleatori. A més a més, hem recollit el pes (**P**) en MB de cada arxiu original. La taula mostra la seva descriptiva i la del seus logaritmes naturals, així com de les diferències respectives (anomenades D i DL).

N=50	Mit-jana	Desv. Est
P	4.106	0.727
Y_M	8.152	4.277
Y_A	6.566	4.648
Y_M - Y_A = D	1.586	4.338
Log(P)=LP	1.396	0.189
$Log(Y_M)$	1.953	0.565
$Log(Y_A)$	1.730	0.523
$LogY_M$-$LogY_A$ = DL	0.223	0.549

1) [1] **punt** Es tracta de dues mostres independents o aparellades? Raoneu la resposta.

Aparellades, ja que la mateixa cançó es convertida pels 2 sistemes.

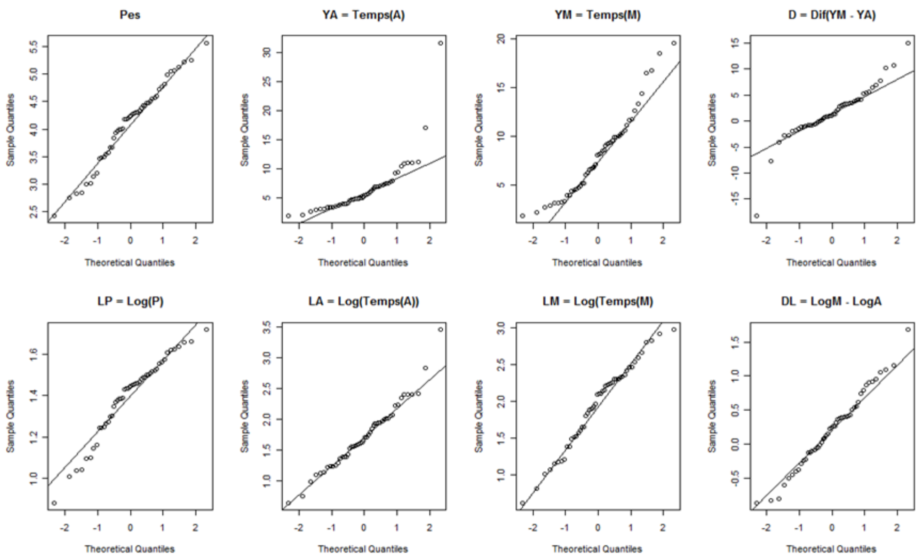
[OK: Es pot fer la diferència ja que els temps ièsim tenen en comú la cançó.]

[OK: Com es pot esperar que a més temps, més pes ($r_{pes,temps}$ >0), els temps observats sota els 2 sistemes seran més similars per la mateixa cançó ($r_{YM,YA}$ >0).]

2) [1] **punt** Mirant la descriptiva de la variable temps (positiva) Y_A, valoreu si el model Normal pot servir per representar-la.

No, la Desv.Est és massa gran per la mitjana observada: d'acord amb la Normal, el 95% de les observacions estarien a ±1.96 vegades σ de μ, el que portaria a temps negatius. [Noteu que per sota de 0 haurien de quedar: $P(Y_A<0)=P(Z<-6.566/4.648)\approx P(Z<-1.41)\approx 0.078$, fent pobre la representació amb una D. Normal].

3) [1] **punt** Veient els Q-Q plots adjunts, digueu si les variables s'acosten al model Normal i quines s'acosten més.



Fatal Y_A, Mal Y_M (i D).

En el cas del Pes, ajusta millor a la Normal P que Log(P), però pels temps ajusten millor els logs, i la seva diferència.

[Si "totes bé", màxim: 0.3]

4) [2] **punts** Contrasteu la H_0 de que la esperança poblacional de (μ_{DL}) de DL (on DL=log(Y_M)-log(Y_A)=log(Y_M/Y_A)) sigui 0 (=log(1)) enfront de la H_1 de que tenen temps diferents. <u>Indiqueu</u>: hipòtesi, premisses, estadístic, distribució i punt crític, càlculs, resultats i interpretació.

Prova d'hipòtesi bilateral: Ho: $\mu_{Log(Y_M/Y_A)} = 0$ en front de H_1: $\mu_{Log(Y_M/Y_A)} \neq 0$

Premisses: Les diferències log(Y_M)-log(Y_A) = log(Y_M/Y_A) provenen d'una distribució normal i son independents entre si.

Estadístic: $\hat{t} = \dfrac{(\tilde{D} - \mu_D)_0}{s_D\sqrt{1/50}} \sim t_{n-1}$ que en aquest cas serà t_{49}. Si α=0.05=5% bilateral, punt crític $t_{0.975,49}$= 2.0096.

El valor de l'estadístic és $SE(\tilde{D}_{Log(JIT)-Log(NO)}) = S_{DLogs}\sqrt{1/n_D} \approx 0.549\sqrt{1/50} \approx 0{,}0776$ $\hat{t} = \dfrac{(0.223-0)}{0.0776} \approx 2.872$

Com que 2.872 > 2.0096, rebutgem H_0

És a dir, hem demostrat que no triguen el mateix.

[Si sigma coneguda, max: 0.5. Si solo copia formulari, max 0.3]

5) [1 punt] Trobeu l'$IC_{95\%}$ del rati de rendiment Y_M/Y_A. Interpreteu.

Com $\tilde{D} \approx 0.223$, $t_{0.975,49} = 2.0096$ i $SE(\tilde{D}_{Log(Y_M/Y_A)}) \approx 0{,}0776$

$$IC_{95\%}\ E(\tilde{D}_{Log(Y_M/Y_A)}) = \tilde{D}_{Log(Y_M/Y_A)} + t_{0.975,49} \cdot SE\left(\tilde{D}_{Log\left(\frac{Y_M}{Y_A}\right)}\right) \approx 0.223 \pm 2.0096 \cdot 0.0776 \approx [0.066974,\ 0.37903]$$

Com $e^{0.223} \approx 1.24982$ i $[e^{0.066974}, e^{0.37903}] \approx [1.06927, 1.46086]$

M triga un 25% més que A, si bé per la incertesa de la estimació, aquest valor podria ser qualsevol entre 7 i 46%

6) [3 punts] La taula de la dreta reprodueix els coeficients de la recta de regressió de la resposta Y_A en funció del Pes. Interpreteu els resultats de la regressió, calculeu els valors X, Y i Z, i trobeu la predicció puntual i per interval del temps Y_A per convertir un arxiu de 5 MB de pes.

```
> summary(lm(YA~P))
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -6.0899     3.3695  -1.807 0.076978 .
P             3.0825     XXXXXX   YYYYY 0.000391
Residual standard error: 4.115 on ZZ degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2325,     Adjusted R-squared: 0.2165
F-statistic: 14.54 on 1 and 48 DF,  p-value: 0.0003913
```

Interpretació) Com el pendent de la recta és significatiu (0.000391<<0.05), podem dir que el temps de conversió depèn del pes del fitxer –com era raonable esperar. Però l'R^2 val 23%, indicant que el procés no és molt predicible.

Càlcul $X = SE(b_1) = \sqrt{\frac{S^2}{(n-1)S_P^2}} = \sqrt{\frac{16.92738}{(50-1)\cdot 0.727^2}} \approx \sqrt{0.65361928} \approx 0.80846724$

$NOTA$: $4.115^2 \approx S^2 = \frac{(n-1)S_{Y_A}^2(1-r^2)}{(n-2)} = \frac{(50-1)4.648^2(1-0.2325)}{(50-2)} \approx 16.92738 \approx 4.11429^2$

NOTA: $0.2325 = r^2 = \left[\frac{S_{Y_A,P}}{S_{Y_A}S_P}\right]^2 = \left[\frac{S_{Y_A,P}/S_P}{S_{Y_A}}\right]^2 = \left[\frac{S_P b_1}{S_{Y_A}}\right]^2 \approx \left[\frac{0.727\cdot 3.0825}{4.648}\right]^2 \approx 0.232457$

Càlcul $Y = t\text{-}ratio = \frac{Estimate}{SE_{estimate}} \approx \frac{3.0825}{0.8085} \approx 3.8128$

Càlcul Z = n–2 = 50–2 = 48

Trobeu) $\widehat{Y_h} = b_o + b_1 X_h \rightarrow \widehat{Y_{A_h}} = b_o + b_1 P_h \approx -6.0899 + 3.0825 \cdot 5 \approx 9.3226$

$$SE(\widehat{Y_h}) = \sqrt{S^2 * \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(P_h - \bar{P})^2}{(n-1)S_P^2}\right]} \approx \sqrt{16.92738 * \left[1 + \frac{1}{50} + \frac{(5-4.106)^2}{(50-1)0.727^2}\right]} \approx \sqrt{17.7883243} \approx 4.2176$$

$$IC_{95\%}\ E(\widehat{Y_{h,indiv}}) = \widehat{Y_h} + t_{0.975,48} \cdot SE(\widehat{Y_h}) \approx 9.3226 \pm 2.0106 \cdot 4.2176 \approx [0.84265,\ 17.8025]$$

Podem afirmar, amb una confiança del 95% que el temps de conversió dels fitxers de 5 MB pel algoritme A estarà entre 0.84 i 17.80 segons. La amplitud de l'interval reflexa la variabilitat del procés i, per tant, la importància de tenir-la en compte.

7) [1 punt] La taula de la dreta reprodueix els coeficients de la recta de regressió de la resposta $\log(Y_M)$-$\log(Y_A) = \log(Y_M/Y_A)$ en funció de Log(Pes). Interpreteu aquest nous resultats i feu una interpretació conjunta de les preguntes 4 a 7.

```
> summary(lm(DL~LP))
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.7926     0.9969   0.795    0.431
LP           -0.0156     0.0383  -0.408    0.685

Residual standard error: 0.514 on 48 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.00345,    Adjusted R-squared: -0.01731
F-statistic: 0.1662 on 1 and 48 DF,  p-value: 0.6853
```

Ni la pendent ni la constant són significatives i el coeficient de determinació es pràcticament nul.
Per tant, la relació lineal ni és significativa ni explica res.
En breu, Log(Pes) no matisa (linealment) el quocient del seus rendiments ($\log(Y_M/Y_A)$)

Al apartat 4 i 5 hem vist que M triga més que A: un 25% més. Però a l'apartat 6, hem vist que el temps que triga A depèn del pes del fitxer i això podia fer esperar que l'avantatge de A sobre B podia dependre del pes. I potser sigui així si tractéssim les diferències (Y_M-Y_A), però estudiar el rati Y_M/Y_A ens porta l'avantatge de que Y_M/Y_A és independent del pes del fitxer:.
En resum: M triga un 25% ($IC_{95\%}$ de 7 a 46%) més que A, independentment del pes del fitxer.