

NOM: _____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 1 (B1-B2). El Li-Fi és un sistema de comunicació sense fil basat en la transmissió de dades a través d'ones electromagnètiques en l'espectre de la llum visible. En un futur no molt llunyà, aquesta tecnologia es preveu que sigui una alternativa seriosa al Wi-Fi actual ja que presenta alguns avantatges. Actualment, s'estan realitzant estudis sobre el potencial d'aquesta nova tecnologia mesurant diverses característiques en l'enviament de paquets de dades.

Imaginem que un paquet enviat amb aquesta tecnologia Li-Fi és rebut correctament amb una probabilitat de 0.95, i si és enviat per Wi-Fi la probabilitat de rebre's correctament és de 0.90. Considerem l'experiència aleatòria de triar a l'atzar una de les dues tecnologies amb igual probabilitat. Llavors s'envien 2 paquets per veure si arriben o no, assumint independència entre ells.

- Indiqueu el conjunt de resultats i les seves probabilitats (1 punt)

(Si és paquet arribat correctament, No és paquet no arribat correctament)

$$\Omega = \{ (Li-Fi, Si, Si), (Li-Fi, Si, No), (Li-Fi, No, Si), (Li-Fi, No, No), (Wi-Fi, Si, Si), (Wi-Fi, Si, No), (Wi-Fi, no, si), (Wi-Fi, no, no) \} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$$

$$\begin{aligned} P((Li-Fi, Si, Si)) &= P(w_1) = 0.5 \cdot 0.95 \cdot 0.95 = 0.451 \\ P((Li-Fi, Si, No)) &= P(w_2) = 0.5 \cdot 0.95 \cdot 0.05 = 0.024 \\ P((Li-Fi, No, Si)) &= P(w_3) = 0.5 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 0.024 \\ P((Li-Fi, No, No)) &= P(w_4) = 0.5 \cdot 0.05 \cdot 0.05 = 0.001 \\ P((Wi-Fi, Si, Si)) &= P(w_5) = 0.5 \cdot 0.90 \cdot 0.90 = 0.405 \\ P((Wi-Fi, Si, No)) &= P(w_6) = 0.5 \cdot 0.90 \cdot 0.10 = 0.045 \\ P((Wi-Fi, No, Si)) &= P(w_7) = 0.5 \cdot 0.10 \cdot 0.90 = 0.045 \\ P((Wi-Fi, No, No)) &= P(w_8) = 0.5 \cdot 0.10 \cdot 0.10 = 0.005 \end{aligned}$$

-Definint l'esdeveniment A com "algun paquet arriba correctament", calculeu-ne la probabilitat (1 punt)

$$\begin{aligned} A &= \text{"algun paquet, un o dos, arriba correctament"} \quad \neg A \text{ "no ha arribat cap paquet correctament"} \\ P(A) &= P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + P(w_5) + P(w_6) + P(w_7) = \\ &= 1 - P(\neg A) = 1 - (P((Li-Fi, No, No)) + P((Wi-Fi, No, No))) = 1 - (0.006) \\ &= \mathbf{0.994} \end{aligned}$$

- Quina és la probabilitat que si no ha arribat cap paquet correctament la tecnologia triada hagi estat enviar per Li-Fi? (1 punt)

$$P(Li-Fi | \neg A) = P((Li-Fi, \neg A)) / P(\neg A) = 0.001 / 0.006 = \mathbf{0.1666}$$

- Quina és la probabilitat que arribin els dos paquets correctament, sigui quina sigui la tecnologia triada? (1 punt)

$$P(w_1) + P(w_5) = 0.451 + 0.405 = \mathbf{0.856}$$

- Indiqueu i justifiqueu si hi ha independència o no entre enviar per Li-Fi o Wi-Fi i arribar correctament o no (1 punt)

No. Per exemple, la probabilitat d'arribar un paquet correctament condicionat a la tecnologia Li-Fi (0.95) és diferent a la condicionada a la tecnologia Wi-Fi (0.90)

A partir de l'experiència anterior definim la variable aleatòria N nombre de paquets rebuts correctament.

- Indiqueu i representeu gràficament la funció de probabilitat i la funció de distribució de probabilitat d'aquesta variable (1 punt)

N és nombre de paquets arribats correctament

Funció de probabilitat: $p_N(0) = P(N=0) = P(w4)+P(w8) = 0.006$
 $p_N(1) = P(N=1) = P(w2)+P(w3)+P(w6)+P(w7) = 0.138$
 $p_N(2) = P(N=2) = P(w1)+P(w5) = 0.856$

Funció de distribució de probabilitat: $F_N(0) = p_N(0) = 0.006$
 $F_N(1) = p_N(0) + p_N(1) = 0.144$
 $F_N(2) = p_N(0) + p_N(1) + p_N(2) = 1$

- Calculeu l'esperança i la variància d'aquesta variable (1 punt)

$$E(N) = 0 * 0.006 + 1 * 0.138 + 2 * 0.856 = 1.85$$

$$V(N) = (0-1.85)^2 * 0.006 + (1-1.85)^2 * 0.138 + (2-1.85)^2 * 0.856 = 0.02 + 0.1 + 0.02 = 0.14$$

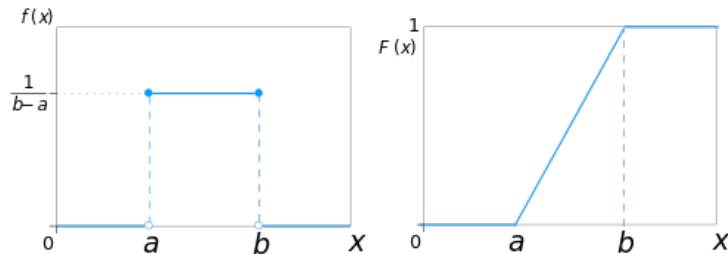
- Calculeu, amb aquesta variable, la probabilitat de rebre 2 paquets o no rebre'n cap (1 punt)

$$P(N=2) + P(N=0) = 0.006 + 0.856 = 0.862$$

Finalment considerarem la variable aleatòria contínua "moment en que es fa una transmissió al llarg d'un minut" sabent que al llarg dels 60 segons la probabilitat és la mateixa.

- Representeu gràficament la funció de densitat i la funció de distribució de probabilitat d'aquesta variable (1 punt)

a=0 b=60



(com que correspon a model uniforme les funcions són $f_x(x) = \frac{1}{60-0} = \frac{1}{60}$ $F_x(x) = \frac{x-0}{60-0} = \frac{x}{60}$)

- Calculeu la probabilitat que la transmissió es faci abans de 25 segons (1 punt)

$$\text{Area rectangle} = 1/60 * 25 = 0.417$$

$$\int_0^{25} 1/60 dx = \left[\frac{x}{60} \right]_0^{25} = 25/60 - 0/60 = 0.417$$

NOM: _____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 2 (B3-B4). Seguint amb l'exemple Li-Fi del problema anterior, considerem que la velocitat V de transmissió (en Mb/s) usant aquesta tecnologia es distribueix segons el model Normal amb esperança 500 Mb/s i desviació 100 Mb/s

- Calculeu la probabilitat que la velocitat V sigui superior a 400 Mb/s (1 punt)

$$P(V > 400) = P(Z > (400 - 500) / 100) = P(Z > -1) = (P(Z \leq 1)) = \mathbf{0.8413}$$

- Calculeu la probabilitat que la velocitat V estigui entre 300 Mb/s i 700 Mb/s (1 punt)

$$\begin{aligned} P(300 < V < 700) &= P(V < 700) - P(V \leq 300) = \\ &= P(Z < 2) - P(Z \leq -2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 2(P(Z < 2)) - 1 = 2 * 0.9772 - 1 = \mathbf{0.9544} \end{aligned}$$

- Quina és la velocitat mínima que podem assegurar amb una probabilitat del 95% ? (1 punt)

$$P(V > \min) = 0.95$$

$$P(V < k) = 0.95 \quad (h = (k - 500) / 100)$$

$$P(Z < h) = 0.95 \quad \rightarrow h = 1.645 \quad (\text{o } 1.64 \text{ o } 1.65) \quad \rightarrow k = h * 100 + 500 = 664.5 \quad \rightarrow \min = 500 - 164.5 = \mathbf{335.5}$$

Considerem ara la variable N_{20} nombre de paquets rebuts correctament cada 20 paquets transmesos amb Li-Fi, on la probabilitat que un paquet de dades arribi correctament és 0.95.

- Definiu aquesta variable nombre de paquets rebuts correctament entre 20 transmissions, indicant model i paràmetres, esperança i variància (1 punt)

N_{20} "és nombre de paquets rebuts correctament entre 20"

N_{20} és Bin($n=20, p=0.95$)

$$E(N_{20}) = n * p = 19$$

$$V(N_{20}) = n * p * q = 0.95$$

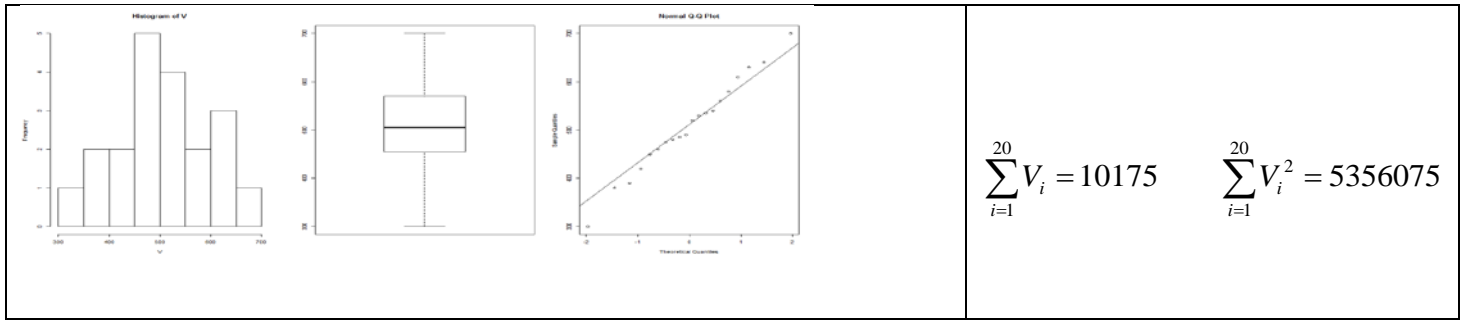
- Calculeu la probabilitat que entre 10 i 15 paquets es rebin correctament (1 punt)

$$\begin{aligned} P(10 \leq N_{20} \leq 15) &= P(N_{20} \leq 15) - P(N_{20} < 10) = \\ &= F_{N_{20}}(15) - F_{N_{20}}(9) = \end{aligned}$$

NN és Bin($n=20, p=0.05$)

$$= (1 - F_{NN}(4)) - (1 - F_{NN}(10)) = (1 - 0.9974) - (1 - 1) = \mathbf{0.0026}$$

Ara volem inferir resultats a partir de dades mostrals. Usant el Li-Fi, s'han recollit les velocitats mitjanes de transmissió (en Mb/s) per 20 paquets aleatoris (20 observacions de la variable V) obtenint els següents resultats:



- Doneu una estimació puntual de la mitjana, de la desviació i de l'error estàndard de l'estimador de la mitjana poblacional (1 punt)

$$\text{mean} = 10175/20 = 508.75$$

$$s = \text{sqrt}((5356075 - (10175 * 10175 / 20)) / 19) = 97.21$$

$$s/\text{sqrt}(20) = 21.74$$

- Feu la prova d'hipòtesi sobre si el valor esperat de la mitjana és 500 Mb o no (2 punts)

Especifiqueu les hipòtesis i indiqueu si el test és unilateral o bilateral

$$H_0: \mu_V = 500 \quad \text{Bilateral}$$

$$H_1: \mu_V \neq 500$$

Indiqueu quin és l'estadístic per fer la prova, la seva distribució sota la hipòtesi nul·la i les premisses

$$t = \frac{\bar{v} - 500}{s/\sqrt{n}} \sim t_{19} \quad \text{Premisses: m.a.s i V Normal}$$

Proporcioneu el valor de l'estadístic

$$t = \frac{508.75 - 500}{97.21/\sqrt{20}} = \frac{8.75}{21.74} = 0.40$$

Indiqueu el o els punts crítics de la prova

$$\text{punts crítics } (t_{19, 0.975}) \quad -2.093 \quad \text{i} \quad +2.093$$

- Proporcioneu un interval de confiança del 95% per a la μ . Indiqueu com es podria haver dissenyat l'estudi per aconseguir un IC més estret sense canviar la confiança (1 punt)

$$\bar{v} \pm \frac{t_{19, 0.975} s}{\sqrt{n}} = 508.75 \pm 2.093 * 21.74 = 508.75 \pm 45.5 \quad \rightarrow \quad [463.26, 554.25]$$

IC més estret agafant n més gran

- Concloeu i interpreteu la prova d'hipòtesi i l'IC (1 punt)

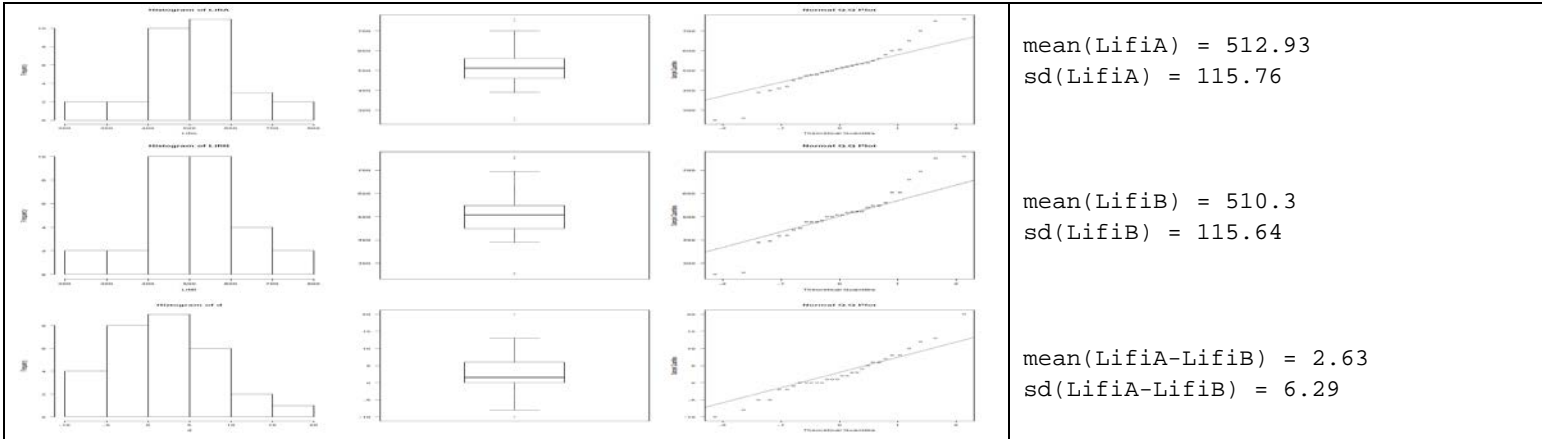
No hi ha evidència per rebutjar la hipòtesi nul·la (l'estadístic 0.4 està dins dels punts crítics). Podem afirmar que la velocitat de transmissió és 500 Mb/s

Valor a prova de 500 està dins IC. Podem acceptar que la velocitat de transmissió és 500 Mb/s. Amb una confiança del 95% el valor esperat de la mitjana de velocitat estarà entre 463.26 i 554.25

NOM: _____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 3 (B5-B6). També a partir del cas dels problemes anteriors, es comparen 2 empreses (A i B) que tenen la tecnologia Li-Fi. Realitzen un experiment transmetent uns mateixos 30 paquets de dades amb les tecnologies de les 2 empreses. Els resultats de les velocitats i les seves diferències són:



- Indiqueu i justifiqueu d'acord amb l'enunciat si el disseny emprat és independent o aparellat, i quines característiques o avantatges té (1 punt)

Són mostres aparellades perquè són uns mateixos 30 paquets que es posen a prova en cada empresa.
Per a cada paquet es té el resultat a l'empresa A i a l'empresa B
La variabilitat és més "controlada" en el disseny aparellat, menys variabilitat.

Es vol demostrar que la mitjana de velocitat a l'empresa A és superior a la de l'empresa B.

- Realitzeu la prova d'hipòtesi sobre si la velocitat mitjana de transmissió de l'empresa A es pot considerar igual o superior a la de l'empresa B amb una confiança del 95% (2 punts):

Especifiqueu les hipòtesis i indiqueu si el test és unilateral o bilateral (D=LifiA-LifiB)

$H_0: \mu_{LifiA} - \mu_{LifiB} = 0$ ($\mu_D = 0$ o bé $\mu_D \leq 0$)
 $H_1: \mu_{LifiA} - \mu_{LifiB} > 0$ ($\mu_D > 0$) Unilateral

Indiqueu quin és l'estadístic per fer la prova, la seva distribució sota la hipòtesi nul·la i les premisses

$t = \frac{\bar{d} - 0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{29}$ Premisses: m.a.s i dades Normals

Proporcioneu el valor de l'estadístic

$2.63 / (6.29/\text{sqrt}(30)) = 2.29$

Doneu el o els punts crítics de la prova

$t_{29,0.95} = 1.699$

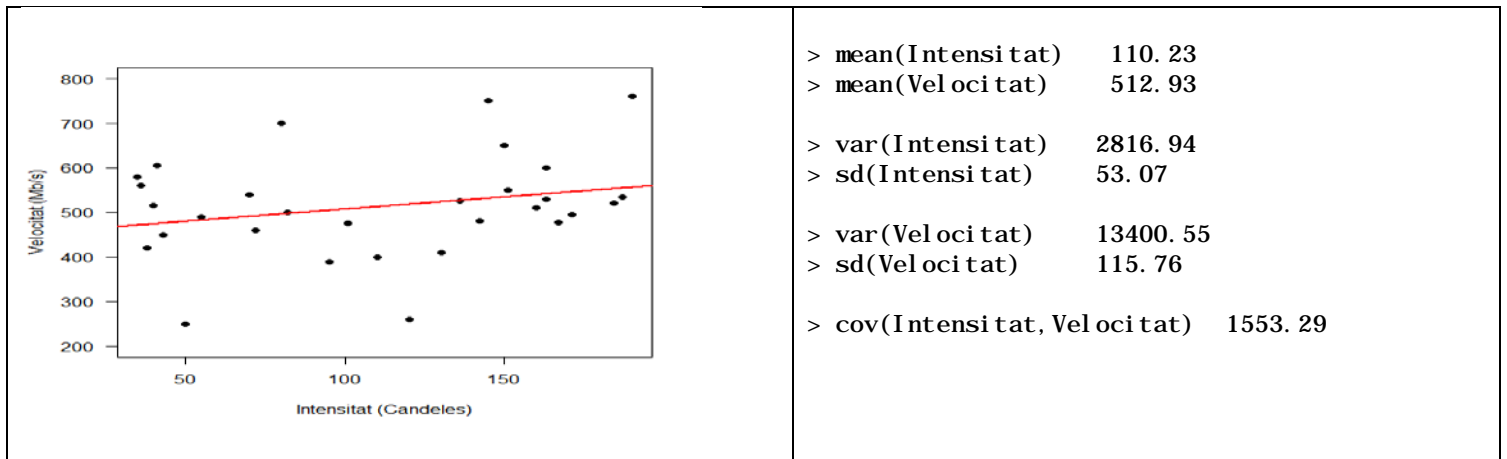
- Concloeu i Interpreteu la prova d'hipòtesi amb un gràfic situant les àrees d'acceptació i de rebuig de la hipòtesi nul·la (1 punt)

Hi ha evidència per rebutjar la hipòtesi nul·la (l'estadístic 2.29 està més enllà del punt crític 1.699). Podem afirmar que la velocitat de l'empresa A és significativament superior al de l'empresa B amb una confiança del 95%

- Indiqueu si canvia, i com, la conclusió de la prova i algú dels càlculs si es fa amb una confiança del 99% (1 punt)

Canvia el punt crític $t_{29,0.99} = 2.462$
 Amb una confiança del 99% NO hi ha evidència per rebutjar la hipòtesi nul·la (l'estadístic 2.29 NO està més enllà del punt crític 2.462), per tant NO es pot afirmar que la velocitat de l'empresa A sigui significativament superior al de l'empresa B amb una confiança del 99%

Un dels aspectes que preocupa més a aquestes empreses és el fet de que la velocitat depengui en excés de la intensitat lumínica, ja que un dels desavantatges més grans d'aquesta tecnologia és que per poder transmetre dades sempre s'ha de tenir una font de llum encesa. Per aquest motiu, varen fer un estudi, amb els 30 paquets transmesos per l'empresa A, de com fluctuava la velocitat mesurada en Mb/s en funció de la intensitat lumínica mesurada en Candeles.



- Estimeu puntualment els coeficients de la recta i interpreteu-los (1 punt)

$$b_1 = 1553.29 / 2816.94 = 0.55$$

$$b_0 = 512.93 - 0.55 * 110.23 = 452.3$$

b_1 pendent, cada unitat més d'intensitat implica 0.55 Mb/s de més

b_0 ordenada a l'origen (en aquest cas 0 unitats d'intensitat està molt fora el rang estudiat i no té sentit relacionar-hi la velocitat)

- Estimeu la desviació residual σ i interpreta-la (1 punt)

$$s^2 = (29 * (13400.55 - 0.55 * 1553.29)) / 28 = 12994.32$$

$$s = 114.0$$

És un estimador de la variabilitat dels residus, de la variabilitat dels punts al voltant de la recta (que en aquest cas ho estan força)

- Calculeu un IC95% pel pendent de la recta (1 punt)

$$Sb_1 = \sqrt{12994.32 / 29 * 2816.94} = 0.4$$

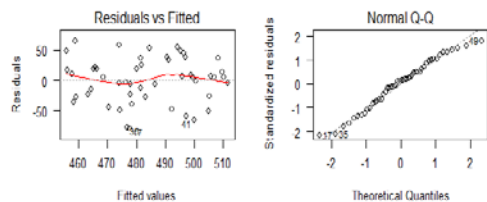
$$b_1 \pm t_{28, 0.975} Sb_1 = 0.55 \pm 2.048 * 0.4 \rightarrow [-0.27, 1.37]$$

- Interpreteu l'anterior IC i indiqueu què aporta sobre la dependència entre Intensitat i Velocitat (1 punt)

Amb una confiança del 95% el valor poblacional de la pendent està entre -0.27 i 1.37

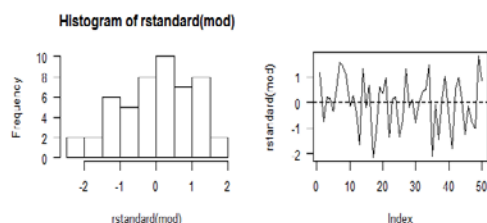
Un valor de la pendent de 0 pertany al IC per tant no hi ha evidència per rebutjar que la recta sigui plana i no hi hagi relació lineal entre la intensitat i la velocitat

- Valoreu les premisses de linealitat, homoscedasticitat, normalitat i independència veient els gràfics dels residus (1 punt)



Linealitat: no molt clara al plot [1,1] així com feble al plot entre Intensitat i Velocitat

Homoscedasticitat: raonable, no hi ha patró en el plot [1,1], no hi ha zones amb més i menys variabilitat



Normalitat: l'ajust a una normal és força correcte en el QQplot [1,2] ajustant-se a una recta, i l'histograma [2,1] té força forma de campana de Gauss excepte de més allargada per l'esquerra

Independència: molt raonable, ja que no hi ha patró que indiqui dependència en el plot [2,2]