NOM:___________________________COGNOM:____

(*Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs*)

Problema 1 (B1)

En una botiga amb alarma, la probabilitat que una nit qualsevol hi hagi un intent de robatori és 0.05. Si hi ha intent de robatori l'alarma es dispara amb probabilitat 0.95, i si no n'hi ha hagut intent de robatori la probabilitat que es dispari, per error, és de 0.05. Si es dispara l'alarma es bloqueja la porta d'entrada.

(1 punt) Indiqueu el conjunt de resultats i les seves probabilitats.

Ω ={ (I,A),(I,¬A),(¬I,A), (¬I,¬A) } = {w1,w2,w3,w4}
(I és intent de robatori, ¬I és no intent de robatori, A és alarma disparada, ¬A és alarma no disparada)

P(w1) = 0.05 0.95 = 0.0475

P(w2) = 0.05 0.05 = 0.0025

P(w3) = 0.95 0.05 = 0.0475

P(w4) = 0.95 0.95 = 0.9025

(1 punt) Indiqueu la taula de probabilitats conjuntes i marginals.

	A	¬A	
I	0.0475	0.0025	0.05
¬I	0.0475	0.9025	0.95
	0.095	0.905	

(1 punt) Calculeu la probabilitat que un dia concret es bloquegi la porta d'entrada.

B és bloqueig porta entrada B = {(I,A),(¬I,A)}

P(B) = P(w1) + P(w3) = 0.0475 + 0.0475 = 0.095
= P(A) = 0.095

(1 punt) Justifiqueu si és independent o no el fet de que soni l'alarma i de que hi hagi hagut intent de robatori.

No és independent ja que la probabilitat de que soni l'alarma no és igual si hi ha hagut intent de robatori o no.
És a dir, P(A|I)=0.95 ≠ P(A|¬I)=0.05 i és diferent de P(A)
O bé P(A ∩ I) = 0.0475 ≠ P(A)P(I)=0.095*0.05=0.00475

En una altra botiga amb les mateixes probabilitats d'intent de robatori i de sonar l'alarma que l'anterior, quan sona l'alarma automàticament hi ha un avís als serveis de seguretat que arriben en menys de 20 minuts una de cada cinc vegades.
(1 punt) Indiqueu el conjunt de resultats i les seves probabilitats.

Ω = { (I,A,S20), (I,A,¬S20) (I,¬A),(¬I,A,S20),(¬I,A,¬S20),(¬I,¬A) } = {w1,w2,w3,w4,w5,w6}
(I és intent de robatori, ¬I és no intent de robatori, A és alarma disparada, ¬A és alarma no disparada)
(S20 és seguretat en menys de 20 minuts, ¬S20 és seguretat no en menys de 20 minuts)

P(w1) = 0.05 0.95 0.20 = 0.0095

P(w2) = 0.05 0.95 0.80 = 0.038

P(w3) = 0.05 0.05 = 0.0025

P(w4) = 0.95 0.05 0.20 = 0.0095

P(w5) = 0.95 0.05 0.80 = 0.038

P(w6) = 0.95 0.95 = 0.9025

(1 punt) Justifiqueu si és independent o no el que el servei de seguretat arribi en menys de 20 minuts i de que hi hagi hagut intent de robatori.

Si és independent ja que la probabilitat d'arribar en menys de 20 minuts o no és la mateixa si hi ha hagut intent de robatori o no (és a dir, P(S20|I)=P(S20|¬I))

(1 punt) Quina és la probabilitat que els serveis de seguretat arribin en menys de 20 minuts i hi hagi hagut intent de robatori i soni l'alarma?
P((I,A,S20)) = 0.05 0.95 0.20 = 0.0095

(1 punt) Que és més probable que els serveis de seguretat arribin en menys de 20 minuts i hi hagi hagut intent de robatori i soni l'alarma o que hi arribin i l'alarma sona per error?
P((I,A,S20)) = 0.05 0.95 0.20 = 0.0095
P((¬I,A,S20)) = 0.95 0.05 0.20 = 0.0095
Són igualment probables

(1 punt) Quina és la probabilitat que sabent que ha sonat l'alarma hi hagi hagut un intent de robatori?

P((I|A)) = P(I∩A)/P(A) = 0.05*0.95 / (0.05*0.95+0.95*0.05) = 0.0475 / 0.095 = 0.5

(1 punt) Quina és la probabilitat que hi hagi hagut intent de robatori si no ha sonat l'alarma?

P((I|¬A)) = P(I∩¬A)/P(¬A) = 0.05*0.05 / (0.05*0.05+0.95*0.95) = 0.0025 / 0.905 = 0.0028

Cognoms, nom: ....

Problema B2. L'empresa PC-OK es dedica al muntatge d'ordinadors adreçats al gran públic i, per raons de cost, s'ha especialitzat en un únic tipus de PC. Internament, però, aquests PC's porten un microprocessador de entre dos models, que anomenarem tipus I i tipus II. Per a la memòria RAM, l'empresa té tres proveïdors, amb característiques molt semblants excepte la latència: el primer i el segon tipus de memòria són CL9 (9 cicles de rellotge des de la petició fins que la dada està disponible), i el tercer és CL10. Els demés components són comuns a tots els ordinadors.

Des del servei de reparacions s'ha observat que no totes les combinacions són igual de resistents a les avaries. En concret, dels ordinadors que van entrar avariats en període de garantia, s'han observat els percentatges següents:

		RAM 1	RAM 2	RAM 3
μP	I	15%	0%	20%
μP	II	20%	10%	35%

Si X denota el tipus de microprocessador (μP) i Y la latència de la RAM (= nombre de cicles de rellotge necessaris per fer disponible una dada),

Puntuació: pregunta (g): 1 punt; altres preguntes: 1.5 punts cada una

(a) Especifiqueu la funció de probabilitat de la variable aleatòria Y. Dibuixeu-la.

$$P[Y = 9] = 0.45$$
$$P[Y = 10] = 0.55$$

(b) Calculeu el valor esperat i la desviació tipus de Y.

$$EY = 9 * 0.45 + 10 * 0.55 = 9.55$$
$$EY^2 = 81 * 0.45 + 100 * 0.55 = 91.45$$
$$Var(Y) = EY^2 - (EY)^2 = 91.45 - 9.55^2 = 0.2475$$
$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{0.2475} = 0.4975$$

(c) Si l'ordinador que arriba al servei tècnic porta un microprocessador de tipus I, quin és el valor esperat per a la latència de la RAM que porta incorporada? (Indicació: calculeu primer la funció de probabilitat de la variable Y condicionada per $X = 1$).

Distribució de probabilitat de Y condicionada a que $X = 1$:

$$P[Y = 9|X = 1] = \frac{0.15}{0.15 + 0.20} = \frac{3}{7}$$
$$P[Y = 10|X = 1] = \frac{0.20}{0.15 + 0.20} = \frac{4}{7}$$

$$E(Y|X = 1) = 9 * \frac{3}{7} + 10 * \frac{4}{7} = \frac{67}{7} = 9.571$$

(d) ¿Són independents les variables X i Y? Justifiqueu la resposta.

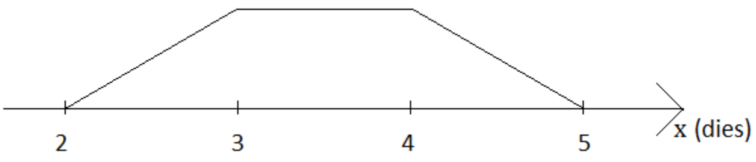
No són independents, el coneixement de X té influència sobre Y. Per exemple:

$$P[Y=9|X=1]=\frac{3}{7}$$
$$P[Y=9|X=2]=\frac{0.30}{0.30+0.35}=\frac{6}{13}\neq\frac{3}{7}$$

Sigui U el temps que es tarda en reparar un PC. Si U és una variable aleatòria amb la següent funció de densitat:

$$f(x)=\begin{cases} k(x-2) & \text{si} \quad 2\le x\le 3 \\ \ell & \text{si} \quad 3\le x\le 4 \\ -k(x-5) & \text{si} \quad 4\le x\le 5 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Gràfica de $f(x)$:



(e) Calculeu els valors de k i ℓ (podeu usar arguments geomètrics).

Ha de ser: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Calculem l'àrea geomètricament: cada triangle té una àrea de $\ell/2$ i el rectangle central té una àrea de ℓ. En total: 2ℓ. Per tant, $\ell=1/2$. I si $\ell=1/2,\ k=\ell/1=1/2$

(f) Calculeu la probabilitat que el PC avariat es repari en menys de tres dies.

$$P[U\le 3]=\int_2^3 k(x-2)dx=\int_2^3 \frac{1}{2}(x-2)dx=\frac{1}{4}[(x-2)^2]_2^3=\frac{1}{4}=0.25$$

(g) Calculeu quin temps de reparació màxim podeu comunicar al client amb la seguretat de que no us equivocareu més del 5% de les vegades.

Busquem un temps x_0 tal que $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx=0.05$

Com que l'àrea del triangle dret és $\ell/2=1/4=0.25$, és clar que x_0 ha d'estar entre 4 i 5. Busquem $x_0\in(4{,}5)$ tal que l'àrea del triangle de base $(5-x_0)$ i alçada $-k(x_0-5)$ sigui 0.05. Ha de ser, doncs: $-\frac{1}{2}(5-x_0)k(x_0-5)=0.05$, és a dir: $\frac{1}{4}(5-x_0)^2=0.05$. Resolem:

$$(5-x_0)^2=0.20 \quad\Longrightarrow\quad 5-x_0=\pm\sqrt{0.20}=\pm 0.45 \quad\Longrightarrow\quad x_0=5\mp 0.45$$

L'única solució que està a l'interval (4,5) és $\boxed{x_0=4.55}$

FIB 2014-15 Q2. Parcial PE, abril de 2015

login:

Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.

Problema 3. (Bloc 3)

Una empresa de consultoria de dades, *Data Analytics*, lloga temps de màquina a Amazon per a analitzar les bases de dades dels seus clients. Amazon només lloga les seves màquines per hores senceres. El nombre d'hores X necessari per a analitzar una d'aquestes bases de dades segueix una distribució de Poisson amb esperança $\lambda = 4$ hores.
(**Nota:** Quan X val 0 vol dir que no els cal llogar temps de màquina a Amazon).

1. **(2 punt)** Amb quina probabilitat necessitarà un nombre d'hores entre 3 i 6 (inclosos aquests dos valors)?

   Solució:
   Ens demanen
   $$\Pr(3 \leq X \leq 6) = F_X(6) - F_X(2) = 0.889 - 0.238 = 0.651.$$
   Els valors $F_X(6)$ i $F_X(2)$ els hem obtingut de les taules de la Poisson, amb $\lambda = 4$.

2. **(2 punt)** El gerent de *Data Analytics* acaba de signar un contracte amb un nou client i encara no ha vist la seva base de dades. Quantes hores de màquina ha de llogar a Amazon per estar segur, amb una probabilitat del 0.949, que podrà fer la nova feina?

   Solució:
   Hem de buscar un nombre d'hores k tal que $\Phi(X \leq k) = 0.949$. Mirant a les taules de la Poisson, amb $\lambda = 4$, tenim que aquest nombre és $k = 7$.

3. **(2 punts)** El gerent de *Data Analytics* revisa les dades de les feines fetes durant l'última setmana. N'hi ha un total de 40 feines, les durades de les quals podem considerar independents. Sigui V el nombre de feines entre aquestes 40 que han necessitat com a molt 2 hores de lloguer de màquina. Quina distribució té V? Quin és el seu valor esperat? I la seva desviació típica?

   Solució:
   Sigui $p_1 = \Pr(X \leq 2) = 0.238$, que hem buscat a les taules de la Poisson, amb $\lambda = 4$. Aleshores
   $$V \sim B(n = 40, p_1).$$
   Per tant
   $$\mu_V = E(V) = np_1 = 40 \cdot 0.238 = 9.52,$$
   $$\sigma_V^2 = \mathrm{Var}(V) = np_1(1 - p_1) = 40 \cdot 0.238 \cdot (1 - 0.238) = 7.2542,\ \sigma_V = \mathrm{DT}(V) = \sqrt{\mathrm{Var}(V)} = 2.6934.$$

4. **(2 punts)** Feu servir l'aproximació normal per a calcular aproximadament $\Pr(3 \leq V \leq 7)$.
(**Nota:** Si W és la variable aleatòria normal que aproxima la distribució de V, fes servir $\Pr(2.5 \leq W \leq 7.5)$ com a aproximació de la probabilitat anterior).

Solució:
La normal W que aproxima $V \sim B(n = 40, p_1 = 0.238)$ és

$$W \sim N(\mu_V, \sigma_V^2).$$

Aleshores,

$$\Pr(3 \leq V \leq 7) \approx \Pr(2.5 \leq W \leq 7.5) = \Pr\left(\frac{2.5 - \mu_V}{\sigma_V} \leq \frac{W - \mu_V}{\sigma_V} \leq \frac{7.5 - \mu_V}{\sigma_V}\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{2.5 - 9.52}{2.6934} \leq Z \leq \frac{7.5 - 9.52}{2.6934}\right) = \Pr(-2.6064 \leq Z \leq -0.75) \approx \Pr(-2.61 \leq Z \leq -0.75)$$
$$= \Pr(0.75 \leq Z \leq 2.61) = \Phi(2.61) - \Phi(0.75) = 0.9955 - 0.7734 = 0.2221.$$

5. **(2 punts)** El temps T que una empresa client de *Data Analytics* triga en demanar una nova feina segueix una distribució exponencial amb esperança 2 mesos. Calculeu el temps m tal que la meitat dels temps entre comandes sigui inferior a m i l'altre meitat superior.

Solució:
Si anomenem β al paràmetres de la distribució exponencial que segueix T, sabem que $E(T) = 1/\beta$ i, per tant, $\beta = 1/2$. Busquem el valor m tal que $F_T(m) = 1/2$, és a dir m serà la mediana de T. Com que $F_T(t) = 1 - e^{-\beta t}$, per a $t \geq 0$, hem de resoldre l'equació

$$1 - e^{-\beta m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\beta m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\beta m = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{\ln 2}{\beta} = 2\ln 2 = 1.3863.$$