NOM:____________________________COGNOM:____

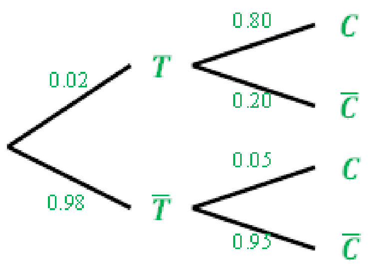
Problema 1 (B1)

(*Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs*)

1. Els cap de setmana del 29 i 30 d'abril es realitzarà un congrés d'Informàtica a la UPC. Els organitzadors de l'esdeveniment estan preocupats per l'estabilitat del servidor que utilitzaran els assistents al congrés ja que es sap que aquest servidor "cau" de tant en tant per les matinades. Els motius de la Caiguda (C) del servidor poden ser deguts a un temps Tempestuós (T) o a qualsevol altre factor no meteorològic. Segons les previsions, la probabilitat que aquest cap de setmana hi hagi un temps tempestuós és de 0.02 i la probabilitat de que caigui el servidor una matinada és de 0.80 si les condicions climatològiques són dolentes i de 0.05 si fa bon temps.

En els apartats a), b), c) i d) estudiarem només les caigudes del servidor referents a la matinada prèvia al congrés. En els apartats e), f), g) i h) estudiarem les caigudes del servidor referents a les matinades dels dos dies

a) Dibuixa l'arbre de probabilitats per la matinada prèvia al congrés amb els successos T i C. (1 punt)



b) Quina és la probabilitat que caigui el servidor en la matinada prèvia al congrés? (1 punt)

$$P(C) = (LPT) = P(C|T)\cdot P(T) + P(C|\overline{T})\cdot P(\overline{T}) = 0.8\cdot 0.02 + 0.05\cdot 0.98 = 0.065$$

c) Quina és la probabilitat que hi hagi un temps tempestuós i que caigui el servidor a la matinada prèvia al congrés? (1 punt)

$$P(T\cap C) = P(C|T)\cdot P(T) = 0.8\cdot 0.02 = 0.016$$

d) Si l'informàtic encarregat del manteniment arriba el primer dia de congrés i veu que el servidor ha caigut, quina és la probabilitat que hi hagi hagut un temps tempestuós? (2 punts)

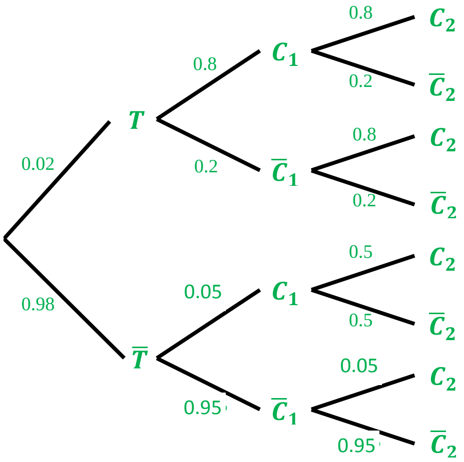
$$P(T|C) = \frac{P(T\cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|T)\cdot P(T)}{P(C|T)\cdot P(T) + P(C|\overline{T})\cdot P(\overline{T})} = \frac{0.8\cdot 0.02}{0.065} = \ 0.2462$$

Pel que fa a la segona matinada del congrés, les probabilitats de caiguda són les mateixes excepte pel cas que el dia d'abans el servidor hagi caigut per causes alienes a la meteorologia: llavors, la probabilitat de caiguda el segon dia seria 0.5. Definim els successos:

C1 = "Caiguda del servidor al 1r dia"

C2 = "Caiguda del servidor al 2n dia"

e) Dibuixa l'arbre de probabilitat amb els esdeveniments T, C1 i C2. (1 punt)



f) Quina és la probabilitat de que el servidor caigui els 2 dies si sabem que hi hagut un temps tempestuós? (1 punt)

$$P(C1 \cap C2|T) = P(C2|T \cap C1) \cdot P(C1|T) = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64$$

g) Quina és la probabilitat que caigui el servidor un dels dos dies si sabem que NO hi ha hagut un temps tempestuós? (1 punt)

$$P(C1 \cup C2|\overline{T}) = 1 - P(\overline{C1} \cap \overline{C2}|\overline{T}) = 1 - P(\overline{C2}|\overline{T} \cap \overline{C1}) \cdot P(\overline{C1}|\overline{T}) = 1 - 0.95 \cdot 0.95 = 0.0975$$

h) Quina és la probabilitat que caigui el servidor els 2 dies? (2 punts)

Emprant la llei de probabilitats totals:

$$\begin{aligned} P(C1 \cap C2) &= P(C1 \cap C2|T) \cdot P(T) + P(C1 \cap C2|\overline{T}) \cdot P(\overline{T}) \\ &= P(C2|T \cap C1) \cdot P(C1|T) \cdot P(T) + P(C2|\overline{T} \cap C1) \cdot P(C1|\overline{T}) \cdot P(\overline{T}) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.05 \cdot 0.98 \\ &= 0.0373 \end{aligned}$$

NOM:______________________COGNOMS:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs)

Problema 2 (B2)

Una pastisseria de Barcelona vol estudiar si el nombre de fills (X) d'un comprador pot ajudar a predir el nombre d'ous de xocolata de Pasqua que compra (Y), segons la informació dels clients de l'any anterior. La taula següent dóna les probabilitats conjuntes.

1. Especifica les probabilitats marginals de X i de Y. **(1 punt)**

Y= Nombre d'ous de xocolata

X= Nombre de fills

	0	**1**	**2**	**3**	
0	0,1	0,05	0	0	0,15
1	0,05	0,05	0,1	0	0,2
2	0,05	0,05	0,1	0,1	0,3
3	0	0	0,05	0,1	0,15
4	0	0	0,1	0,1	0,2
	0,2	0,15	0,35	0,3	

2. Quin és el nombre esperat d'ous comprats, per a un client escollit a l'atzar? I la seva desviació tipus? **(1 punt)**

E(Y) = 0,2 * 0 + 0,15 * 1 + 0,35 * 2 + 0,3 * 3 = 1,75.
V(Y) = (0-1,75)^2*0,2 + (1-1,75)^2*0,15+ (2-1,75)^2*0,35+(3-1,75)^2*0,3 = 1,19.
SQRT(V(Y)) = SQRT(1,19) = 1,09.

3. Quina és la funció de probabilitat del nombre de fills d'un client que s'ha emportat tres ous? **(1 punt)**

	$f_X(X\|Y=3)$
0	0
1	0
2	1/3
3	1/3
4	1/3

4. Quin és el nombre esperat d'ous comprats per un comprador amb 2 fills? **(1 punt)**

E(Y|X=2) = 0,17 * 0 + 0,17 * 1 + 0,33 * 2 + 0,33 * 3 = 1,83.

5. Calcula la covariància i la correlació entre X i Y, sabent que E(X) = 2,05 i V(X) = 1,75. **(2 punts)**

		Y-E(Y)			
	$[x_i\text{-}E(X)][y_j\text{-}E(Y)]Px_iy_j$	**-1,75**	**-0,75**	**0,25**	**1,25**
	-2,05	0,359	0,077	0,000	0,000
	-1,05	0,092	0,039	-0,026	0,000
X-E(X)	**-0,05**	0,004	0,002	-0,001	-0,006
	0,95	0,000	0,000	0,012	0,119
	1,95	0,000	0,000	0,049	0,244

$Cov_{XY} = \Sigma\, [x_i\text{-}E(X)][y_j\text{-}E(Y)]Px_iy_j$ =0,963.
També: Cov_{XY}=E(XY)-E(X)E(Y).
$Corr_{XY} = Cov_{XY} / \sigma_X\sigma_Y$ = 0,963/ 1.44 = 0.668.

6. Com s'interpreta el resultat de la correlació? **(1 punt)**

Relació lineal positiva entre les dues variables (variables no independents). És a dir, més fills té el comprador, més ous de xocolata compra.
Es tracta d'una relació moderada-alta, tenint en compte que una correlació igual a 1 indicaria una dependència lineal perfecta.

7. El temps (en minuts) que tarda en cobrar un treballador al client es pot representar amb un model de probabilitat amb funció de distribució $1\text{-}e^{-2t}$ per a t>0. Si volguéssim garantir un temps de cobrament per a un 90% dels casos, quin seria? **(1 punt)**

P(T<t) = 0.9
$1\text{-}e^{-2t}$ = 0.9
t = 1.15

Al propietari de la pastisseria li han suggerit utilitzar per al temps de servei al client el model de probabilitat $F(t) = (t^2\text{-}t)/2$, on $1<t<2$ (t en minuts).

8. Justifica si aquesta funció pot ser considerada com una funció de distribució de probabilitat. **(1 punt)**

Sí, ja que:
a) és no decreixent i pel valor mínim, 1, P(≤1)=0 i pel valor màxim, 2, P(T≤2)=1;
b) o bé, $\int_1^2 f(t) = [\ F(t)\ ]_1^2 = F(2) – F(1) = 1$.

9. Seguint el model anterior, quina probabilitat hi ha que triguin en servir exactament 1.5 minuts? I menys d'1 minut i 45 segons? **(1 punt)**

f(1.5) = 0 (ja que es tracta d'una VAC).
F(1.75) = F(t)=$(t^2 \text{-}t)/2$ = 0,656.

NOM:___________________________COGNOM:____

Problema 3 (B3) ***(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs)***

S'ha estudiat la freqüència amb què s'espatllen els transmissors en una torre de control aeri. S'ha determinat que, en cada torre de control,1 transmissor s'espatlla cada 3 mesos en mitjana.

1) Quina és la probabilitat que, en una torre concreta, en un any no s'espatlli cap transmissor?

Indicació: trobeu primer la distribució de la variable 'transmissors espatllats en un mes'.

Nm: Nombre transmissors espatllats al mes és Poisson(λ=1/3)

Na: Nombre transmissors espatllats a l'any és Poisson(λ=4)

P(Na=0) = exp(-4)= 0.018

Taules 0.018

2) Quina és la probabilitat que hi hagi 5 o més transmissors espatllats a l'any, en una torre concreta?

P(Na>=5) = 1–P(Na<=4)=

Taules 1–0.629 = 0.371

3) Quin és el nombre màxim de transmissors que es poden espatllar a l'any en una torre de control concreta amb una certesa del 95%?

P(Na<=?) = 0.95 (taules 0.949) ? = 7

(P(Na<=6) =0.89

P(Na<=7) =0.95

P(Na<=?) =0.98) # Sent estrictes, 8 també es podria acceptar perquè és el primer valor que sobrepassa 0.95

4) Es vol estudiar els mesos que passen entre que s'espatlla un transmissor i el següent. Quin model de variable aleatòria ens ho permet estudiar? I quant valen l'esperança i la variància?

Tm és Exp (λ=1/3) E(Tm) = 3 V(Tm) = 9

5) Quina és la probabilitat de passar més de 5 mesos amb cap transmissor fora de servei en una torre concreta?

P(Tm>5) =1–P(Tm<=5)= 1– (1–exp(-5/3)) = 0.19

Des d'ABNA (Aeroports Bananers i Navegació Aèria) volen planificar les despeses i ens demanen una estimació de la freqüència amb què s'espatllen els transmissors d'una torre de control concreta durant un període de 5 anys.

6) Doneu la distribució de la variable 'nombre de transmissors espatllats en una torre durant 5 anys', la seva esperança i la seva variància.

N5a és Poisson (λ=20) E(N5a) = 20 V(N5a) = 20

7) Indiqueu la probabilitat que s'espatllin més de 30 transmissors durant aquests 5 anys.

P(N5a>30) = 1-P(1 – N5a <=30)=
taules 1-0.987 = 0.013

Les tasques de revisió i manteniment d'un transmissor suposen un cost econòmic que segueix una distribució Normal, amb mitjana 75 euros/mes i desviació 22 euros/mes.

8) Quina probabilitat tenim que el cost de revisió i manteniment d'un transmissor no sigui superior de 60 euros?

C és N(75,22)
P(C<60) = P(Z<(60-75)/22) = P(Z<-0.68) = 1 - P(Z<0.68) = 1 - 0.7517 = 0.2483

9) Quins dos valors, centrats a la mitjana, contenen amb probabilitat 90% el cost mensual de manteniment possible per a un transmissor?

P(min < C < max) = 0.90

P(minz < Z < maxz) = 0.90 → maxz = 1.645 minz = –1.645

(max-75)/22 = maxz = 1,645 → max = 111.2
(min-75)/22 = minz = –1,645 → min = 38.81

10) Un ajudant assumeix el manteniment de 15 transmissors. Si la seva feina excedeix d'un cost equivalent de 1200 euros/mes llavors ha de registrar el mes com "complicat". Quina és la probabilitat que un mes sigui "complicat" per a un ajudant?

C15 és la suma dels costos dels 15 transmissors.
C15 és N(75*15,22*sqrt(15)) : N(1125,85.2) €
P(C>1200) = 1-P(Z<(1200-1125)/85.2) = 1-P(Z<0.88) = 1-0.8106 = 0.1894