Nom i cognoms **DNI:**

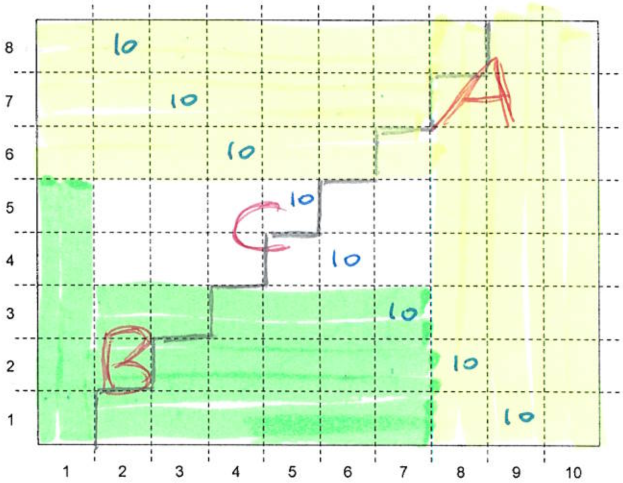
Problema 1

Es valorarà especialment el formalisme de la solució, i no tant haver arribat a la solució de qualsevol manera.

Estudiem un fragment de determinat programa:

```
char funcio_X(int x, int y) {
        if (x > 7 or y > 5) z = 'A';
        else if (x < 2 or y < 4) z = 'B';
        else z = 'C';
        return z;
}
```

Els valors x i y que rep la funció són independents, equiprobables, i sempre estan entre els límits: $1 \le x \le 10$; $1 \le y \le 8$.



1. Definim els esdeveniments A, B i C, segons el valor que retorna la funció. Representa al diagrama annex els esdeveniments A, B i C. Quina és la probabilitat que la funció retorni 'A'? El mateix per 'B' i per 'C'.

A : $3\times10 + 5\times3 = 45$ quadres

B : $5\times1 + 3\times6 = 23$ quadres

C : $2\times6 = 12$ quadres

$= 80$

$P(A) = 45/80 = 0'5625$

$P(B) = 23/80 = 0'2875$

$P(C) = 12/80 = 0'15$

2. Són el conjunt dels tres esdeveniments una partició? Raoneu la resposta.

Sí. Cada parell (x,y) proporciona una i només una sortida. Tot resultat hi és a A, B o C, i no pot estar a dos a la vegada.

3. Suposem que només sabem que la suma de x i y és 10: ¿en quines proporcions s'observarien els tres esdeveniments si truquem la funció en aquestes condicions?

$T = \{(x,y) : x+y = 10\}$ "Veure a la figura"

8 possibilitats : $P(T) = 8/80 = 0'1$

$P(A \mid T) = P(A \cap T)/P(T) = (5/80)/(1/10) = 5/8$

$P(B \mid T) = P(B \cap T)/P(T) = (1/80)/(1/10) = 1/8$

$P(C \mid T) = P(C \cap T)/P(T) = (2/80)/(1/10) = 2/8$

4. En una altra execució la funció ha retornat una 'A'. Trobeu les probabilitats:
   a) que x sigui major que y.

$$P(X>Y \mid A) = \frac{P(X>Y \cap (X>7 \cup Y>5))}{P(A)} = \frac{24/80}{45/80} = 0'5\overline{3}$$

Hi ha 24 quadres al recinte A on X>Y

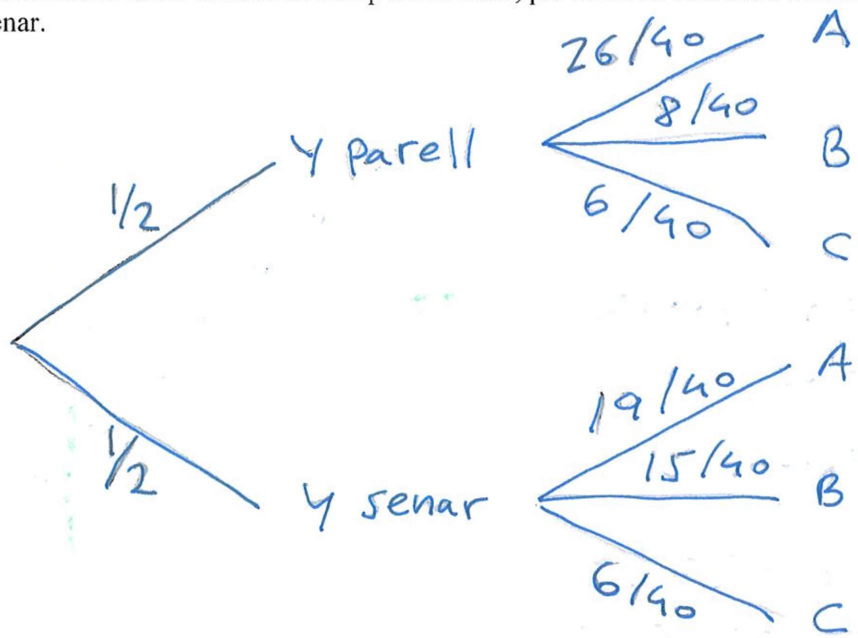
b) que x o y siguin un número senar. $P(x \text{ senar} \cup y \text{ senar} \mid A) =$

$P(x \text{ senar} \mid A) + P(y \text{ senar} \mid A) - P(x \text{ senar} \cap y \text{ senar} \mid A)$

$\{[1357][6\text{-}8]\} \cup \{9[1\text{-}8]\}$ $\quad \{[8\text{-}10][135]\} \cup \{[1\text{-}10]7\}$ $\quad \{[1357]7\} \cup \{9[1357]\}$

$$= \frac{(12+8)/80 + (9+10)/80 - (4+4)/80}{45/80} = \frac{31}{45}$$

5. Dibuixeu un arbre de successos i probabilitats, per estudiar la relació entre A, B i C, i si el número y és parell o senar.



6. Digueu si les afirmacions són correctes o falses, i justifiqueu la resposta:

a) C és independent de la paritat del paràmetre y. SI

$P(C) = P(C \mid y \text{ parell})$? De l'arbre, $P(C \mid y \text{ Parell})$
$= 6/40$
$= P(C) = 12/80$
$= P(C \mid y \text{ senar}) = 6/40$

b) La sortida de la funció és independent de la paritat del paràmetre y.

En general, per a qualsevol sortida K (= 'A', 'B', 'C') no és veritat que $P(K) = P(K \mid y \text{ parell}) = P(K \mid y \text{ senar})$. Només per K = 'C'. P. ex.:

$P(A) = 45/80 \neq P(A \mid y \text{ Parell}) = 26/40$

7. Utilitza la fórmula de Bayes per calcular la probabilitat que y sigui parell si la funció ha retornat 'B'.

$$P(y \text{ Parell} \mid B) = \frac{P(B \mid y \text{ Parell})\, P(y \text{ parell})}{P(B)}$$

$$= \frac{8/40 \cdot 1/2}{23/80} = \frac{8}{23}$$

Dels 23 quadres de B, només 8 tenen y parell.

Problema 2 (B2)

A les facultats EMF i FBI d'una universitat s'està utilitzant la plataforma web StatusQuo com a eina d'aprenentatge. Per les dades dels últims anys se sap que els alumnes d'ambdues facultats fan fins a cinc exercicis de StatusQuo setmanalment. Definim a continuació dues variables: X: "Nombre d'exercicis setmanals fets amb la plataforma StatusQuo"; Y: "Facultat", on $Y = 1$ és l'EMF i $Y = 2$ la FBI. La Taula 1 mostra les probabilitats conjuntes d'ambdues variables.

Taula 1: Taula de probabilitats conjuntes de les variables X i Y

	X					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{Y=1}$ (EMF)	0,05	0,15	0,2	0,15	0,05	0
$\boldsymbol{Y=2}$ (FBI)	0,02	0,1	0,1	0,12	0,04	0,02

a) (1 punt)
Quines són les funcions de probabilitat i de distribució marginals d'X? Poseu els valors a la taula següent.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$\boldsymbol{P_X}$	0,07	0,25	0,3	0,27	0,09	0,02
$\boldsymbol{F_X}$	0,07	0,32	0,62	0,89	0,98	1

b) (1.25 punts)
Quins són el valor esperat i la desviació estàndard de la variable X?

Solució:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \mathrm{P}(X = k) = 2.12,$$

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{k=0}^{5} \big(k - \mathrm{E}(X)\big)^2 \cdot \mathrm{P}(X = k) = 1.3256 \Longrightarrow \sigma_X = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = 1.15.$$

c) (1.5 punts)
Quin és el valor esperat d'X en cas d'$Y = 1$, $\mathrm{E}(X|Y = 1)$? El valor esperat d'X en cas d'$Y = 2$, serà més gran o més petit que $\mathrm{E}(X|Y = 1)$? Raoneu la vostra resposta a aquesta segona pregunta sense fer cap càlcul.

Solució:
Per simetria, $\mathrm{E}(X|Y = 1) = 2$. També es pot calcular mitjançant la fórmula $\mathrm{E}(X|Y = 1) = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \mathrm{P}(X = k|Y = 1)$. Com $\mathrm{E}(X|Y = 1)$ és inferior a $\mathrm{E}(X) = 2.12$, $\mathrm{E}(X|Y = 2)$ ha de ser més gran que $\mathrm{E}(X|Y = 1)$.

d) (0.5 punts)
Són independents les dues variables? Raoneu la resposta.

Solució:
Les dues variables **no** són independents, ja que $\mathrm{E}(X|Y = 1) \neq \mathrm{E}(X)$.

e) (1.5 punts)
Si sabem que un alumne fa entre 1 i 3 exercicis a la setmana, és a dir, $1 \leq X \leq 3$, amb quina probabilitat és de la facultat FBI?

Solució:

$$P(Y = 2|1 \leq X \leq 3) = \frac{P(Y = 2 \cap 1 \leq X \leq 3)}{P(1 \leq X \leq 3)} = \frac{0.1 + 0.1 + 0.12}{0.25 + 0.3 + 0.27} = 0.39.$$

A continuació treballem amb la variable T, el temps setmanal (en hores) que els alumnes d'ambdós facultats fan servir la plataforma StatusQuo. Se sap que la funció de densitat d'aquesta variable és la següent:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/9 \cdot t & 0 \leq t < 3 \\ 2/3 - 1/9 \cdot t & 3 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

f) (0.75 punts)
Feu una representació gràfica d'aquesta funció de densitat.

g) (0.5 punts)
Quina és la probabilitat que un alumne es dediqui exactament 3 hores a la setmana a la plataforma?

Solució:

$$P(T = 3) = 0.$$

h) (1 punt)
Quina és la mitjana de la variable T? I quina és la mediana?

Solució:
Per la simetria de la funció de densitat de T, la mitjana i la mediana són iguals a 3.

i) (2 punts)
Si se sap que un alumne dedica més de 3 hores setmanals a la plataforma, quina és la probabilitat que en dediqui més de 4 hores?

Solució:

$$P(T > 4|T > 3) = \frac{P(T > 4)}{P(T > 3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (6 - 4) \cdot f(4)}{0.5} = 0.44.$$

Nota que $P(T > 4)$ és l'àrea per sota de $f(t)$ entre 4 i 6.

Nom i cognoms **DNI:**

Problema 3

La companyia d'avions "Flyando" té un flota d'avions idèntics que consten de 196 places. Per la seva experiència, es sap que la probabilitat que un passatger es presenti per agafar el vol que ha adquirit és de 0.96. La companyia té la política de vendre 200 bitllets per a cada vol.

L'OVERBOOKING ---

a) **(1 punt)** Pel vol BV123 s'han venut tots els bitllets. Sigui la variable aleatòria X el número de passatgers que NO es presenten a agafar aquest vol. Digues quina distribució segueix aquesta variable. Calcula la seva esperança i la seva desviació estàndard.

X: "Número de passatgers NO presentats" ~ **Binomial (n = 200 , p = 0.04)**
$E(X) = 200 \cdot 0.04 = \mathbf{8}$
$V(X) = 200 \cdot 0.04 \cdot 0.96 = 7.68 \rightarrow \sigma = \sqrt{7.68} = \mathbf{2.77}$

b) **(1.5 punts)** Calcula la probabilitat *d'overbooking* — és a dir, que es presentin més passatgers que places té l'avió — en el vol BV123.

Usant Binomial:

$P(Y \leq 3) = \binom{200}{0} \cdot 0.96^{200} + \binom{200}{1} \cdot 0.96^{199} \cdot 0.04 + \binom{200}{2} \cdot 0.96^{198} \cdot 0.04^2 + \binom{200}{3} \cdot 0.96^{197} \cdot 0.04^3 = \mathbf{0.040}$

Usant Poisson:

$Y \sim$ Poisson ($\lambda = 200 \cdot 0.04 = 8$)

$P(Y \leq 3)$ = (taules) = **0.042**

L'ESCALA ---

c) **(1.5 punts)** Alguns passatgers del vol BV123 fan escala a l'aeroport de destí cap a un altre avió. El 10% dels vols d'aquesta companyia arriben amb retard. Quan arriben amb retard, el temps de demora es distribueix segons una exponencial amb una esperança de 90 minuts. Si el retard en aquest vol és superior a 2 hores, es perd el segon vol. Calcula la probabilitat que el vol BV123 es retardi més de 2 hores.

R:"L'avió arriba amb retard"

T:"Temps de retard" ~ exp($\lambda = 1/90$)

$P(T > 120|R) = e^{-120/90} = e^{-4/3} = 0.263$

$P(T > 120) = P(T>120|R) \cdot P(R) + P(T>120 \mid \text{no } R) \cdot P(\text{no } R) = 0.263 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.9 = \mathbf{0.0263}$

d) **(1.5 punts)** Després d'esperar ½ hora, el vol BV123 encara no ha aterrat. Quina és la probabilitat que els passatgers perdin el segon vol?

$P(T > 120 | T > 30)$ = (sense memòria) = $P(T > 90) = e^{-1}$ = **0.368**

e) **(1.5 punts)** Finalment aquest vol ha arribat amb 90 minuts de retard. Els passatgers tenen 30 minuts per fer l'escala i es sap que el temps (en minuts) que es triga en fer l'escala es distribueix segons una $N(\mu = 20, \sigma = 6.08)$. Quina és la probabilitat que un passatger qualsevol arribi a temps d'agafar el segon vol?

$T' \sim N(\mu = 20, \sigma = 6.08)$

$P = P(T < 30) = P(Z<(30-20)/6.08) = P(Z<1.645) =$ **0.95**

LA CUA D'EMBARCAMENT ---

f) **(1.5 punts)** En la cua d'embarcament, el temps (en segons) emprat per a cada passatger en la comprovació de la documentació té una distribució amb mitjana 5 segons i variància de 49 segons. En un vol complert (amb 196 passatgers), quina és la probabilitat que es trigui més de 18 minuts en despatxar tota la cua.

S = "suma de tots els temps emprats" ~ (TCL) ~ $N(\mu = 196 \cdot 5 , \sigma = \sqrt{(196 \cdot 7^2)}) = N(\mu = 980 , \sigma = 98)$

S (en minuts) ~ $N(\mu = 16.33 , \sigma = 1.63)$

$P(S > 18) = 1- P(S < 18) = 1- P(Z < (18-16.33)/1.63) = 1- P(Z < 1.02)$ = (Taules) 1 - 0.8438 = **0.156**

g) **(1.5 punts)** Quin és el mínim temps amb el qual es despatxarà la cua amb una probabilitat de 0.95?

$P(S < s) = 0.95 \rightarrow P(Z < (s-\mu)/\sigma) = 0.95 \rightarrow \frac{s-\mu}{\sigma} = 1.645 \rightarrow s = \mu + 1.645 \cdot \sigma = 16.33+1.645 \cdot 1.63 =$ **19.0 minuts**