Problema 1: Solució

Una empresa d'informàtica rep una peça clau dels seus ordinadors de tres proveïdors diferents: A, B i C. Malauradament cap dels tres proveïdors produeix un 100% de les peces sense defecte. Les respectives probabilitats es troben a la taula següent, on D indica que la peça té un defecte i $\neg D$ que no en té cap.

	A	**B**	**C**
D	0,03	0,05	0,02
$\neg D$	0,97	0,95	0,98

(a) (0.5 punts)
Les probabilitats a la taula són probabilitats condicionades o conjuntes? Raoneu la resposta.

Solució:
Com la suma de cada columna fa 1, es tracta de les probabilitats condicionades de la variable 'Defecte' donat cada un dels tres proveïdors. En cas de probabilitats conjuntes la suma de totes les probabilitats a la taula seria 1.

(b) (0.5 punts)
Són independents les variables 'Proveïdor' i 'Defecte'? Raoneu la resposta.

Solució:
Les dues variables no són independents, ja que les distribucions condicionades a la taula són diferents. La probabilitat d'un defecte varia d'un proveïdor a un altre.

(c) (1.5 punts)
Se sap que la meitat de les peces provenen del proveïdor A, i que B proveeix el doble de peces que C. Per tant, quina és la probabilitat que una peça qualsevol tingui un defecte?

Solució:
Tenim $\mathrm{P(A)} = 0.5$, $\mathrm{P(B)} = \frac{1}{3}$ i $\mathrm{P(C)} = \frac{1}{6}$ i per tant

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(D|\mathrm{A})\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(D|\mathrm{B})\mathrm{P(B)} + \mathrm{P}(D|\mathrm{C})\mathrm{P(C)} = 0.03 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot \tfrac{1}{3} + 0.02 \cdot \tfrac{1}{6} = 0.035.$$

(d) (1.5 punts)
Si trobem una peça amb defecte, quina és la probabilitat que sigui del proveïdor B?

Solució:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|D) = \frac{\mathrm{P}(D|\mathrm{B})\mathrm{P(B)}}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0.05 \cdot \frac{1}{3}}{0.035} = 0.476.$$

(e) (1.5 punts)
Donada una peça que no és del proveïdor B, quina és la probabilitat que tingui un defecte?

Solució:

$$\mathrm{P}(D|\neg\mathrm{B}) = \mathrm{P}(D|\mathrm{A}\cup\mathrm{C}) = \frac{\mathrm{P}\big(D \cap (\mathrm{A}\cup\mathrm{C})\big)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})} = \frac{\mathrm{P}(D|\mathrm{A})\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(D|\mathrm{C})\mathrm{P(C)}}{0.5 + \frac{1}{6}} = 0.0275.$$

(f) (1.5 punt)
Ens porten dues peces. Quina és la probabilitat que almenys una d'elles sigui del proveïdor C?

Solució:

$$1 - \mathrm{P}(\text{Cap peça és del proveïdor C}) = 1 - (1 - \frac{1}{6})^2 = 0.306.$$

(g) (1.5 punt)
Quina és la probabilitat que (exactament) una tingui un defecte?

Solució:
Hi ha dues possibilitats: que la primera peça tingui un defecte i no la segona o a l'inrevés. Per tant la probabilitat és:

$$\mathrm{P}(\text{Una de dues peces té un defecte}) = 2 \cdot 0.035 \cdot (1 - 0.035) = 0.068.$$

(h) (1.75 punts)
Si sabem que una de les dues peces té un defecte, quina és la probabilitat que les dues siguin del proveïdor C?

Solució:
Sigui $D1$ la variable que una de les dues peces té un defecte i C2 la variable que dues peces siguin del proveïdor C. Llavors,

$$\mathrm{P}(\mathrm{C2}|D1) = \frac{\mathrm{P}(D1|\mathrm{C2})\mathrm{P}(\mathrm{C2})}{\mathrm{P}(D1)} = \frac{2 \cdot 0.02 \cdot 0.98 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{0.068} = 0.016.$$

NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 2 (B2).

Una eina de resolució de problemes que s'usa en una assignatura distingeix entre problemes fàcils (F) i difícils (D). Pels dos tipus de problemes al llarg d'un quadrimestre s'ha recollit informació de la puntuació obtinguda en les dues primeres execucions. Tenim dues possibles taules: una pels problemes fàcils i una pels difícils. Cada taula conté les probabilitats conjuntes de la puntuació (resumida en 0 o 5 o 10) en la primera (files) i en la segona (columnes) execucions:

Problemes Fàcils

***F2** (Puntuació: fàcils en 2a execució)*

***F1** (Puntuació: fàcils en 1a execució)*

	0	**5**	**10**	
0	0.02	0.10	0.08	____
5	0.05	0.25	0.20	____
10	0.03	0.15	0.12	____
	------	------	------	

Problemes Difícils

***D2** (Puntuació: difícils en 2a execució*

***D1** (Puntuació: difícils en 1a execució)*

	0	**5**	**10**	
0	0.10	0.10	0	____
5	0	0.40	0.10	____
10	0	0	0.30	____
	------	------	------	

Calculeu. pels **problemes fàcils**. les probabilitats de 0 , 5 i 10 punts en la segona execució condicionades a la puntuació en la primera (0.5 pts)

	0	**5**	**10**
0	0.10	0.50	0.40
5	0.10	0.50	0.40
10	0.10	0.50	0.40

O bé
P(F2=0|F1=0)=0.10 P(F2=5|F1=0)=0.50 P(F2=10|F1=0)=0.40
P(F2=0|F1=5)=0.10 P(F2=5|F1=5)=0.50 P(F2=10|F1=5)=0.40
P(F2=0|F1=10)=0.10 P(F2=5|F1=10)=0.50 P(F2=10|F1=10)=0.40

Calculeu, pels **problemes fàcils**, la probabilitat d'obtenir la mateixa puntuació en les dues execucions, i la probabilitat de 10 punts en la segona si en la primera execució ha obtingut 5 punts (0.5 pts)

P(F1=0,F2=0) + P(F1=5,F2=5) + P(F1=10,F2=10) = 0.02 + 0.25 + 0.12 = 0.39

P(F2=10 | F1=5) = P(F2=10,F1=5) / P(F1=5) = 0.20 / 0.50 = 2/5 = 0.40 (o bé calculat a l'apartat anterior)

Calculeu, pels **problemes fàcils**, l'esperança i variància de les puntuacions en les dues execucions. Compareu-les (2 pt)

E(F1) = 0 * 0.2 + 5 * 0.50 + 10 * 0.3 = 5.5
V(F1) = $(0-5.5)^2$*0.2 + $(5-5.5)^2$*0.5 + $(10-5.5)^2$*0.3 = 12.25 sqrt(V(F1)) = 3.5

E(F2) = 0 * 0.1 + 5 * 0.50 + 10 * 0.4 = 6.5
V(F2) = $(0-6.5)^2$*0.1 + $(5-6.5)^2$*0.5 + $(10-6.5)^2$*0.4 = 10.25 sqrt(V(F1)) = 3.2

En la primera execució la puntuació esperada és inferior però també presenta més variabilitat.
És a dir en un segon intent la puntuació augmenta, però en el primer hi ha més diferència de si es sap fer o no (sembla que repetir-ho va bé: augmenta la mitjana i baixa la variabilitat)

Pels **problemes fàcils** indiqueu justificadament i interpreteu si són independents o no la puntuació de la primera i de la segona execució (1 pt)

Si són independents perquè les probabilitats condicionades són iguals (P(F2=i|F1=0)=P(F2=i|F1=5)=P(F2=i|F1=10) per i=0,5,10))
O bé perquè totes les probabilitats conjuntes són iguals als producte de les marginals (P(F1=i,F2=j)=P(F1=i)*P(F2=j) per i,j=0,5,10)

És a dir, independentment de la puntuació en la primera execució s'obté puntuació en la segona que no en depèn.

Pels **problemes difícils** calculeu i interpreteu la covariància i la correlació entre les puntuacions de la primera i segona execució Podeu tenir en compte la relació entre l'esperança i la variància de F1 i F2 anteriors amb les de D1 i D2 (2 pts)

D1 i D2 tenen les mateixes esperances i variàncies de F1 i F2 calculades anteriorment:

E(D1)=5.5 V(D1)=12.25 E(D2)=6.5 V(D2)=10.25

Cov (D1,D2) = (0-5.5)((0-6.5)0.10 +
+ (0-5.5)((5-6.5)0.10 +
+ (5-5.5)((5-6.5)0.40 +
+ (5-5.5)((10-6.5)0.10 +
+ (10-5.5)((10-6.5)0.30 = 9.25

Corr (D1,D2) = 9.25 / 3.5*3.2 = 0.826

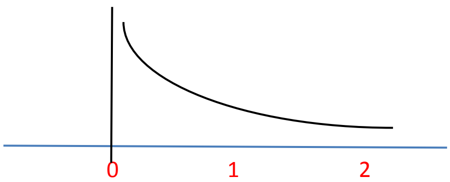
La correlació indica una relació positiva entre la puntuació en una primera i una segona execució.
És a dir més puntuació en una execució es relaciona amb més puntuació en l'altra.

Ara considerarem el temps de les execucions dels problemes, distingint entre fàcils i difícils però no entre primera i segona execució. Tenim la funció de densitat del temps pels problemes fàcils (TF) i la del temps pels difícils (TD):

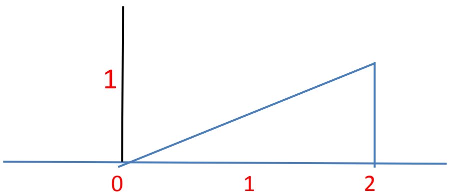
- pels problemes fàcils el temps en hores segueix una exponencial decreixent: $f_{TF}(t) = e^{-t}$
- pels problemes difícils el temps entre 0 i 2 hores segueix la funció lineal creixent: $f_{TD}(t) = \frac{1}{2}t$

Indiqueu i representeu amb un gràfic esquemàtic aquestes dues funcions de densitat (1 pt)

$f_{TF}(t) = e^{-t}$



$f_{TD}(t) = \frac{1}{2}t \quad (0 \leq t \leq 2)$



Calculeu la funció de distribució de probabilitat per a cada cas (1 pt)

$F_{TF}(t) = 1 - e^{-t}$

$\int_0^t e^{-x}\, dx = -e^{-x}|_0^t = -e^{-t} - (-1) = 1 - e^{-t}$

(o bé indicant que és model Exp amb paràmetre 1)

$F_{TD}(t) = \frac{1}{4}t^2 \quad (0 \leq t \leq 2)$

$\int_0^t \frac{1}{2}x\, dx = \frac{1}{4}x^2\, |_0^t = \frac{1}{4}t^2$

Calculeu la probabilitat de trigar menys de 1 hora en cada un dels casos (1 pt)

P(TF < 1) = $F_{TF}(1) = 1 - e^{-1}$ = 0.63

P(TD < 1) = $F_{TD}(1) = \frac{1}{4}1^2$ = 0.25

Interpreteu i comenteu les diferències dels dos casos tenint en compte les funcions de densitat i els càlculs anteriors (1 pt)

La funció de densitat mostra gràficament que, per problemes fàcils, temps propers a 0 són molt probables i després decreix ràpidament. I per problemes difícils el temps van de 0 a 2 amb un creixement lineal que fa més probable l'entorn de 2 hores.

Numèricament els problemes fàcils mostren que amb probabilitat del 63% triguen menys de 1 hora, en canvi en els difícils només el 25%

Nom i cognoms **DNI:**

Problema B3

La justificació formal és indispensable.

Un determinat banc disposa d'un nou producte financer que vol vendre entre els seus clients. El director de la sucursal XYZ estima que 1 de cada 50 dels seus clients estaria interessat en comprar el producte si se li ofereix.

A. Suposem que un treballador de la sucursal ha de plantejar la compra a 30 clients en una setmana de cinc dies laborables[1]. Quina és la distribució de probabilitat (model i paràmetres) de les variables (1/2 pt. cada preg.):

- X: nombre de clients interessats (*captats*) pel treballador, per setmana.
  - $X \sim B(n=30, p=1/50)$; evidentment, es suposa que els clients es prenen a l'atzar, i que són independents uns d'altres.
  - No és correcte dir $X \sim P(\lambda = 30/50)$
- N: nombre de clients que cal oferir el producte fins que es troba a un interessat.
  - $N \sim Geom(p=1/50)$
- T: temps necessari (en dies) fins que el treballador trobi a un interessat.
  - $T \sim Exp(\lambda)$, assumint que es tracta d'un procés de Poisson, on la taxa λ representa el nombre mitjà de clients que es poden trobar en un dia: per setmana serien 30*1/50, per dia laborable 6/50 = 0.12

B. Calculeu les probabilitats (1 pt. cada preg.):

- que un treballador trobi 1 client interessat en una <u>setmana</u>.
  - $P(X=1) = n\, p\, (1-p)^{29} = 0.33397$
- que un treballador trobi un client interessat després de plantejar la compra a un màxim de 5 clients (comptant-hi amb el que comprarà).
  - $P(N \le 5)$, on $N \sim Geom(p=1/50)$. Es a dir:

  $P_N(1)+ P_N(2)+ P_N(3)+ P_N(4)+ P_N(5) = p(1+q+q^2+q^3+q^4) =$
  $1/50(1+49/50(1+49/50(1+49/50(1+49/50)))) = 0.09608$
  - També és correcte amb funció de distribució: $F_N(5) = 1-(49/50)^5 = 0.09608$
- que un treballador trigui més de 8 dies en trobar un client interessat en el producte.
  - $P(T > 8) = \exp(-0.12*8) = 0.3829$

C. Si la sucursal té 7 treballadors, i cadascú ofereix el producte a 30 clients per setmana:

- quin nombre de clients interessats esperem trobar? (1/2 pt)
  - $Y = X_1 + ... + X_7$; $E(Y) = 7\, E(X) = 7·30·1/50 = 4.2$ clients;
- i quina és la variància d'aquest nombre? (1/2 pt)
  - Es suposa que els 7 treballadors són independents: $Y \sim B(210, 1/50)$

  $V(Y) = 7\, V(X) = 7·30·1/50·49/50 = 4.116$
- Trobeu una cota màxima al nombre de clients que es podrien captar amb tots els treballadors, en una setmana, amb un error del 5%. (1 pt)
  - Aproximem Y per Poisson(4.2), i $F^{-1}(0.95) \simeq 8$: $F(8) = 0.972$. La resposta és **vuit clients**.

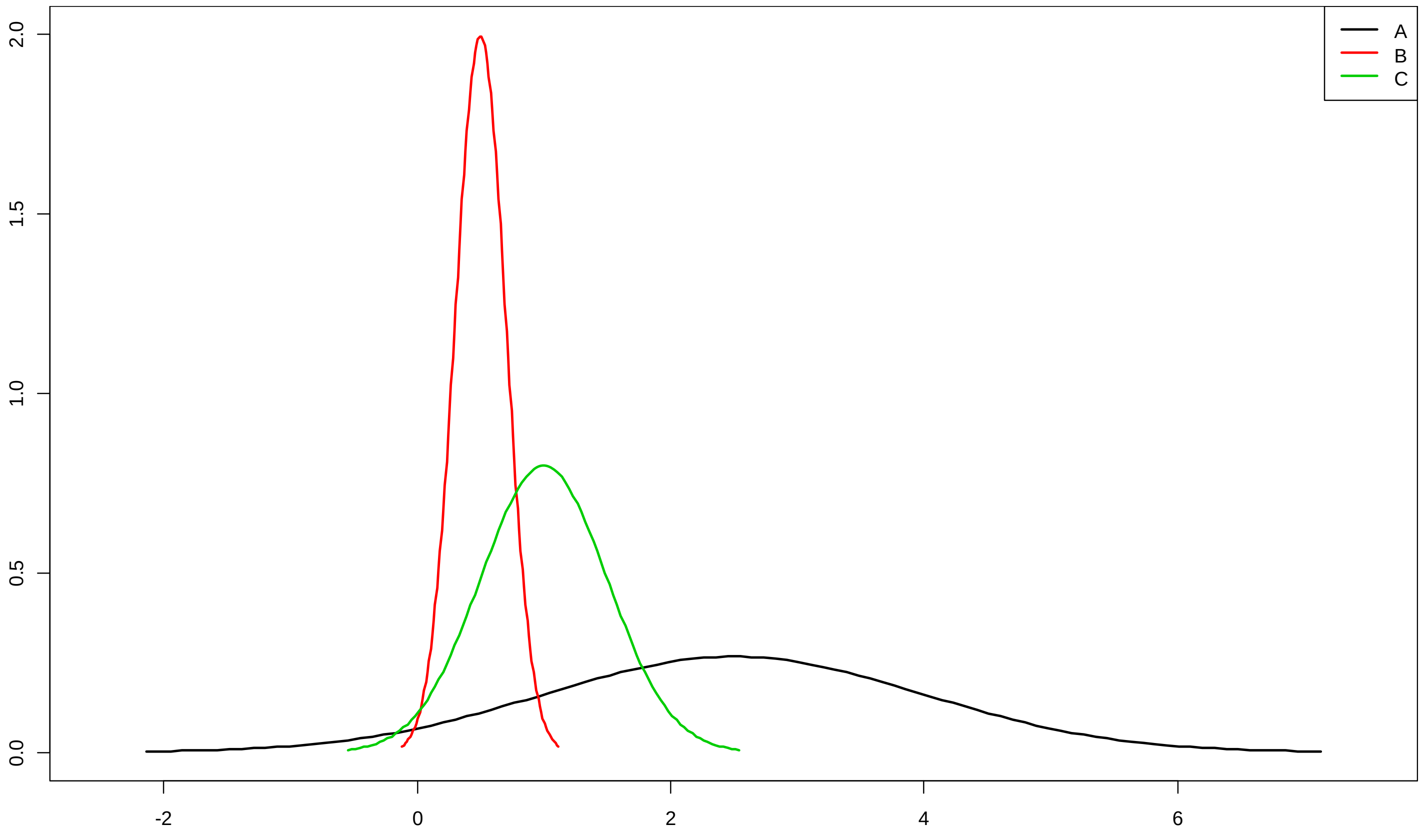
---

[1] Totes les referències temporals són a la setmana de cinc dies laborables.

D. El nou producte financer és una composició de tres carteres (que suposarem independents). És vàlid admetre que el rendiment anual de cadascuna de les tres carteres es distribueix com una Normal, encara que amb diferents paràmetres de valor esperat i variabilitat, com es veu a la taula següent:

Cartera	Pes de cartera al producte	Rendiment esperat	Desviació tipus rendiment
A	20%	2.5%	1.5%
B	50%	0.5%	0.2%
C	30%	1%	0.5%

- Representa (amb tota la fidelitat possible) les distribucions de probabilitat del rendiment de A, B i C (1/2 pt)



- Quina és la cartera que té més probabilitats d'obtenir un rendiment negatiu? Justifica-ho. (1 pt)

Valor estandarditzat de 0 per a cada cartera: A, (0-2.5)/1.5 = -1.667; B, (0-0.5)/0.2=-2.5; C, (0-1)/0.5=-2

Llavors, max {P(A<0), P(B<0), P(C<0)} correspon a A perquè és el que té el major valor estand. (més àrea a l'esquerra). La probabilitat per a A és: P(Z<-1.667) = 0.0478

No és correcte justificar perquè A té la desviació més gran. Tampoc és correcte òbviament dir que la cartera és B perquè és la que té la menor esperança. La resposta ha de valorar els dos indicadors.

- Quin és el rendiment esperat del nou producte financer? (1/2 pt)

PF = 0.2 A + 0.5 B + 0.3 C

E(PF) = 0.2 2.5 + 0.5 0.5 + 0.3 1 = 1.05%

- Quina és la variància d'aquest producte? (1/2 pt)

$V(PF) = 0.2^2\ 1.5^2 + 0.5^2\ 0.2^2 + 0.3^2\ 0.5^2 = 0.1225 = (0.35\%)^2$ *(Noteu els quadrats als pesos)*

- Trobeu la probabilitat que un client que contracti el producte tingui un rendiment per sota de 0 al cap d'un any. (1 pt)

PF ~ N(1.05, 0.35)

P(PF < 0) = P(Z < (0–1.05)/0.35) = P(Z < –3) = 1–P(Z < 3) = 1–0.9987 = 0.0013