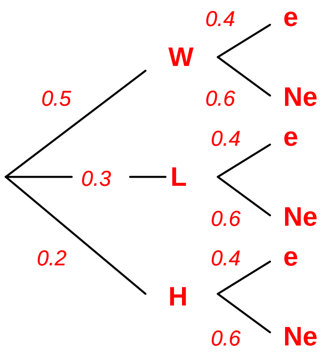
NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 1 (B1).

En una companyia s'ha recollit informació que indica que el 50% dels documents són en format W, 30% en format L i la resta en format H. I independentment del format, el 40% excedeix de 10 pàgines.

(1 punt) Indiqueu l'arbre i el conjunt de resultats que permet determinar les probabilitats del format i grandària d'un document a l'atzar



Ω = { (W,e), (W,Ne), (L,e), (L,Ne), (H,e), (H,Ne) }

(1 punt) Indiqueu la taula de probabilitats conjuntes i les marginals

	W	L	H	
e	0.20	0.12	0.08	0.40
Ne	0.30	0.18	0.12	0.60
	0.50	0.30	0.20	

(1.5 punts) Quina és la probabilitat d'excedir 10 pàgines si està en format W? I d'excedir 10 pàgines si està en format L? Relacioneu aquest resultats indicant què reflecteixen.

P (e | W) = P (e ∩ W) / P(W) = 0.20 / 0.50 = 0.40

P (e | L) = P (e ∩ L) / P(L) = 0.12 / 0.30 = 0.40

La probabilitat és la mateixa perquè són independents. De l'enunciat ja sabíem que les dues eren igual a 0.40

(1.5 punts) En quin format és més probable que estigui escrit un document si ha excedit les 10 pàgines?

P (W | e) = P (W ∩ e) / P(E10) = 0.20 / 0.40 = 0.50
P (L | e) = P (L ∩ e) / P(E10) = 0.12 / 0.40 = 0.30
P (H | e) = P (H ∩ e) / P(E10) = 0.08 / 0.40 = 0.20

D'aquestes probabilitats la de format W és la més gran, per tant el més probable és que estigui en format W

En una altra companyia també han recollit la informació de format i grandària dels documents. En aquest cas, a diferència de la compayia anterior, han comprovat que la proporció de documents que excedeixen 10 pàgines és igual a la dels que no les excedeixen. També han conclòs que les probabilitats dels tres formats, condicionades per la grandària dels documents, són:

	W	L	H
excedeix 10 pg	0.30	0.60	0.10
No excedeix 10 pg	0.40	0.20	0.40

(1 punt) Quina és la probabilitat que no excedeixi les 10 pàgines si està escrit en format L?

*P (Ne | L) = (P(L|Ne)*P(Ne)) / (P(L|Ne)*P(Ne)+P(L|e)*P(e)) =*

*= (0.20*0.5) / (0.20*0.5+0.6*0.5) = 0.10 / (0.10+0.30) = 0.10 / 0.40 = 0.25*

o bé

P (Ne | L) = P(Ne ∩ L) / P(L) = 0.10 / 0.40 = 0.25

(1 punt) Indiqueu la taula de probabilitats conjuntes i les marginals

	W	L	H	
e	0.15	0.30	0.05	0.50
Ne	0.20	0.10	0.20	0.50
	0.35	0.40	0.25	

(1 punt) Indiqueu i justifiqueu si és independent el format del fet d'excedir o no de 10 pàgines

En aquest cas no són independents:

Les probabilitats del format condicionades per excedir o no les 10 pàgines no són iguals (P(W|e)=0.3 ≠ 0.4=P(W|Ne)) i, per tant, no és igual a la no condicionada (P(W)=0.35)

o

Les probabilitats d'excedir o no les 10 pàgines condicionades pel format no són iguals (P(e|L)=0.75 ≠ 0.20 =P(e|H))
i, per tant, no és igual a la no condicionada (P(e)=0.50)

o

*La probabilitat de la intersecció no és igual al producte (P (e ∩ W)=0.15 ≠ 0.175=P(e)*P(W)=0.5*0.35)*

(1 punt) Quina és la probabilitat que un document excedeixi les 10 pàgines o estigui en format W

P (e o W) = P(e) + P(Ne∩W) = 0.50 + 0.20 = (0.15+0.30+0.05) + 0.20 =

= P(e) + P(W) – P(e ∩ W) = 0.50 + 0.35 – 0.15 =

*= **0.70***

(1 punt) Quin format és més probable sense tenir en compte la grandària?

P(W) = 0.35
P(L) = 0.40
P(H) = 0.25

D'aquestes probabilitats la de format L és la més gran, per tant el més probable és el format L

Nom i cognoms **DNI:**

Problema 2 (Solució)

(cada pregunta val 2 punts)

Una empresa dedicada a la Informática està preocupada per les dues components dels ordinadors que fan que aquests ordinadors no funcionin i observen que les probabilitats que s'espatllin son (0=No, 1=Sí) i Y i X son les dues components

		X		
		0	**1**	
Y	**0**	0.16	0.12	0.28
	1	0.37	0.35	0.72
		0.53	0.47	

1. Calculeu les esperances d'aquestes variables: E(Y) i E(X)

   E(X)=0*0.53+1*0.47=0.47

   E(Y)=0*0.28+1*0.72=0.72

2. Calculeu les variàncies i desviacions típiques d'aquestes variables:X i Y

   V(X)=$(0\text{-}0.47)^2$*0.53+$(1\text{-}0.47)^2$*0.47=0.249

   σ(X)=sqrt(0.249)=0.499

   V(Y)= $(0\text{-}0.72)^2$*0.28+$(1\text{-}0.72)^2$*0.72=0.2016

   σ(Y)=sqrt(0.2016)=0.449

3. Calculeu la covariància entre X, Y:
   $Cov(X,Y) = \sum\sum(x_i - E(X)(y_i - E(Y))p_{X_{i,X}j,}$=
   (0-0.47)(0-0.72)*0.16+(0-0.47)(1-0.72)*0.37+(1-0.47)(0-0.72)*0.12+
   (1-0.47)(1-0.72)*0.35=
   0.054-0.049-0.046+0.052=0.011

4. ρ(X,Y)=$\frac{cov(x,y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{0.011}{0.499*0.449} = \frac{0.011}{0.224} = 0.049$

5. A continuació, aquesta companyia vol detectar quina és la probabilitat que aquests ordinadors espatllats triguin menys de 3 hores en està en funcionament
   El temps que triguen els ordinadors en arreglar-se segueix la següent funció
   $f_T(t)$=0.5exp(-0.5t)

   $P(T \leq 3) = \int_0^3 0.5 * \exp(-0.5t)\, dt =$
   $0.5 \int_0^3 \exp(-0.5t)\, dt = 0.5[\frac{1}{-0.5}\exp(-0.5t)]_0^3$=$[-\exp(-0.5t)]_0^3$
   =-exp(-1.5)+exp(0)=1-0.223=0.777 hores

Plantilla

Problema 3 *Els 10 subapartats numerats valen 1 punt*

Cada cop hi ha més gent que juga a *League of Legends*. Un professor de la FIB estima que 4 de cada 7 estudiants ho fa.

1. Quina és la distribució de probabilitat de les variables:

   a) Nombre d'estudiants a qui s'ha de preguntar fins a trobar 1 que juga.

   $N \sim Geom(p=4/7)$

   b) Nombre de estudiants que juguen en una classe de 12 alumnes.

   $X \sim B(n=12, p=4/7)$

   Si no es donen els paràmetres, ½ punt

2. En quina premissa descansen aquestes distribucions?

   Independència (en probabilitat) de les observacions: el fet de que un alumne hi jugui no augmenten les probabilitats de que el seu company també hi jugui.

3. Què opines sobre la credibilitat d'aquesta premissa si seleccionem als estudiants...?

   a) segons entren en classe.

   Dubtós: si un juga, potser augmenten les probabilitats de que el següent també jugui.

   b) a partir del llistat d'alumnes, a l'atzar i amb reposició

   Més creïble: si la extracció és a l'atzar i amb reposició, sí es raonable que el fet de que un jugui no augmenti les probabilitats de que el següent també jugui.

4. També sap que el nombre de noves adhesions en un interval concret segueix una Poisson i que cada hora, *League of Legends* gana en mitjana 3 nous adeptes arreu del mon. Considera el temps (en minuts) fins guanyar 1 nou adepte:

   c) Especifica la seva distribució

   d) Especifica el valor del seu paràmetre i explica què vol dir.

   e) Dona la seva esperança i explica què vol dir.

   $T \sim Exp(\lambda)$

   La taxa λ és el nombre de nous adeptes per lapse de temps: λ=3/hora =0.05/minut

   $E(T) = 1/(0.05/\text{minut}) = 20'$: la mitjana del temps entre arribades

Calcula les probabilitats:

5. Que en un grup de treball de 3 alumnes es pugui fer un enfrontament entre 2 jugadors.

   $X \sim B(n=3, p=4/7)$; Volem que hi hagi, com a mínim, 2 jugadors

   $P(X>=2) = P(X=2) + P(X=3) = \ldots$

   $\approx 0.4198 + 0.1865 \approx 0.6064$

Si només $P(X=2)$, ½ punt

6. Que en 1 hora, hi hagi 2 nous adeptes.

$P(Y=2)$, on $Y \sim$ Poisson (λ=3/hora)

$P(Y=2) = P(Y\leq 2) - P(Y\leq 1) =$
$= FY(2) - FY(1) \approx$
$\approx 0.423 - 0.199 \approx 0.224$

7. Que passin 80' sense cap adepte nou

$T \sim Exp(\lambda)$: λ=3/hora =0.05/minut

$P(T>80) = 1-F_T(80) = 1 - [1- e^{-\lambda t}] = e^{-0.05\cdot 80} = e^{-4} \approx 0.0183$

8. Volem garantir, amb seguretat del 95%, que el primer adepte vindrà després de M minuts. **Quant ha de valer M?**

$T \sim Exp(\lambda)$: λ=3/hora =0.05/minut

$0.95=P(T>M) =1- F_T(M) =e^{-\lambda M} = e^{-0.05\cdot M} \rightarrow$
$\rightarrow e^{-0.05\cdot M} = 0.95 \rightarrow$
$\rightarrow -0.05M = \ln(0.95) \rightarrow$
$\rightarrow M= \ln(0.95)/0.05 \approx 1.02587 \approx 1'$
Tenim un 95% de probabilitats de que el primer adepte vindrà després de 1'.:

Sigui la variable W=nombre de nous adeptes al món en un mes de 30 dies.

9. Proposa una distribució aproximada (amb els paràmetres necessaris) per W.

A partir de la suma de v.a. Poisson:
$Y \sim$ Poisson (λ=3/hora) amb $E(Y) = \lambda$
$W \sim$ Poisson (λ')
amb $\lambda' = E(W) = V(W) = \lambda$ * hores/día * dies/mes = 3*24*30=2160/mes
i $V(W) = E(W) = 2160 \approx (46.4758/mes)^2$

I aproximadament, $W \sim N(\mu=2160; \sigma\approx 46.4758)$

OK, tant P com N

10. Dona la probabilitat aproximada que, en un mes de 30 dies, el nombre de nous adeptes estigui entre 2100 i 2200.

$Z_1=(2100-2160)/ 46.4758 \approx -1.2910$
$Z_2=(2200-2160)/ 46.4758 \approx 0.8607$
$P(2100<W<2200) \approx P(-1.2910<Z<0.8607) =$
$= F_Z(0.8607) - F_Z(-1.2910) \approx 0.8051 - 0.0984 \approx 0.707$