

Problema 1 (B4)

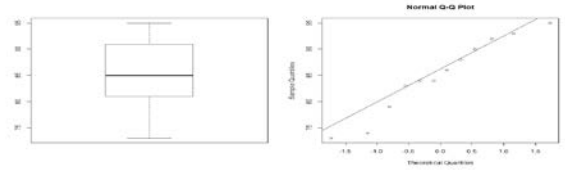
(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs)

Un fabricant de bateries per a un aparell de medició assegura pel seu producte una esperança de la durada de 80 hores. Ara ha desenvolupat un nou model i el fabricant vol usar eines estadístiques per mostrar evidències que millora aquesta esperança. Per altra part un client d'aquest fabricant també usa l'estadística però per comprovar amb les dades que li ofereix el fabricant si compleix o no amb l'esperança de 80 hores de durada que li assegurava fins ara.

El fabricant i el client plantegen unes proves d'hipòtesis a partir de les últimes dades recollides de durades de 12 bateries:

hores <- c(84, 88, 74, 73, 92, 95, 86, 90, 79, 84, 93, 83)

$$\sum_{i=1}^{12} \text{hores}_i = 1021 \quad \sum_{i=1}^{12} \text{hores}_i^2 = 87425$$



1.- (1 punt) Feu una estimació puntual de l'esperança i de la desviació de la durada en hores i comenteu la normalitat o no de les dades

Estimació esperança (mitjana mostral) $1021/12 = 85.08333$ (=m)

Estimació desviació (desviació mostral) $= \sqrt{((87425 - (1021^2/12))/11)} = \sqrt{50.44697} = 7.102603$ (=s)

Les dades semblen força normals. El boxplot és força simètric, i el qqnorm ben alineat excepte en els valor més baixos

2.- (1 punt) Indiqueu les hipòtesis de la prova del fabricant i de la prova del client. Expliqueu què representen les hipòtesis. Indiqueu i justifiqueu, en cada cas, si són unilaterals o bilaterals.

Fabricant: $H_0: \mu = 80$ (hipòtesis conservadora)
 $H_1: \mu > 80$ (hipòtesis que vol mirar de mostrar que és raonable acceptar).
 Com vol poder mostrar si millora (si augmenta l'esperança) és prova unilateral

Client: $H_0: \mu = 80$ (hipòtesis conservadora)
 $H_1: \mu \neq 80$ (hipòtesis alternativa per provar si és igual o no -> per tant prova bilateral)

3.- Per la prova d'hipòtesis del fabricant indiqueu (suposant una variança de 25 hores² i una confiança del 95%) :
 (1 punt) Quant val l'estàndard error i l'estadístic de la prova

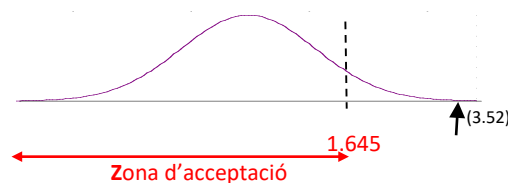
Estàndard error = se = $\sigma / (\sqrt{12}) = 5 / (\sqrt{12}) = 1.443376$

Estadístic = $z = (85.08 - 80) / se = 3.521837$

(1 punt) Quina és la conclusió de la prova? (adjunteu el gràfic de l'estadístic de la prova que justifiqui la conclusió)

Punt crític $z_{0.95} = 1.645$

$z = 3.52$



Estadístic fora zona acceptació. Per tant hi ha evidència per pensar que l'esperança no continua a 80 sinó que ha augmentat

4.- Per a la prova d'hipòtesis del client indiqueu:

4.1.- (2 punts) Per començar el client posa en dubte la variança de 25 hores² i per això fa una prova per veure si és així o superior. Resoleu la prova indicant les hipòtesis, l'estadístic i la conclusió:

$H_0: \sigma^2 = 25$ ($\sigma = 5$)

$H_1: \sigma^2 > 25$ ($\sigma > 5$)

Estadístic $s^2 (n-1) / \sigma^2 = 50.45 * 11 / 25 = 22.19667$

Punt crític $\chi^2_{11,0.95} = 19.675$

Zona d'acceptació $[0, 19.675]$

Zona rebuig $(19.675, \infty)$

Estadístic fora zona acceptació. Per tant hi ha evidència per pensar que la variança no és 25 sinó superior

4.2.- Com el client posava en dubte el valor de la variança decideix resoldre la prova, de si es compleix o no amb l'esperança de la durada de 80, sense suposar la variança coneguda i amb una confiança del **99%**. Resoleu la prova indicant:
(1 punt) Quan val l'estàndard error i l'estadístic de la prova

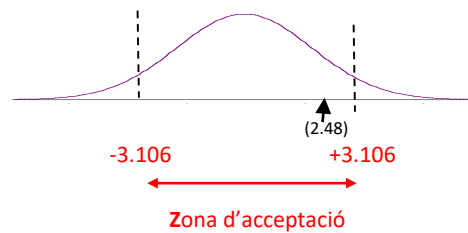
$$\text{Estàndard error} = se = s / (\text{sqrt}(12)) = 7.1 / \text{sqrt}(12) = \mathbf{2.050345}$$

$$\text{Estadístic} = (85.08 - 80) / se = \mathbf{2.479258}$$

(1 punt) Quina és la conclusió de la prova? (adjunteu el gràfic de l'estadístic de la prova que justifiqui la conclusió)

$$\text{Punts crítics: } t_{11,0.995} = 3.106 \text{ i } t_{11,0.005} = -3.106$$

$$t = \mathbf{2.4793}$$



Estadístic dins zona acceptació. Per tant és raonable pensar que l'esperança continua a 80

(1 punt) Calculeu un interval de confiança per a l'esperança de la durada en hores i interpreteu-lo

$$m \pm t_{11,0.995} se = 85.08 \pm 3.106 * 2.05 = \mathbf{[78.72, 91.45]}$$

Amb un 99% de confiança el valor de l'esperança de la durada en hores de les bateries està entre 78.72 i 91.45

5.- (1 punt) Compareu les proves del fabricant i del client. Indiqueu si arriben a la mateixa conclusió i perquè creieu que sí o que no. Indiqueu els pros i contres de cadascuna de les proves

El fabricant conclou que no és raonable pensar en esperança de 80 sinó superior. El client conclou que sí és raonable pensar que l'esperança continua sent 80.

No arriben a la mateixa conclusió perquè un fa prova unilateral i altre bilateral. A més un amb variança coneguda i altre no. I un amb confiança 95% i altre 99%

Prova fabricant: a favor el fer prova unilateral pq sembla mitjana ha augmentat; en contra que usa variança coneguda molt petita pq una prova de sigma indica que no és raonable el valor de 5 sinó superior

Prova client: a favor que no assumeix variança coneguda on el valor 5 no era raonable; en contra que fa prova bilateral i l'esperança semblava haver augmentat i a més fent confiança 99% fa la prova més conservadora.

Problema 2 (B5)

Volem comparar el temps de càlcul que dos ordinadors (X i Y) triguen, en segons, en realitzar un determinat tipus d'operació complexa. Es pren una mostra de 9 operacions d'aquest tipus fent que cada una sigui realitzada per ambdós ordinadors, obtenint el següents resultats.

$$\sum_{i=1}^{n_x} x_i = 1960$$

$$\sum_{i=1}^{n_y} y_i = 1804$$

$$\sum_{i=1}^{n_x} x_i^2 = 431222$$

$$\sum_{i=1}^{n_y} y_i^2 = 362778$$

1. Determineu si en el disseny escollit les mostres són independents o aparellades. Justifiqueu la resposta (1pt)

Aparellades. Cada una de les nou operacions ha estat realitzada per l'ordinador X i per l'ordinador Y.

2. En primer lloc volem estudiar si les dues mostres tenen la mateixa variància o no amb $\alpha=0.05$.

2a) Plantegeu les hipòtesis nul·la i alternativa. Indiqueu si és una prova bilateral o unilateral (0.5 p)

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

$$H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \text{ (bilateral)}$$

2b) Indiqueu l'estadístic, la seva distribució sota la hipòtesi nul·la i les premisses que hauríem de comprovar. (1p)

Sota H_0 , l'estadístic $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$ segueix una distribució F amb 8 i 8 graus de llibertat.

Les premisses són: distribució Normal d'X i Y, i mostres independents. *Atenció, perquè en aquest cas la premissa no s'acompleix ja que es tracta de dues mostres aparellades (apartat 1).*

2c) Calculeu l'estadístic segons les dades i raoneu si podem rebutjar la hipòtesi nul·la (1 p)

$$F = (23.39^2/12.13^2) = 3.72 \quad [S_X = \text{sqrt}((431222-1960^2/9)/8); \quad S_Y = \text{sqrt}((362778-1804^2/9)/8)]$$

Punt crític = 4,43 (taules). El valor $3.72 < 4,43$ per tant no hem trobat evidències per contradir que les variàncies poblacionals siguin iguals.

3. Volem també estudiar si hi ha igualtat entre les mitjanes de temps o si l'ordinador X triga més. Imagineu que considerem les dades com a mostres aparellades. Considereu $D=X-Y$. Plantegeu la prova d'hipòtesis corresponent amb $\alpha=0.05$.

3a) Plantegeu les hipòtesis nul·la i alternativa. Indiqueu si és una prova bilateral o unilateral.(0.5 p)

$$H_0: \mu_D = 0$$

$$H_1: \mu_D > 0 \text{ (unilateral)}$$

3b) Indiqueu l'estadístic i la seva distribució sota la hipòtesi nul·la. (0.5 p)

$$\hat{t} = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{n}} \quad t \sim t_8$$

L'output de R que obtenim és el següent:

Paired t-test

data: A and B

t = 2.8675, df = 8, p-value = 0.01045

alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0

95 percent confidence interval:

6.405279 Inf

sample estimates:

mean of the differences

18.22222

3c) Indiqueu el valor de l'estadístic. Calculeu el punt crític i raoneu si podem rebutjar la hipòtesi nul·la (1 p)

$t = 2.8675$ i punt crític $= 1,860$ (taules). Com que $2.8675 > 1,860$.

Per tant, considerem que hi ha evidències de diferència entre el temps emprat per ambdós ordinadors.

3d) A partir de l'output de R trobeu el p_valor i raoneu si podem rebutjar la hipòtesi nul·la. Relacioneu la resposta amb l'indicada en l'apartat anterior. (1 p)

$p_valor = 0.01045 < 0.05 = \alpha$

Per tant, com que el p_valor és més petit que el risc considerat (0.05) considerem que hi ha evidències que l'ordinador X triga més. Aquest resultat és conseqüent amb el de l'apartat anterior.

4. A més del temps també hem volgut estudiar el nombre d'errades per cada ordinador en realitzar aquest tipus d'operacions. Per fer-ho hem realitzat 100 operacions en l'ordinador A, obtenint 4 casos en què s'ha produït error. En el cas de l'ordinador B, de les 150 operacions realitzades, han estat 11 els casos en què s'ha produït un error. Volem estudiar si hi ha evidències suficients entre el comportament dels dos ordinadors amb $\alpha = 0.05$.

4a) Plantegeu les hipòtesis nul·la i alternativa. Indiqueu si és una prova bilateral o unilateral. (0.5p)

$H_0: \pi_A = \pi_B$

$H_1: \pi_A \neq \pi_B$ (bilateral)

4b) Indiqueu l'estadístic, la seva distribució sota la hipòtesi nul·la i les premisses que hauríem de comprovar. (1 p)

$$\hat{z} = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{P \cdot (1-P)/n_1 + P \cdot (1-P)/n_2}}, \hat{z} \sim N(0,1)$$

La m.a.s ha de ser independent.

[Obs: Es podia també plantejar pel test χ^2]

4c) Calculeu l'estadístic segons les dades i raoneu si podem rebutjar la hipòtesi nul·la (1 p)

$n_1 = 100$ i $p_1 = 0,04$

$n_2 = 150$ i $p_2 = 0,073$

$$p = \frac{100 \cdot 0,04 + 150 \cdot 0,073}{250} = 0,06$$

$$z = \frac{0,04 - 0,073}{\sqrt{0,06 \cdot 0,94 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right)}} = -1,076, \text{ punt crític } = -1,96 \text{ per tant no hi ha evidències per rebutjar que la proporció d'errades}$$

entre els dos ordinadors sigui la mateixa. No hem pogut demostrar diferències.

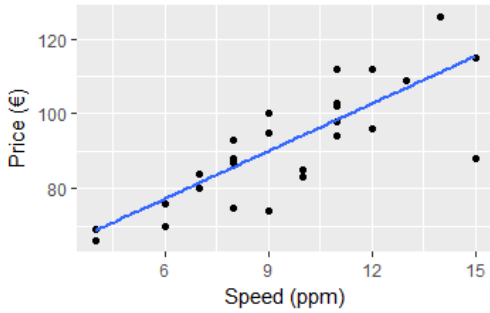
4d) Calcula l'interval de confiança del 95% per la diferència de proporcions. (1 p)

$$IC(\pi_1 - \pi_2, 95\%) = (0,04 - 0,073) \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,04 \cdot 0,96}{100} + \frac{0,073 \cdot 0,927}{150}} = [-0,0900, 0,0234]$$

Problema 3 (B6)

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs)

El responsable informàtic del departament d'estadística ha de comprar una nova impressora per l'àrea d'administració. Per començar a decidir-se ha recollit 30 observacions sobre les velocitats d'impressió (X) i els preus (Y) de diferents impressores. La descriptiva la tens a continuació.



	Mitjana	Mediana	Desviació tipus	Correlació	Covariància
X (velocitat)	9.43	9.50	3.00	0.81	38.13
Y (preu)	91.87	93.0	15.66		

a) Fes una estimació puntual dels paràmetres β_0 (constant) i β_1 (pendent) de la recta. Interpreta'ls (2 punts)

$$\hat{\beta}_1 = b_1 = \frac{S_{XY}}{S_X^2} = \frac{38.13}{3.00^2} = 4.24$$

$$\hat{\beta}_0 = b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} = 91.87 - 4.24 \cdot 9.43 = 51.92$$

El pendent representa l'increment en el preu associat a un increment d'1 ppm en la velocitat de la impressora. La constant, en aquest cas no és interpretable ja que no es pot donar el cas d'una impressora amb 0 ppm de velocitat

Si no interpreta, max: 1.5

b) Dibuixa la recta de regressió al gràfic de l'enunciat, indicant quins punts has fet servir per dibuixar-la (1 punt)

Per exemple, es podia haver fet servir els punts (9.43, 91.87) i (5, 73.12). El primer és el punt (\bar{x}, \bar{y}) i el segon és pot treure substituint als coeficients estimats:

$$\hat{y}_{x=5} = 51.92 + 4.24 \cdot 5 = 73.12$$

Si no indica els punts, max: 0.5

Si dona les X, però no les Y, max, 0.8

c) Fes l'estimació puntual del paràmetre σ (desviació residual) i interpreta'l (1 punt)

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{(n-1)S_Y^2(1-r^2)}{n-2} = \frac{29 \cdot 15.66^2 \cdot (1-0.81^2)}{28} = 9.35^2 = 87.35$$

La estimació de la σ és 9.35 que vol dir que, en mitjana, els punts s'allunyen aquesta distància de la recta estimada.

Si no interpreta, max: 0.5

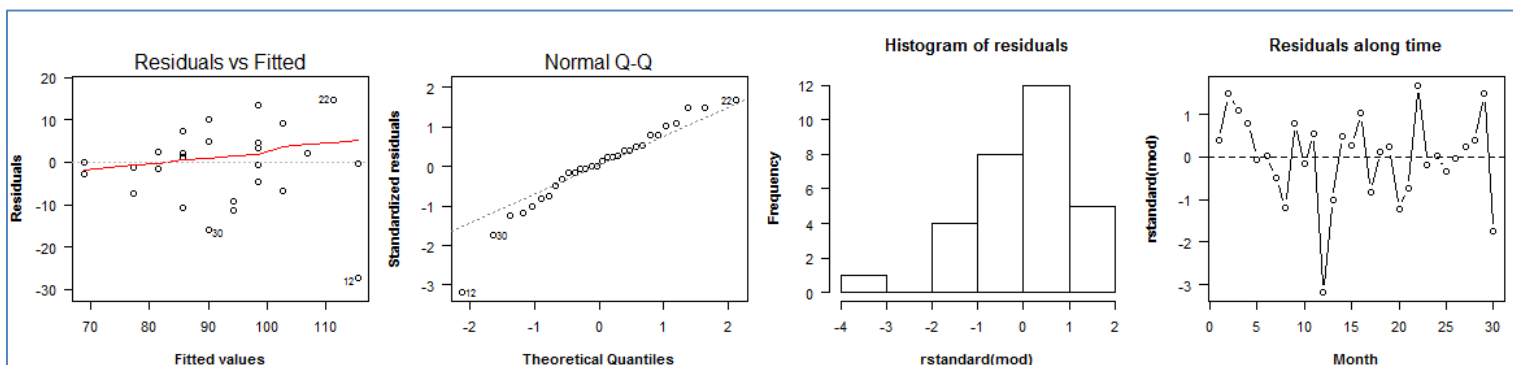
d) Calcula un Interval de confiança del 90% pel pendent de la recta i interpreta'l. (2 punts)

$$IC(\beta_1, 90\%) = b_1 \mp t_{28,0.95} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{(n-1) \cdot S_x^2}} = 4.24 \mp 1.701 \cdot \sqrt{\frac{9.35^2}{29 \cdot 3^2}} = [3.26, 5.22]$$

El increment en la velocitat s'associa amb un increment en el preu que va des de 3.26 a 5.22 euros amb un 90% de confiança.

Error no infrecuente, dir que b_1 (en lugar de β_1) \in IC

e) Fes l'anàlisi de les premisses del model. Digues quines són i si es compleixen en aquest cas cadascuna d'elles. Argumenta-ho. (2 punts)



Les premisses són les següents:

- **Linealitat.** Sembla que sí que és compleix. El primer gràfic mostra com la tendència dels residus és lineal al llarg de l'eix de les x's
- **Homoscedasticitat.** Sembla no complir-se. La forma d'embut del primer gràfic fa intuir més dispersió en el preu per velocitats superiors
- **Normalitat.** Encara que s'observa una certa asimetria cap a l'esquerra, tant el qqnorm com l'histograma apunten a una normalitat acceptable.
- **Independència.** No hi ha cap patró dels residus respecte a l'ordre en el darrer gràfic que facin sospitar que no es compleix la premissa.

f) Si l'informàtic vol una impressora amb una velocitat de 10 ppm, digues quin serà el preu mínim que haurà de pagar amb un 95% de confiança. (2 punts)

Tal com està formulada la pregunta, fa referència a una predicció individual. L'extrem inferior de l'interval de confiança del 95% per aquesta predicció és:

Predicció puntual:

$$\hat{y}_{x=10} = 51.92 + 4.24 \cdot 10 = 94.32$$

$$LI = \hat{y}_{x=10} - t_{28,0.975} \cdot S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_h - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot S_x^2}} = 94.32 - 2.05 \cdot 9.35 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{30} + \frac{(10 - 9.43)^2}{29 \cdot 3^2}} = 74.82$$

Si bilateral, máx 1.2.

Si solo estimación puntual, máx 0,5