

NOM: _____

(Poseu el nom i contesteu cada pregunta en el seu lloc reservat. Expliciteu i justifiqueu els passos en les respostes)

Problema 1. (tots els apartats valen igual)

Selecció de la opció del nostre PC "Fons de pantalla aleatori" l'ordinador executa una aplicació que fa tirades d'un tipus de "daus" (A,B i C) que no són de sis cares sinó de 2, 3 i 4 "cares" o possibilitats respectivament, amb les següents probabilitats:

	"dau" 2 "cares" (A)	"dau" 3 "cares" (B)	"dau" 4 "cares" (C)
Probabilitat surti 1	0.4	0.3	0.4
Probabilitat surti 2	0.6	0.4	0.3
Probabilitat surti 3	--	0.3	0.2
Probabilitat surti 4	--	--	0.1

A. Una opció de funcionament es basa en que el fons de pantalla serà una imatge segons la combinació que surt de tirar els tres "daus" A,B i C un darrera l'altre.

A1.- Indiqueu el conjunt de resultats i les seves probabilitats

Ω

111	0.4 0.3 0.4 = 0.048
112	0.4 0.3 0.3 = 0.036
113	0.4 0.3 0.2 = 0.024
114	0.4 0.3 0.1 = 0.012
121	0.4 0.4 0.4 = 0.064
122	0.4 0.4 0.3 = 0.048
123	0.4 0.4 0.2 = 0.032
124	0.4 0.4 0.1 = 0.016
131	0.4 0.3 0.4 = 0.048
132	0.4 0.3 0.3 = 0.036
133	0.4 0.3 0.2 = 0.024
134	0.4 0.3 0.1 = 0.012
211	0.6 0.3 0.4 = 0.072
212	0.6 0.3 0.3 = 0.054
213	0.6 0.3 0.2 = 0.036
214	0.6 0.3 0.1 = 0.018
221	0.6 0.4 0.4 = 0.096
222	0.6 0.4 0.3 = 0.072
223	0.6 0.4 0.2 = 0.048
224	0.6 0.4 0.1 = 0.024
231	0.6 0.3 0.4 = 0.072
232	0.6 0.3 0.3 = 0.054
233	0.6 0.3 0.2 = 0.036
234	0.6 0.3 0.1 = 0.018

A2.- Quina és la probabilitat de que hi hagi algun "1" en la combinació que ha sortit de la tirada dels tres "daus"? I quina és la probabilitat de que hi hagi algun "1" en la combinació que ha sortit de la tirada dels tres "daus" si en el "dau" A ha sortit "2"?

$E1 = \text{"algun 1"}$

$$P(E1) = 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.748$$

$E2 = \text{"2 en dau A"}$

$$P(E1|E2) = 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.58 \quad (\text{només probabilitats del subarbre a partir de que ha sortit 2 inicialment en dau A})$$

$$(\text{o bé}) = P(A \text{ i } B) / P(B) = 0.348 / 0.6 = 0.58 \quad (\text{vigilar no deixar-se que cal dividir pel que condiciona})$$

A3.- Justifiqueu si és independent o no el número que s'obté en cada tirada

Si que són independents perquè el resultat en una tirada no influeix en les probabilitats de les altres tirades

B. Una segona opció de funcionament es basa en que el fons de pantalla es determina només per 2 tirades dels "daus". S'obté un primer valor amb una tirada del "dau" B. Llavors s'obté el segon valor amb una tirada dels "daus" A, B o C segons el primer valor obtingut: de C si havia sortit 1, de B si havia sortit 2, i de A si havia sortit 3.

A partir del conjunt de resultats de les dues tirades, es sumen els valors obtinguts i el fons de pantalla tindrà com a imatge: mar si ha sumat 2, muntanya si ha sumat 3, casa si ha sumat 4, i gos si ha sumat 5.

B1.- Representeu l'arbre de l'experiència aleatòria indicant-ne el conjunt de resultats i les seves probabilitats

Ω			Suma	Hi ha 1?
11	0.3	0.4 = 0.12	2	Hi ha 1
12	0.3	0.3 = 0.09	3	Hi ha 1
13	0.3	0.2 = 0.06	4	Hi ha 1
14	0.3	0.1 = 0.03	5	Hi ha 1
21	0.4	0.3 = 0.12	3	Hi ha 1
22	0.4	0.4 = 0.16	4	No hi ha 1
23	0.4	0.3 = 0.12	5	No hi ha 1
31	0.3	0.4 = 0.12	4	Hi ha 1
32	0.3	0.6 = 0.18	5	No hi ha 1

B2.- Justifiqueu si és independent o no el número que s'obté en cada tirada

No són independents perquè la probabilitat dels valors en la segona tirada depenen del valor obtingut en la primera tirada.

B3.- Quina és la probabilitat que surti un dos en la segona tirada?

$$P("2a2^a") = 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 = 0.43$$

B4.- Quin és el paisatge més probable? I quina és la seva probabilitat?

(Suma=2(mar) 0.12, Suma=3(muntanya) 0.21, Suma=4(casa) 0.34, Suma=5(gos) 0.33)

Casa, amb probabilitat de 0.34

B5.- Quin és el paisatge menys probable? I quina és la seva probabilitat?

Mar, amb probabilitat de 0.12

B6.- Si hem obtingut un 2 a la segona tirada, quina és la probabilitat que surti un gos de fons de pantalla?

$$P("gos" | "2a2^a") = P("gos i 2a2^a") / P("2a2^a") = 0.18 / 0.43 = 0.4186$$

B7.- Indiqueu la taula de probabilitat conjunta entre el valor de la suma de les dues tirades i haver obtingut algun 1 en alguna de les tirades:

	Suma=2	Suma=3	Suma=4	Suma=5
Hi ha 1	0.12	0.09+0.12 = 0.21	0.06+0.12 = 0.18	0.03
No hi ha 1	0	0	0.16	0.12+0.18 = 0.30

NOM: _____

(Poseu el nom i contesteu cada pregunta en el seu lloc reservat. Expliciteu i justifiqueu els passos en les respostes).

Problema 2.

Estudiant quantes vegades un servidor experimenta una fallada en el període d'un mes, s'ha determinat aquesta distribució de probabilitat que aquí es mostra parcialment:

k	p_F(k)
0	?
1	0.21
2	?
3	0.16
4	0.10

Alguns valors s'han perdut, però se sap que el valor esperat de la variable F és 1.6.

1. Trobeu els valors que manquen a la funció de probabilitat.

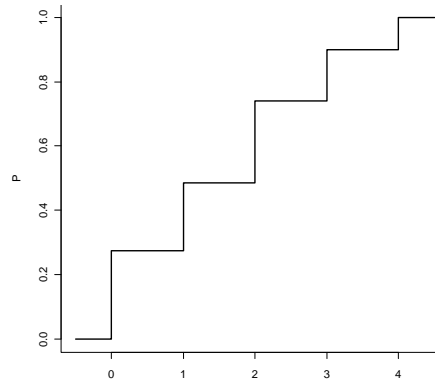
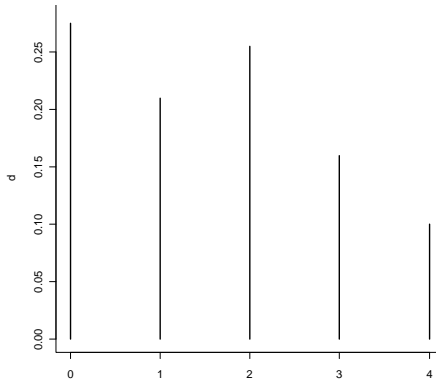
$P(F=0) = 0.275$

$P(F=2) = 0.255$

2. Expressar la funció de distribució de la variable aleatòria F.

k	F_F(k)
<0	0
[0,1)	0.275
[1,2)	0.485
[2,3)	0.74
[3,4)	0.9
>=4	1

3. Representar gràficament les dues funcions.



4. Quina és la probabilitat que en un mes determinat no hi hagi més de dues fallades?

$P(F \leq 2) = 0.74$

5. Calcular la variància i la desviació tipus del nombre de fallades mensual.

$V(F) = 1.71$

$\sigma_F = 1.3077$

6. Supposeu que el nombre de fallades és independent d'un mes al següent. Volem examinar les fallades per setembre i octubre conjuntament. Empleneu els valors indicats de la funció de probabilitat conjunta:

octubre	4					0.01
	3			0.0408		
	2		0.05355		0.0408	
	1	0.05775				
	0					
		0	1	2	3	4
						setembre

7. Quina és la probabilitat que entre els dos mesos hi hagi exactament 5 fallades?

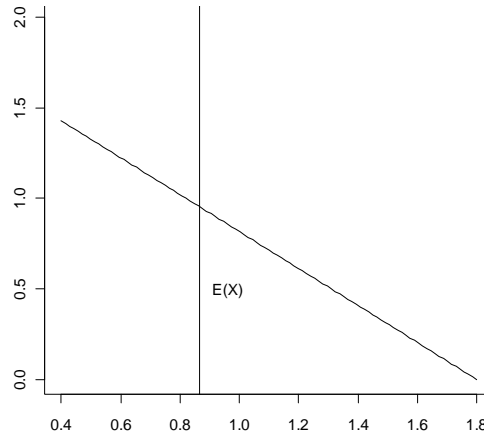
$$P(F_1+F_2=5) = 0.021+0.0408+0.0408+0.021 = 0.1236$$

El cost de reparació d'una fallada es pot suposar variable, amb valor esperat 0.8667, i pot representar-se per la següent funció de distribució (en milers d'euros):

$$F_X(t) = 1 - \frac{100}{14^2}(1.8-t)^2, \text{ per a } 0.4 < t < 1.8$$

8. Trobeu la funció de densitat de la variable X, i representeu-la en un gràfic, juntament amb el valor de l'esperança. Sense calcular-ho directament, proposeu un valor versemblant per la desviació tipus de X.

Cal derivar l'expressió de la funció $F_X()$:



$$f_X(t) = \frac{200}{14^2}(1.8-t), \text{ per a } 0.4 < t < 1.8$$

El valor exacte de la desviació tipus és 0.33.

9. Calculeu un interval que contingui el cost de reparació en el 80% de les fallades, deixant a cada banda el 10% més extrem.

[0.472, 1.357]. Els valors provenen de resoldre

$$F_X(a) = 0.10$$

$$F_X(b) = 0.90 : \quad 100/14^2 (1.8 - t)^2 = 1-0.9; \quad (1.8 - t) = \text{sqrt}(0.1 \cdot 14^2/100)$$

10. Si Y és el cost de reparació expressat en pessetes (1€ = 166.386 pessetes), quin seria el valor esperat de Y? I quina la seva variància (feu ús del valor proposat al punt 8.)?

$$Y = 166\,386 X$$

$$E(Y) = 144\,201.2 \text{ ptes.}$$

$$V(Y) = 166386^2 * V(X) = 3\,014\,512\,775 \text{ } (\sigma_Y = 54905 \text{ ptes.})$$