Problema 1 (B1)

Un estudi exhaustiu dels personatges de "Star Wars" estableix que un 80% d'ells són formes de vida basada en el carboni, i la resta en el silici. També es determina el seu caràcter (bel·licós o pacífic), i el seu estil de vida (sedentari o nòmada). Entre els de tipus "carboni", el 70% són bel·licosos, mentre que els de tipus "silici" només són el 10%. Respecte al estil de vida, la taula següent diu quina proporció de sedentaris trobem a cada perfil:

carboni i bel·licós	5%
carboni i pacífic	50%
silici i bel·licós	40%
silici i pacífic	60%

1. Dibuixeu l'arbre dels esdeveniments i probabilitats per a una experiència que consisteix en prendre a l'atzar un personatge de "Star Wars". (2 punts)

```
-+----- 80% ------ carboni +----- 70% -- bel·licós +---- 5% --- seden  (2.8%)
 |                         |                       |
 |                         |                       +---- 95% -- nòmada (53.2%)
 |                         |
 |                         +----- 30% ---- pacífic +---- 50% -- seden  (12%)
 |                                                 |
 |                                                 +---- 50% -- nòmada (12%)
 |
 +----- 20% ------- silici +----- 10% -- bel·licós +---- 40% -- seden  (0.8%)
                           |                       |
                           |                       +---- 60% -- nòmada (1.2%)
                           |
                           +----- 90% ---- pacífic +---- 60% -- seden  (10.8%)
                                                   |
                                                   +---- 40% -- nòmada (7.2%)
```

2. Responeu a:
   a. probabilitat que sigui bel·licós, (1 punt)

   $P(B) = P(B \mid C)\, P(C) + P(B \mid S)\, P(S) = 0.7\ 0.8 + 0.1\ 0.2 = \mathbf{0.58}$

   b. probabilitat que sigui bel·licós o nòmada, (1 punt)

   $P(B \cup N) = 1 - P(P \cap D) = 1 - P(P \cap D \mid C)\, P(C) - P(P \cap D \mid S)\, P(S) = 1 - 0.5\ 0.3\ 0.8 - 0.6\ 0.9\ 0.2 = \mathbf{0.772}$

   c. probabilitat que sigui nòmada i de tipus "silici". (1 punt)

   $P(N \cap S) = P(N \cap S \cap B) + P(N \cap S \cap P) = 0.012 + 0.072 = \mathbf{0.084}$

3. Calculeu les probabilitats:
   a. que sigui una forma de vida del carboni, si coneixem que es tracta d'un personatge sedentari, (1 punt)

   D = sedentaris

   $P(C \mid D) = P(D \mid C)\, P(C)/P(D) = P(D \cap C)/P(D) = (0.028 + 0.12)/(0.028 + 0.12 + 0.008 + 0.108) = \mathbf{0.5606}$

   b. que sigui un ser bel·licós, sabent que és de carboni i nòmada. (1 punt)

   $P(B \mid C \cap N) = P(B \cap C \cap N) / P(C \cap N) = 0.532/(0.532 + 0.12) = \mathbf{0.816}$

4. Deixant a banda el caràcter del personatge (bel·licós o pacífic), justifiqueu formalment si l'estil de vida és o no independent de la química de la forma de vida, és a dir, si ser sedentari o nòmada té o no té res a veure amb ser una forma de vida basada en carboni o silici. En qualsevol cas, interpreteu el resultat trobat. (1.5 punt)

   Si són independents, $P(D) = P(D \mid C) = P(D \mid S)$ (*es poden fer altres comparacions*)

   $P(D) = 0.028 + 0.12 + 0.008 + 0.108 = 0.264$

   $P(D \mid C) = P(D \cap C)/P(C) = (0.028 + 0.12)/0.8 = 0.148/0.8 = 0.185$

   No són independents: si el personatge és de carboni és menys probable que sigui sedentari.

5. L'últim capítol de la saga, que apareix desprès de la publicació de l'estudi, incrementa la participació de personatges de tipus "silici", la qual cosa fa que globalment la proporció de personatges sedentaris pugi fins al 30%. Digueu amb aquesta informació quina és ara la proporció de personatges que són formes de vida basada en el silici, en el conjunt de tota la sèrie de "Star Wars". (1.5 punt)

   X és la nova proporció de S: $P(S) = X$, $P(C) = 1–X$

   Nova proporció de sedentaris (D) = 0.3

   $P(D) = P(D \mid C \cap B)\, P(C \cap B) + P(D \mid C \cap P)\, P(C \cap P) + P(D \mid S \cap B)\, P(S \cap B) + P(D \mid S \cap P)\, P(S \cap P)$

   $= 0.05\ 0.7\ (1–X) + 0.5\ 0.3\ (1–X) + 0.4\ 0.1\ X + 0.6\ 0.9\ X = 0.185 + 0.395\ X \Rightarrow$ $\mathbf{X = 0.2911}$

PE (FIB) -- PRIMER PARCIAL (11 d'abril de 2016)

Cognoms, nom: ....

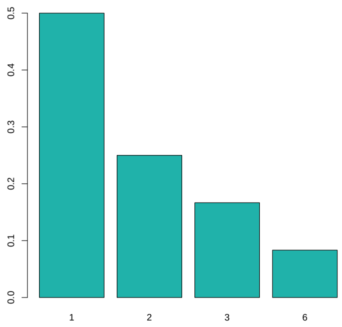
Problema_2 (B2). Un grup d'emprenedors vol dissenyar una app amb un joc. Comencen amb un joc molt senzill que consisteix en una ruleta amb quatre valors: 1, 2, 3 i 6. La probabilitat que surti cada valor n serà de K/n (on n=1, 2, 3, 6).

Per a estudiar diferents aspectes del joc dissenyat defineixen X com la variable aleatòria que pren els valors de la ruleta.

a) (1 punt) Calcula el valor de K per tal de determinar la funció de probabilitat.

Segons l'enunciat tenim P(X=1)= K, P(X=2)= K/2, P(X=3)= K/3 i P(X=6)= K/6. S'ha de complir que P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=6)=1. Per tant tenim que K = ½

b) (1 punt) Representa la funció de probabilitat.



c) (1'5 punts) Calcula l'esperança i la desviació d'X.

$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{12}=2$

$E(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\frac{1}{4}+3^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{12}=6$

$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=6-2^2=2$ i per tant $\sigma_X=\sqrt{2}$

Després volen construir una altra ruleta fent $Y=(X-3)^2$.

d) (1'5 punts) Calcula l'esperança i la desviació d'Y.

$E(Y)=4\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{12}=3$

$E(Y^2)=4^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{6}+9^2\cdot\frac{1}{12}=15$

$Var(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=15-3^2=6$ i per tant $\sigma_Y=\sqrt{6}$

e) (1 punt) Indica la taula de probabilitat conjunta de X i Y.

X / Y	1	2	3	6
0			1/6	
1		1/4		
4	1/2			
9				1/12

f) (1'5 punts) Calcula la correlació de X i Y

E(X,Y)= $1·4·\frac{1}{2} + 2·1·\frac{1}{4} + 3·0·\frac{1}{6} + 6·9·\frac{1}{12}$ =7

Cov(X,Y)= E(X,Y) – E(X)E(Y)= 7 – 2·3=1

$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

S'ha estudiat que la durada d'una partida defineixi una variable aleatòria contínua, T, amb la següent funció de distribució:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 - \frac{3}{5}e^{-\frac{3}{5}t} - \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}t} & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

g) (1 punt) Determineu la probabilitat que una trucada no duri més de cinc minuts.

F(5)≈0.823

h) (1'5 punts) Calculeu la funció de densitat d'aquesta variable.

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \frac{9}{25}e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{2}{25}e^{-\frac{1}{5}t} & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

PE (FIB) -- PRIMER PARCIAL (11 d'abril de 2016)

Cognoms, nom: ....

Problema_3 (B3). La nota final d'una determinada assignatura de la FIB es pot modelar bastant bé amb una distribució normal de mitjana 6 i desviació tipus 2. Com que els profes de l'assignatura són molt dolents, han decidit aprovar als estudiants que hagin obtingut una nota de, al menys, 5.12

(a) Calculeu el percentatge d'aprovats (recordeu: nota no inferior a 5.12)

Sigui X la nota obtinguda per un estudiant. X és una v.a. que segueix una distribució $N(6,2)$. Ens demanen $P[X \geq 5.12]$:

$$P[X \geq 5.12] = P\left[\frac{X-6}{2} \geq \frac{5.12-6}{2}\right] = P[Z \geq -0.44], \quad Z \sim N(0,1)$$

$$P[X \geq 5.12] = P[Z \geq -0.44] = P[Z \leq 0.44] = .67$$

El percentatge d'aprovats és del 67%

(b) A la Comissió d'Avaluació direm que més de la meitat dels estudiants ha obtingut una qualificació no inferior a... (quina?)

6, evidentment

(c) Calculeu la probabilitat de que de 10 estudiants agafats a l'atzar, com a màxim un d'ells hagi suspès (recordeu: nota inferior a 5.12)

Sigui Y el nombre d'estudiants, de entre 10, que hagin suspès (nota inferior a 5.12). Com que el percentatge de suspesos és del 33% ($100 - 67 = 33$), $Y \sim Bi(10,0.33)$

$$P[Y \leq 1] = P[Y=0] + P[Y=1] = \binom{10}{0} 0.33^0 \cdot 0.67^{10} + \binom{10}{1} 0.33^1 \cdot 0.67^9$$

$$P[Y \leq 1] = .1080$$

(d) Calculeu la probabilitat de que de 100 estudiants agafats a l'atzar, 60 o més hagin aprovat (nota no inferior a 5.12, useu aproximacions entre models)

Sigui U el nombre d'estudiants, de entre 100, que han aprovat (nota no inferior a 5.12). $U \sim Bi(100,0.67)$. Com que $np = 100 * 0.67 > 5$ i $nq = 100 * 0.33 > 5$, podem aproximar la binomial per una normal (amb la mateixa esperança i la mateixa variància). Com que l'esperança i la variància de U són, respectivament, $np = 100 * .67 = 67$ i $npq = 100 * .67 * .33 = 22.11 = 4.70^2$, $U \approx N(67,4.7)$. Ens demanen $P[U \geq 60]$, és a dir

$$P[U \geq 59{,}5] = P\left[\frac{U-67}{4.7} \geq \frac{59.5-67}{4.7}\right] \approx P[Z \geq -1.60], \quad Z \sim N(0,1)$$

$$P[U \geq 59{,}5] \approx P[Z \leq 1.60] = .9452$$

Nota.- si no useu la correcció de continuïtat, també es considerarà correcte; en aquest cas,

$$P[U \geq 60] = P\left[\frac{U-67}{4.7} \geq \frac{60-67}{4.7}\right] \approx P[Z \geq -1.49], \quad Z \sim N(0,1)$$

$$P[U \geq 60] \approx P[Z \leq 1.49] = .9319$$

(el resultat exacte és: $P[U \geq 60] = .9429$)

(e) Anem agafant estudiants a l'atzar fins que l'últim dels que agafem hagi aprovat (nota no inferior a 5.12). ¿Quants n'hem d'agafar per terme mig?

Sigui V el nombre d'estudiants que haurem d'agafar fins que l'últim d'ells hagi aprovat. És clar que $V \sim G(0.67)$. Ens demanen per l'esperança de V, la qual val:

$$EV = \frac{1}{0.67} = 1.4925$$

Suposem que alguns dels estudiants que no han aprovat envien un missatge al coordinador de l'assignatura. Suposem que l'arribada d'aquests missatges al coordinador es pot modelar amb una distribució de Poisson de mitjana 2 missatges/hora.

(f) ¿Quina és la probabilitat de que un una hora no li arribi cap missatge al coordinador?

Sigui W el nombre de missatges que arriben al coordinador durant 1 hora. Sabem que W segueix una distribució de Poisson de paràmetre $\lambda = 2$. Ens demanen $P[W = 0]$:

$$P[W = 0] = e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} = e^{-2} = .1353$$

(g) ¿Quina és la probabilitat de que en dues hores arribin al coordinador 3 o més missatges?

Sigui W_2 el nombre de missatges que arriben al coordinador durant 2 hores. Tenim que $W_2 \sim P(4)$. Ens demanen $P[W_2 \geq 3]$:

$$P[W_2 \geq 3] = 1 - P[W_2 \leq 2] = 1 - .238 = .762$$

(h) ¿Quina és la probabilitat que el coordinador estigui més de 2 hores sense rebre cap missatge?

Aquest apartat va de temps entre "arribades" consecutives d'un procés de Poisson. Sigui T aquest temps. Sabem que T segueix una distribució exponencial de paràmetre 2. Ens demanen $P[T > 2]$:

$$P[T > 2] = \int_{2}^{+\infty} 2 \cdot e^{-2x} dx = -e^{-2x}|_{2}^{+\infty} = e^{-4} = .0183$$

El coordinador tarda, per terme mig, dos minuts i mig en contestar cada missatge. Si el temps que tarda el coordinador en respondre cada missatge es pot modelar amb una distribució uniforme en un interval temporal de longitud tres

(i) ¿quin és el percentatge de missatges en els quals el coordinador invertirà més de tres minuts en respondre?

Sigui T_2 el temps que tarda el coordinador en contestar un missatge. Tenim que $T_2 \sim U([1,4])$. Ens demanen (en tant per cent) $P[T_2 > 3]$:

$$P[T_2 > 3] = \int_{3}^{4} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}$$

Per tant, el percentatge de missatges en els quals el coordinador inverteix més de dos minuts i mig en respondre és del 33.33%

<u>Puntuació</u>: 1 punt cada apartat, excepte els apartats d) i h) els quals valen 1.5 punts