

Nom:

EXAMEN FINAL PROBABILITAT I ESTADÍSTICA
GENER 2014

PROBLEMA 1

"Especifiqueu les probabilitats que heu de calcular i justifiqueu formalment els passos."

Tenim una moneda trucada de manera que la probabilitat de cara és $1/3$ i la probabilitat de creu és $2/3$.

- A. Tirem la moneda 4 vegades seguides; obtingueu de manera raonada les següents quantitats:
1. Probabilitat que surtin 4 cares.
 2. Probabilitat que surtin 3 cares i una creu.
 3. Probabilitat que surtin primer 2 cares seguides i després 2 creus seguides.
 4. Probabilitat que a la quarta tirada surti cara quan a la primera ja ha sortit cara.
 5. Probabilitat que surtin més cares que creus.
 6. Nombre esperat de cares i nombre esperat de creus.
 7. Variabilitat del nombre de cares
- B. Tirem la moneda 150 vegades i surten 55 cares i 95 creus. Raoneu si la probabilitat de cara és $1/2$ plantejant i resolent una metodologia estadística.
- C. Indiqueu raonadament, detallant-ne una metodologia estadística, dos trucatges diferents que qualificaríem de no contradictoris amb la mateixa observació de l'apartat B (de 150 tirades, 55 cares i 95 creus).

Nota: els apartats A.1 a A.7 valen 1 punt cadascun; els apartats B i C valen 1.5 punts cadascun.

NOM: _____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 2 (B3-B4). Un estudi sobre fotografies digitals ha conclòs que la mida de les fotos es distribueix aleatòriament amb esperança 1 MB, però la distribució i la variabilitat difereixen segons el tipus de la càmera emprada per a obtenir la imatge.

1.- Per un primer tipus de càmera (A) en que la mida de les fotografies segueix una distribució exponencial, definiu la variable Y "mida d'una fotografia en la càmera A" :

i calculeu:

1.1.- (0,5 punts) la probabilitat que la mida d'una fotografia estigui entre 0.5 i 1.5 MB

1.2.- (0,5 punts) la probabilitat que la mida d'una fotografia sigui superior a 2 MB

2.- Per un segon tipus de càmera (B) en que la mida de les fotografies segueix una distribució uniforme amb $\sigma=0.5$ MB

2.1.- (0,5 punts) Definiu la variable X "mida d'una fotografia en la càmera B" indicant-ne els paràmetres, l'esperança i la variància

2.2.- (0,5 punts) Calculeu la probabilitat que la mida d'una fotografia estigui entre 0.5 i 1.5 MB

2.3.- (0,5 punts) Calculeu la probabilitat que la mida d'una fotografia sigui superior a 2 MB

3.- (0,5 punts) Dibuixeu aproximadament les distribucions dels dos casos anteriors i comenteu les característiques més destacades de la distribució de la mida de les fotografies en cada cas.

4.- En un cas de càmera B es fan n fotografies independents i es guarden juntes en el que anomenem bloc.

4.1.- (1 punt) Definiu la variable S "mida total de les n fotografies". Indiqueu i justifiqueu el model de probabilitat i els seus paràmetres

4.2.- (1 punt) Quin valor màxim pot tenir n per tal que amb una seguretat del 95% un bloc no ocupi més de 40 MB?

5.- En un cas concret recollim 30 mides d'una mostra aleatòria simple de fotos obtingudes amb una càmera del cas B que resumim en els següents resultats:

$$\sum x_i = 33 \quad \sum x_i^2 = 42.98$$

5.1.- (0.5 punts) Calculeu estimacions puntuals de la mitjana i de la desviació tipus de la mida de les fotografies d'aquesta càmera.

5.2.- (0.5 punts) Calculeu l'error tipus de la mitjana i expliqueu què significa

5.3.- (2 punts) Calculeu l'estimació per interval de confiança al 95% per a la mitjana poblacional, i interpreteu-lo

5.4.- (1 punt) Justifiqueu si es pot creure o no que aquestes fotografies corresponen a un model amb esperança 1 MB amb una confiança del 95%

5.5.- (1 punt) Calculeu el nombre de fotografies que caldrien per assegurar que l'amplitud màxima de l'interval de confiança al 95% per a la mitjana poblacional fos de 0.30 (és a dir, de 0.15 pel semi-interval). Assumiu que la desviació poblacional és de 0.5 MB

NOM: _____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs.)

qt(0.975,49)=2.0096	qt(0.975,48)=2.0106	qt(0.975,98)=1.9845	pt(0.975,49)= 0.83283	pt(0.975,48)= 0.83278	pt(0.975,98)=0.83402
qt(0.95,49) = 1.6766	qt(0.95,48) = 1.6772	qt(0.95,98) = 1.6606	pt(0.95,49) = 0.82661	pt(0.95,48) = 0.82656	pt(0.95,98) = 0.82778
qt(0.90,49) = 1.2991	qt(0.90,48) = 1.2994	qt(0.90,98) = 1.2902	pt(0.90,49) = 0.81374	pt(0.90,48) = 0.81369	pt(0.90,98) = 0.81484

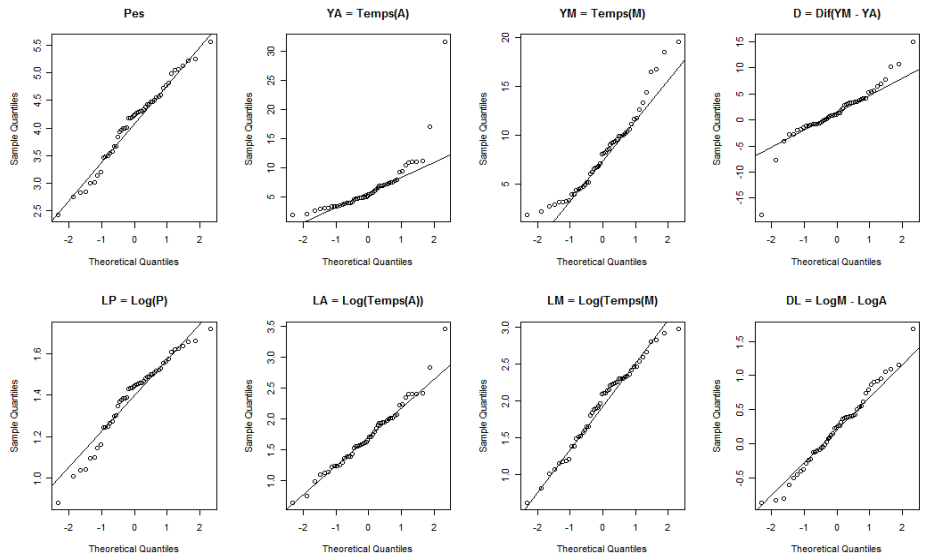
Problema 3 (B5-B6). Desitgem comparar els temps de les aplicacions media.io (**M**) i audio.online (**A**) per convertir de .mp3 a .wma. Per això, hem seleccionat a l'atzar 50 cançons a l'atzar del *Top 500 Rock and Roll songs* i hem recollit el temps **Y** de conversió per cada cançó amb cada aplicació executades amb ordre aleatori. A més a més, hem recollit el pes (**P**) en MB de cada arxiu original. La taula mostra la seva descriptiva i la del seus logaritmes naturals, així com de les diferències respectives (anomenades D i DL).

N=50	Mitjana	Desv. Est
P	4.106	0.727
Y_M	8.152	4.277
Y_A	6.566	4.648
$Y_M - Y_A = D$	1.586	4.338
$\text{Log}(P) = LP$	1.396	0.189
$\text{Log}(Y_M)$	1.953	0.565
$\text{Log}(Y_A)$	1.730	0.523
$\text{Log}Y_M - \text{Log}Y_A = DL$	0.223	0.549

1) ^{1 punt} Es tracta de dues mostres independents o aparellades? Raoneu la resposta.

2) ^{1 punt} Mirant la descriptiva de la variable temps (positiva) Y_A , valoreu si el model Normal pot servir per representar-la.

3) ^{1 punt} Veient els Q-Q plots adjunts, digueu si les variables s'acosten al model Normal i quines s'acosten més.



4) ^{2 punts} Contrasteu la H_0 de que la esperança poblacional de (μ_{DL}) de DL (on $DL = \log(Y_M) - \log(Y_A) = \log(Y_M/Y_A)$) sigui 0 (=log(1)) enfront de la H_1 de que tenen temps diferents. Indiqueu: hipòtesi, premisses, estadístic, distribució i punt crític, càlculs, resultats i interpretació.

5) ^{1 punt} Trobeu l'IC_{95%} del rati de rendiment Y_M/Y_A . Interpreteu.

6) ^{3 punts} La taula de la dreta reproduïx els coeficients de la recta de regressió de la resposta Y_A en funció del Pes. Interpreteu els resultats de la regressió, calculeu els valors X, Y i Z, i trobeu la predicció puntual i per interval del temps Y_A per convertir un arxiu de 5 MB de pes.

```
> summary(lm(YA~P))
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -6.0899     3.3695  -1.807 0.076978 .
P              3.0825     XXXXXX  YYYYY 0.000391
Residual standard error: 4.115 on ZZ degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2325,    Adjusted R-squared: 0.2165
F-statistic: 14.54 on 1 and 48 DF,  p-value: 0.0003913
```

7) ^{1 punt} La taula de la dreta reproduïx els coeficients de la recta de regressió de la resposta $\log(Y_M)-\log(Y_A) = \log(Y_M/Y_A)$ en funció de Log(Pes). Interpreteu aquest nou resultat i feu una interpretació conjunta de les preguntes 4 a 7.

```
> summary(lm(DL~LP))
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.7926     0.9969   0.795   0.431
LP            -0.0156     0.0383  -0.408   0.685
Residual standard error: 0.514 on 48 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.00345,    Adjusted R-squared: -0.01731
F-statistic: 0.1662 on 1 and 48 DF,  p-value: 0.6853
```