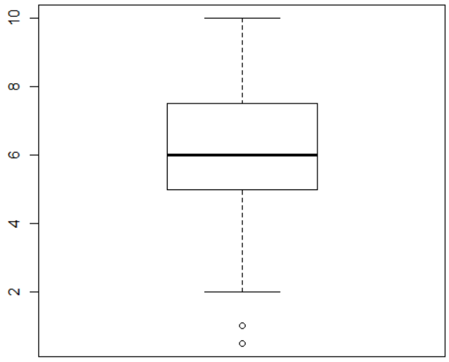
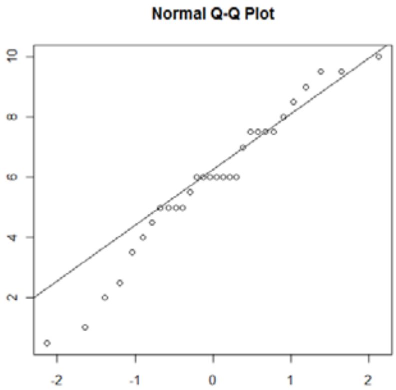
NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 1 (B4). Tenim les notes x_i de 30 estudiants d'una assignatura i es vol estudiar si el seu rendiment és comparable al que es venia obtenint en cursos anteriors:

0.5 1 2 2.5 3.5 4 4.5 5 5 5 5 5.5 6 6 6 6 6 6 6 7 7.5 7.5 7.5 7.5 8 8.5 9 9.5 9.5 10





$\sum x_i = 177$

$\sum x_i^2 = 1214$

1) (2 punts) a) calculeu una estimació puntual de la mitjana, mediana, desviació i error estàndard

Mitjana = 177/30 = **5.90** (mean(x))
Mediana = **6** (amb les dades ordenades 6 és el valor central) (med(x))
Desviació = sqrt((1214 - $(177)^2$/30)) / 29) = **2.42** (sd(x))
Error estàndard = sd(x) / sqrt(30) = **0.44**

b) comenteu què signifiquen els valors anteriors i com es relacionen amb els gràfics de les dades

La mitjana i la mediana, indicadors de tendència central, són semblants, la qual cosa ens fa pensar en força simetria. El boxplot també mostra força simetria que s'adequaria a una distribució normal, però en els valors baixos hi hauria uns possibles outliers que en el qqnorm també fan que la normalitat falli una mica
La variabilitat de les notes és de 2.42 punts i la variabilitat de la mitjana (error estàndard) disminueix fins a 0.44 punts

2) (2 punts) Si suposem la desviació tipus que es venia obtenint en cursos anteriors (2.5 punts) com la desviació tipus poblacional coneguda, calculeu:

a) un IC de μ amb una confiança del 95% σ = 2.5 punts

mean(x) ± $z_{0.975}$ σ / sqrt(30) = 5.90 ± 1.96 2.5 / sqrt(30) = 5.90 ± 0.89 = **[5.01 , 6.79]**

(amplada IC és 1.78)

b) quantes observacions hauríem de tenir com a mínim per obtenir un IC de μ d'amplada menor a 1.5 amb la mateixa confiança del 95%

amplada_total /2 = $z_{0.975}$ σ / sqrt(n)   0.75 = 1.96 2.5 /sqrt(n)   sqrt(n) = 6.53 n = 42.68   **mínim 43 observacions**

3) (2 punts) Si ara no ens creiem que es manté la variabilitat de cursos anteriors i la considerem desconeguda, calculeu:
a) un IC de μ amb confiança del 95% i un amb confiança del 99%

mean(x) ± $t_{29,0.975}$ sd(x) / sqrt(30) = 5.90 ± 2.045 2.42 / sqrt(30) = 5.90 ± 0.90 = **[5.00 , 6.80]**

mean(x) ± $t_{29,0.995}$ sd(x) / sqrt(30) = 5.90 ± 2.756 2.42 / sqrt(30) = 5.90 ± 1.22 = **[4.68 , 7.12]**

b) comentar com i perquè han canviat els IC anteriors i també respecte el IC de l'apartat a) del punt 2)

L'IC amb confiança 99% és més ample que el de 95% perquè al voler assegurar més, s'aixampla el rang de valors i som menys precissos.
I aquests dos IC són més amples que el de a) de 2) perquè allí es calculava amb sigma coneguda i assumir aquesta informació poblacional fa que siguem més precissos i per tant el rang de valors més estret

4) (1 punts) Calculeu un IC al 95% per la desviació tipus i comenteu si considereu raonable que s'assumeixi la desviació tipus de 2.5 que es venia obtenint com a variabilitat poblacional

$[((sd(x))^2 (n-1) / \chi^2_{29,0.075} \ , \ ((sd(x))^2 (n-1) / \chi^2_{29,0.005}] = [2.42^2 \ 29 / 45.722 \ , \ 2.42^2 \ 29 / 16.047] = [3.71 \ , 10.58]$

La variància està entre 3.71 i 10.58 punts
La desviació està entre **1.93 i 3.25** punts (sqrt(3.71) i sqrt(10.58) respectivament)

És raonable assumir un valor de 2.5 punts per a la desviació: 2,5 està en el IC [1.93,3.25] o bé $2{,}5^2$ està en IC [3.71,10.58]

5) (3 punts) Finalment decidim fer una Prova d'Hipòtesis sobre si la nota mitjana podem continuar acceptant que està entorn el 5.1 (sense assumir cap valor per la variabilitat poblacional).
a) realitzeu la PH per decidir si la nota mitjana d'aquests estudiants és igual o no a la nota de 5.1 que es tenia
Hipòtesis, estadísitic i distribució:

H_0: $\mu = 5.1$
H_1: $\mu \neq 5.1$

t = (mean(x) – 5.1) / (sd(x) / sqrt(30))   amb una distribució t_{29}

Càlcul de l'estadístic i punt crítics:

t = (mean(x) – 5.1) / (sd(x) / sqrt(30)) = (5.9-5.1) / (0.44) = **1.82**
$t_{29,0.975}$ = **2.045**   (entre **-2.045** i **2.045** hi ha la zona d'acceptació de H_0)

Conclusió:

El valor 1.82 està dins de la zona d'acceptació, per tant acceptem que la nota mitjana es manté entorn el 5.1

b) Sospitant que el rendiment ha millorat, si ens plantegéssim la PH per decidir si la nota mitjana d'aquests estudiants és igual o superior a aquest valor de 5.1, indica en la nova prova els apartats anteriors que canvien i comenta què implica fer una o altra prova

Estadísitic i distribució, i càlcul de l'estadístic, NO CANVIEN

t = (mean(x) – 5.1) / (sd(x) / sqrt(30))   amb una distribució t_{29}
t = (mean(x) – 5.1) / (sd(x) / sqrt(30)) = (5.9-5.1) / (0.44) = 1.82

Hipòtesis i punt crític i conclusió SÍ CANVIEN:

H_0: $\mu = 5.1$
H_1: $\mu > 5.1$

$t_{29,0.95}$ = **1.699**   (fins a 1.699 hi ha la zona d'acceptació de H_0)

El valor 1.82 està fora de la zona d'acceptació, per tant no acceptem que la nota mitjana es manté en el 5.1 sinó que és superior.

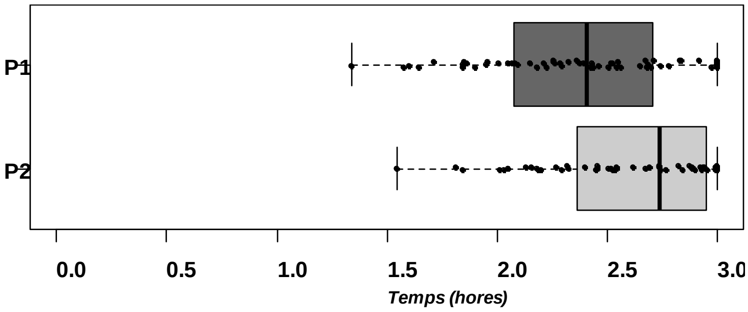
Si la prova és bilateral acceptem la mitjana entorn del 5.1, però si la prova és unilateral llavors no (és superior a 5.1)
La prova unilateral parteix de sospitar que el rendiment ha millorat i, per tant, planteja unes hipòtesis més concretes, el risc es reparteix diferent baixant el punt crític a partir del qual estem disposats a no acceptar la hipòtesis nul.la.

NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 2 (B5). Es vol comparar els temps de realització dels dos exàmens parcials de l'assignatura de PE del grau d'Enginyeria Informàtica. En una mostra aleatòria de 60 alumnes, per a cadascun d'ells, es recullen els temps d'entrega en ambdós parcials. Siguin P1 i P2 el temps del primer i segon parcial respectivament i D la diferència entre ells (D=P2-P1). A continuació, es mostra la descriptiva d'aquestes variables.

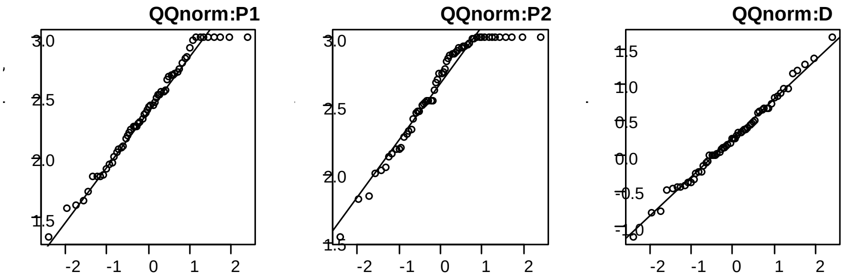
	N	Mitjana	Desv. est	Mediana	Mínim	Màxim
P1	60	2.38	0.43	2.41	1.34	3.00
P2	60	2.63	0.37	2.74	1.54	3.00
D	60	0.24	0.56	0.24	-1.14	1.66



1) (1 punt). Es tracta de dues mostres independents o aparellades? Raoneu la resposta.

Aparellades. Cada alumne ha realitzat els dos parcials i per tant, cal esperar una correlació entre les observacions de P1 i P2 que permeti fer una comparació "dins" de cada unitat.

2) (2 punt). Fixeu-vos en els següents *qqnorms*. a) Comenteu si es compleix la premissa de Normalitat en tots ells. b) En funció de la resposta de la pregunta 1), en quin/s us heu de fixar? Raoneu les respostes.



a) Els dos primers no compleixen la premissa ja que al ser una distribució truncada a les tres hores, no segueixen una Normal. La variable D sí que es pot considerar Normal; els punts sobre la recta indiquen similitud entre els quantils observats i els teòrics en cas d'una Normal.
b) Al ser mostres aparellades, ens hem de fixar en el *qqnorm* de la diferència (D)

3) (3 punts). Per saber si es pot suposar que hi ha diferències entre els temps dels dos parcials, es vol plantejar una prova d'hipòtesi d'igualtat de mitjanes: $H_0: \mu_{P1} = \mu_{P2} \ vs. \ H_1: \mu_{P1} \neq \mu_{P2}$

a) Calcula l'estadístic per fer la comparació, digues quina distribució segueix sota la hipòtesi nul·la i amb quines premisses.

$$t = \frac{\bar{D}}{S\sqrt{1/n_D}} = \frac{0.24}{0.56\sqrt{1/60}} = 3.32 \sim t_{59}$$

Segueix una t-Student amb 59 graus de llibertat sota les premisses de que D ~N i m.a. aparellada

b) Digues quin és el punt crític amb un 5% de significació i treu conclusions sobre la prova d'hipòtesi.

$t = 3.32 > t_{59,0.975} \approx 2.00$ (punt crític) → Es rebutja la hipòtesi nul·la de que les mitjanes siguin iguals

c) Calcula l'interval de confiança del 99% per a la diferència de mitjanes i interpreta'l.

$$IC(\mu_D, 99\%) = \bar{D} \ \mp t_{59,0.995} \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_D}} = 0.24 \mp 2.66 \cdot 0.56 \cdot \sqrt{\frac{1}{60}} = [0.048\,, 0.432]$$

Amb un 99% de confiança, la diferència de mitjanes poblacionals es troba entre 0.048 i 0.432, sent el temps emprat en el segon parcial més gran.

4) (4 punts). Ara interessa conèixer si la proporció d'aprovats és la mateixa en els dos exàmens.

a) Es decideix emprar dues mostres independents de grandària 100 (una en cada parcial). La proporció d'aprovats en el primer i segon parcial són respectivament 0.65 i 0.75. Calcula l'estadístic per dur a terme la comparació i digues quina distribució segueix sota la hipòtesi nul·la i sota quines premisses.

$$p = \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2}{n_1 + n_2} = \frac{p_1 + p_2}{2} = 0.7$$

$$z = \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n_1} + \frac{p \cdot (1-p)}{n_2}}} = \frac{0.10}{\sqrt{2 \cdot \frac{0.7 \cdot 0.3}{100}}} = 1.54 \sim N(0,1)$$

Segueix una Normal estàndard sota les premisses de n_1 i n_2 grans i m.a.s independents.

NOTA: També es podia agafar p =0.5 en el supòsit de màxima indeterminació

b) Digues quin és el punt crític amb un 5% de significació i treu conclusions sobre la prova d'hipòtesi.

El punt crític és $z_{0.975}$ =1.96. Com que $z<z_{0.975}$ =1.96, no hi ha prou evidència per dir que les probabilitats d'aprovar en un o altre examen siguin diferents.

c) Calcula l'interval de confiança del 95% per la diferència de proporcions (π_2 - π_1)

$$IC(\pi_2 - \pi_1, 95\%) = (p_2 - p_1) \mp z_{0.975} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n_1} + \frac{p \cdot (1-p)}{n_2}} = 0.10 \mp 1.96 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{0.7 \cdot 0.3}{100}} = [-0.027\,, 0.227]$$

NOTA: També es podia agafar p =0.5 en el supòsit de màxima indeterminació

d) En un altre facultat, han fet el mateix estudi però desconeixem la grandària de la mostra. Observant les mateixes proporcions que en l'anterior estudi (0.65 i 0.75) han obtingut un interval de confiança del 95% de [-0.07 a 0.27]. Sabent que en aquesta facultat també han agafat el mateix número d'alumnes en el primer i en el segon parcial, quina és la grandària de la seva mostra?

$$2 \cdot 1.96 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{0.7 \cdot 0.3}{n}} = 0.27 - (-0.07) = 0.34 \Rightarrow 2 \cdot \frac{0.7 \cdot 0.3}{n} = \left(\frac{0.34}{2 \cdot 1.96}\right)^2 \Rightarrow n = 2 \cdot \frac{0.7 \cdot 0.3}{\left(\frac{0.34}{2 \cdot 1.96}\right)^2} = 55.82$$

Han agafat 56 alumnes en cada parcial.

NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 3 (B6)

Uns estudiants del grau de PE a la FIB volen verificar si la implementació d'un determinat algorisme és mes costosa en JAVA que en C. Per dur a terme aquesta investigació prenen una mostra 100 observacions del temps de CPU obtinguts amb JAVA i 100 observacions del temps de CPU obtinguts amb C, assumint que son dades aparellades i volen estimar una recta de regressió per predir el temps de CPU de JAVA en funció del temps obtinguts amb l'algorisme en C. Els resultats que han obtingut son a la figura 1.

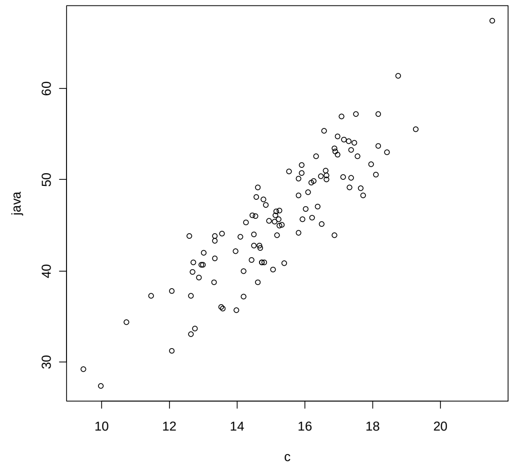


Figura 1. Temps de CPU del algorisme en JAVA versus algorisme en C

Taula 1. Resultats numèrics

Algorisme	N	Mitjana	Variancia	Coef. Correlació (C, JAVA)
C	100	15.25	4.16	0.89
JAVA	100	45.87	48.29	

Preg. 1) (2 punts). Quant val el terme independent b_0 i el terme de pendent b_1? Poseu l'expressió de la recta de regressió estimada i dibuixeu-la damunt la figura 1

$$b_1 = r\frac{s_{JAVA}}{s_C} = 0.89\sqrt{\frac{48.29}{4.16}} = 3.0323$$

$$b_0 = \overline{JAVA} - b_1\bar{C} = -0.3726$$

$$\widehat{JAVA} = -0.37 + 3.03C$$

Preg. 2) (1 punt). Calculeu la variància residual (S^2) d'aquesta regressió

$$s^2 = \frac{(n-1)s_{JAVA}^2\,(1-r^2)}{n-2} = \frac{99 * 48.29 * (1-0.89^2)}{98} = 10.142$$

Preg. 3) (3 punts). Ara es vol posar a prova si el pendent de la recta de regressió β_1 és significatiu o no. Per verificar-ho caldrà que:

a) Calculeu la desviació tipus de l'estimador b_1

$$s_{b1} = \sqrt{\frac{s^2}{(n-1)s_C^2}} = \sqrt{\frac{10.142}{99 * 4.16}} = 0.157$$

b) Calculeu l'estadístic per a dur a terme la prova d'hipòtesi. Digueu quina distribució segueix aquest estadístic sota la hipòtesis nul·la i amb quines premisses i quin és el valor aproximat del punt crític amb un 5% de significació. Trèieu les conclusions sobre aquesta prova d'hipòtesis

$H_0: \beta_1 = 0$
$H_1: \beta_1 \neq 0$

Estadístic: $\frac{b_1-(\beta_1)_0}{s_{b1}} = \frac{b_1}{s_{b1}}$ que segueix una distribució $t_{n-2} = t_{98}$,
El valor d'aquest estadístic, en aquest cas, és $\frac{b_1}{s_{b1}} = \frac{3.03}{0.157} = 19.3$

Premisses: Observacions aleatòries, independents i seguint una distribució normal

Punt crític amb un 5% de significació: $t_{98,0.975} = 1.98$.
La instrucció R és qt(0.975,98)

Conclusió: Com que 19.3>1.98, rebutgem la Hipòtesi nul·la $H_0: \beta_1 = 0$, per tant, el paràmetre β_1 és significatiu.

Interpretació: Efectivament, el temps de CPU en C és un bon predictor del temps de CPU en JAVA.

c) Un altre procediment per a veure si el pendent és significatiu o no és calcular l'interval de confiança per a aquest paràmetre β_1. Calculeu aquest interval de confiança al 95% i digueu en que s'assembla i/o difereix aquest procediment amb el que heu fet a l'apartat b) d'aquesta mateixa pregunta.

IC(95%, β_1)=$b_1 \pm t_{n-2,0.975} s_{b1}$, que en el nostre cas és $3.03 \pm 1.98 * 0.157$ i per tant, aquest interval és $(2.72 \leq \beta_1 \leq 3.34)$

Aquest procediment és similar a l'apartat b) d'aquesta pregunta,ja que si l'alternativa de la prova d'hipòtesi és ser diferent de zero ($H_1: \beta_1 \neq 0$), llavors és equivalent a calcular un Interval de Confiança

Preg. 4) (1.5 punts). Els següents gràfics ens ajuden a validar el model de regressió estimat. Digueu quines premisses han de complir l'anàlisi dels residus de la regressió i quins del següents 4 gràfics les validen o no. Justifiqueu la vostra resposta

- Les figures **Normal Q-Q** i **Histogram of rstandard** ens indiquen que la distribució d'aquests residus es pot considerar aproximadament Gaussiana.
- La figura **Scale-Location** ens mostra els residus standardizats vs Valors Ajustats. Com que no te cap tipus d'estructura ens permet afirmar que els residus presenten homocedastícitad, és a dir, que la variabilitat d'aquests es manté aproximadament constant
- La darrera figura (dreta-a baix) mostra els **Residus** vs **Ordre**. En aquest cas, tampoc mostra cap tipus d'estructura, indicant això que aquests residus son independents entre si.

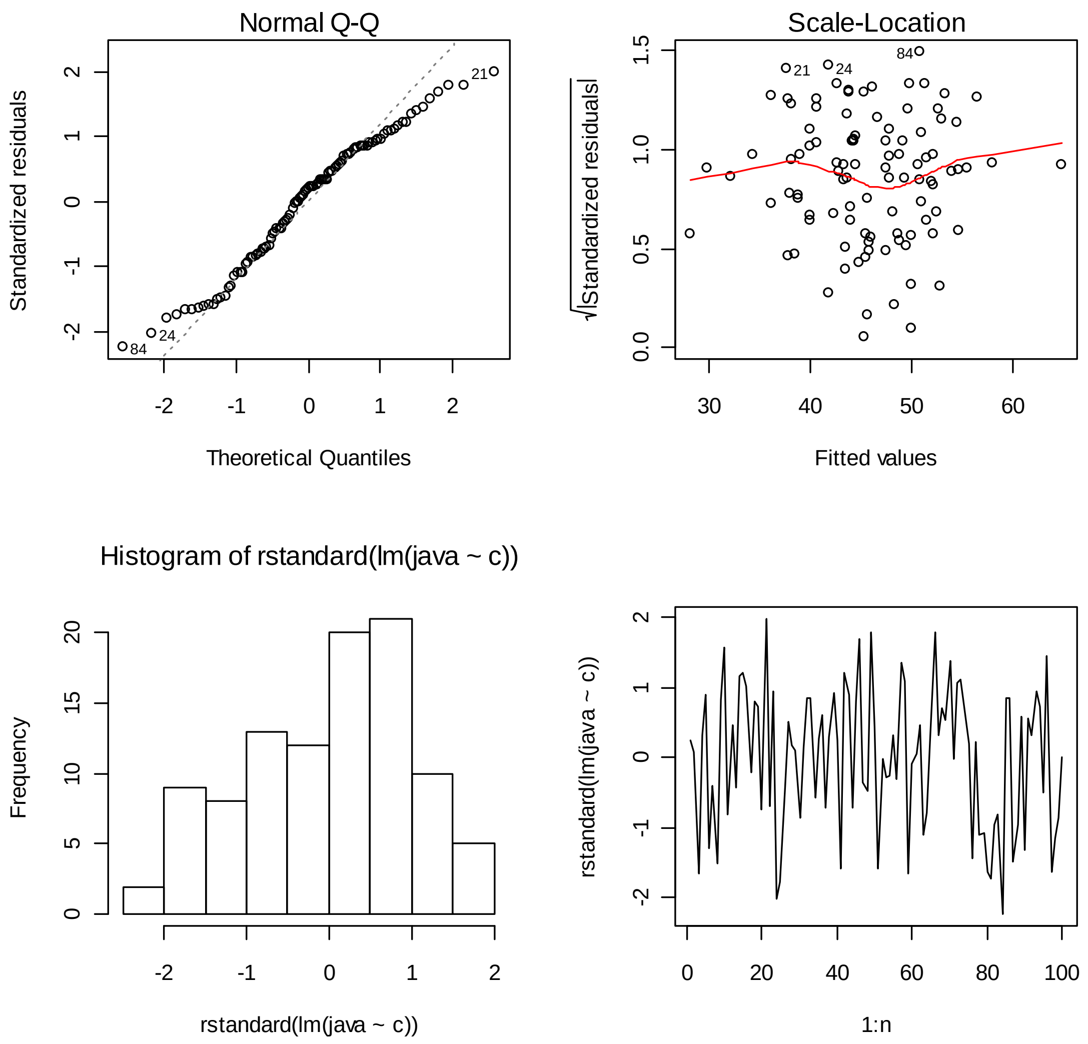


Figura 2

Preg. 5) (2.5 punts). Doneu una previsió puntual de quin serà el temps de CPU estimat per l'algorisme implementat en JAVA si el temps de CPU de l'algorisme implementant en C ha estat 30 segons. Calculeu l'interval de confiança al 95 per a aquesta previsió.

- PREVISIÓ: $\hat{Y}_{JAVA} = -0.37 + 3.03 * 30 = 90.60\ seg.$
- DESVIACIÓ TIPUS DE LA PREVISIÓ:

$S_{\hat{Y}_{JAVA}} =$

$s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(30-\bar{C})}{\sum(C_i-\bar{C})^2}} = s\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(30-\bar{C})^2}{\sum(C_i-\bar{C})^2}} = \sqrt{10.142}\sqrt{1+\frac{1}{100}+\frac{(30-15.25)^2}{99*4.16}} = \sqrt{10.142*(1+0.01+0.53)} =$
$\sqrt{10.142*1.54} = 3.95$

- IC(PREVISIÓ, 95%): $90.60 \pm 1.98 * 3.95$, és a dir **(82.77, 98.42)**.
- INTERPRETACIÓ: Un algorisme que en C tingui un temps de CPU de 30 94 sec, el seu temps de CPU implementat en JAVA oscil·larà entre 82.77 i 98.42 sec, si es treballa amb una confiança del 95% o be s'assumeix un marge d'error del 5%.