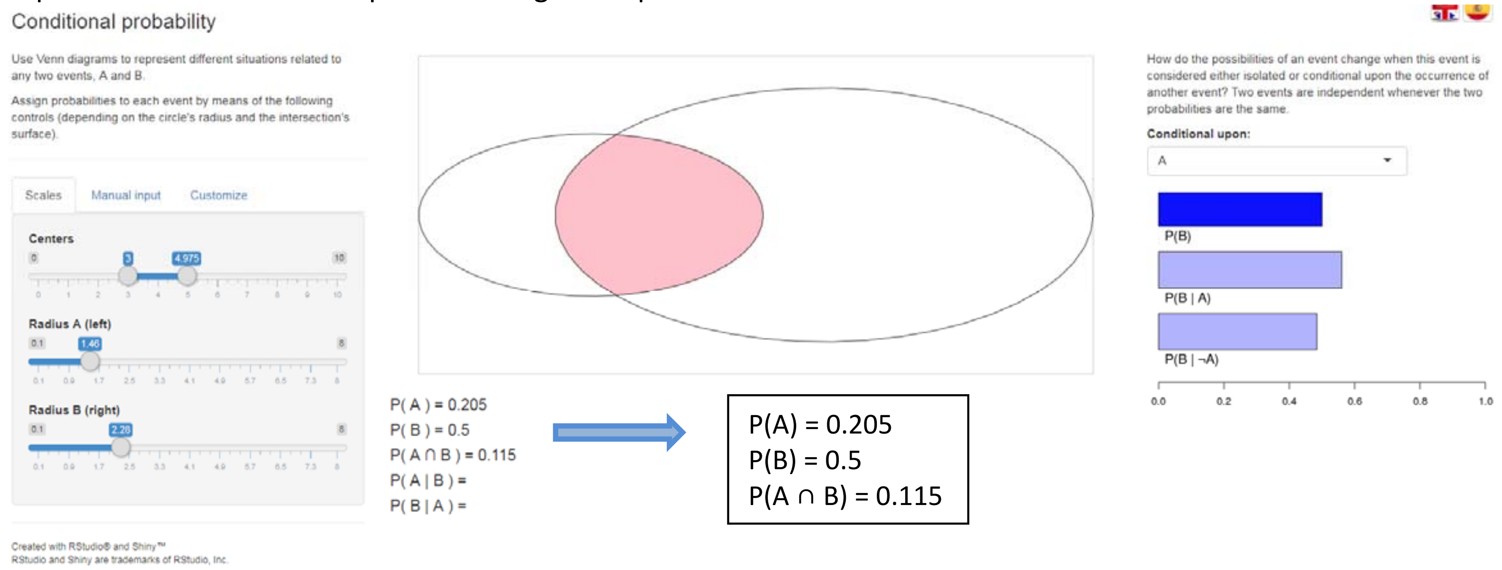
ºNOM:_____________________________COGNOM:____

Problema 1 (B1) ***(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Raoneu les respostes o Expliciteu i justifiqueu els càlculs)***

1. Imagini 2 esdeveniments A i B que representen respectivament una certa realitat i el seu indicador o "xivato". P.e., A és el fet que un determinat dispositiu tingui una avaria, i B un algorisme que classifica un funcionament erroni del dispositiu com a avaria del tipus d'A. La figura esquematitza la situació.



a) (1p) Calculi P(A|B)

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = 0.115 / 0.5 = 0.23$

b) (1p) Calculi P(B|A)

$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A) = 0.115 / 0.205 = 0.56$

c) (2p) En una situació ideal, A i B coincidirien plenament. Com serien aleshores els esdeveniments A i B, dependents o independents?

En la situació ideal serien idèntics, equivalents, el solapament seria total; per tant serien dependents, amb una dependència absoluta, o complerta, o màxima, o perfecte, o determinista.

d) (2p) En quina situació P(A|B) i P(B|A) serien iguals?

Com $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ i $P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$; la condició és que $P(B) = P(A)$

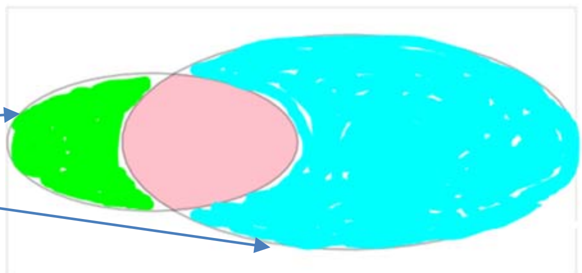
e) (2p) En quina situació pot passar que $P(A|B) = P(A \cap B)$?

Com $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$; la condició és que $P(B) = 1$ (esdeveniment segur: l'algorisme sempre classifica com avaria)

f) (2p) Darrera l'algorisme que classifica en B i B^C (B^C equival a ¬B) hi ha un indicador numèric, de forma que podem escollir el punt de tall per aconseguir que el 50% dels casos siguin classificats com a B [$P(B)=P(B^C)=0.5$].
Els nostres clients donem més importància a minimitzar $P(A|B^C)$ ["trobar casos que tenen realment una avaria (A) dins del classificats com a no avariats (B^C)"] que a minimitzar $P(A^C|B)$ ["trobar casos que no tenen avaria (A^C) tot i haver estat classificats com a avariats (B)"]. Definim 2 zones d'interès (per la seva conflictivitat): $A \cap B^C$ i $A^C \cap B$. Si prioritzem minimitzar $P(A|B^C)$ sobre minimitzar $P(A^C|B)$, quina de les dues zones [$A \cap B^C$ o $A^C \cap B$] convindria que tingués una probabilitat més petita?

Com $P(A|B^C) = P(A \cap B^C) / P(B^C)$; $P(A^C|B) = P(A^C \cap B) / P(B)$ i $P(B) = P(B^C)$;
Per a que $P(A|B^C) < P(A^C|B)$, la condició és que $P(A \cap B^C) < P(A^C \cap B)$

(aquesta probabilitat
mes petita que aquesta)



NOM:____________________________COGNOM:____

Problema 2 (B2)

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs)

El nombre de CPUs que necessiten 2 processos **independents** per executar-se són 2 variables aleatòries (X_1 i X_2) que depenen dels paràmetres d'entrada que rep cada procés. Ambdues variables aleatòries tenen la mateixa funció de probabilitat:

Funció de probabilitat	**Nombre de CPUs requerides**			
Variable aleatòria	**1**	**2**	**3**	**4**
X_1	0.4	0.3	0.2	0.1
X_2	0.4	0.3	0.2	0.1

1) Calcula l'esperança i la variància del nombre de CPUs requerides per **un** procés (1 punt)

$$E(X_1) = E(X_2) = \sum(k \cdot p_1) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 2$$

$$E(X_1^2) = E(X_2^2) = \sum(k^2 \cdot p_1) = 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 + 4^2 \cdot 0.1 = 5$$

$$V(X_1) = V(X_2) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 5 - 2^2 = 1$$

2) Escriu la funció de probabilitat conjunta de X_1 i X_2 (1 punt)

Com que són independents, la funció de probabilitat conjunta s'obté a partir del producte de les probabilitats marginals.

X_1/X_2	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0.16	0.12	0.08	0.04
2	0.12	0.09	0.06	0.03
3	0.08	0.06	0.04	0.02
4	0.04	0.03	0.02	0.01

3) Digues quin és el valor de les següents probabilitats: $P(X_1 = 1|X_2 = 1)$, $P(X_1 = 1|X_2 = 2)$, $P(X_1 = 1|X_2 = 3)$ i i $P(X_1 = 1|X_2 = 4)$ (1 punt)

Com que són independents, totes són iguals a : $P(X_1 = 1) = 0.4$

4) Quina és la probabilitat de que el nombre de CPUs emprades pel 2n procés (X_2) sigui superior a les emprades pel procés 1 (X_1) (1 punt)

$$P(X_2 > X_1) = 0.12 + 0.08 + 0.04 + 0.06 + 0.03 + 0.02 = 0.35$$

5) Definim les següents variables aleatòries:
m: "nombre de CPUs mínim emprades per algun dels 2 processos"
M: "nombre de CPUs màxim emprades per algun dels 2 processos"
Escriu la funció de probabilitat conjunta de m i M. (1 punt)
Es pot obtenir sumant les probabilitats de l'anterior taula segons els valors de la següent taula

Valors de m				
X_1 / X_2	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
4	1	2	3	4

Valors de M				
X_1 / X_2	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

La funció de probabilitat conjunta serà:

m / M	**1**	**2**	**3**	**4**	
1	0.16	0.24	0.16	0.08	0.64
2	0	0.09	0.12	0.06	0.27
3	0	0	0.04	0.04	0.08
4	0	0	0	0.01	0.01
	0.16	0.33	0.32	0.19	1

6) En un moment concret, hi ha 2 màquines amb 2 i 3 CPUs lliures disponibles per executar els processos de l'enunciat. Malauradament, no sabem si aquest nombre de CPUs disponibles serà suficient per poder-los executar: per augmentar-ne les probabilitats, el procés que requereix menys CPUs sempre s'assigna a la màquina que té 2 CPUs lliures i el procés que requereix més CPUs s'assigna a la màquina que té 3 CPUs lliures (en cas d'empat s'assignen aleatòriament). Calcula la probabilitat que es puguin executar els 2 processos en aquestes dues màquines. (1 punt)

$$P(m \leq 2, M \leq 3) = 0.16 + 0.24 + 0.16 + 0.09 + 0.12 = 0.77$$

7) Digues sense fer cap càlcul si les variables aleatòries m i M són independents i argumenta-ho. (1 punt)

No són independents. La distribució de les probabilitats en les files o les columnes no és proporcional. Vist d'un altre manera, saber el valor de *m* ens aporta informació sobre el valor de *M* i viceversa. En un cas extrem, si es sap que m=4, es coneix que inequívocament *M*=4.

8) Calcula la covariància de *m* i *M* i **interpreta-la**. Pista: $E(m \cdot M) = 4$ (1 punt)

$$E(m) = 1 \cdot 0.64 + 2 \cdot 0.27 + 3 \cdot 0.08 + 4 \cdot 0.01 = 1.46$$
$$E(M) = 1 \cdot 0.16 + 2 \cdot 0.33 + 3 \cdot 0.32 + 4 \cdot 0.19 = 2.54$$

$$Cov(m, M) = E(m \cdot M) - E(m) \cdot E(M) = 4 - 1.46 \cdot 2.54 = 0.2916$$

El valor positiu de la covariància apunta cap a una relació lineal directa de les variables aleatòries *m* i *M*: un valor major d'una es relaciona amb un valor major de l'altre.

9) Quant val la variància de M–m? (2 punts)

$$E(m^2) = 1^2 \cdot 0.64 + 2^2 \cdot 0.27 + 3^2 \cdot 0.08 + 4^2 \cdot 0.01 = 2.6$$
$$E(M^2) = 1^2 \cdot 0.16 + 2^2 \cdot 0.33 + 3^2 \cdot 0.32 + 4^2 \cdot 0.19 = 2 - 2 = 7.4$$
$$V(m) = E(m^2) - E(m)^2 = 2.6 - 1.46^2 = 0.4684$$
$$V(M) = E(M^2) - E(M)^2 = 7.4 - 2.54^2 = 0.9484$$
$$V(M - m) = V(M) + V(m) - 2 \cdot Cov(M, m) = 0.4684 + 0.9484 - 2 \cdot 0.2916 = 0.8336$$

O bé:

m / M	**1**	**2**	**3**	**4**
1	(0) 0.16	(1) 0.24	(2) 0.16	(3) 0.08
2	0	(0) 0.09	(1) 0.12	(2) 0.06
3	0	0	(0) 0.04	(1) 0.04
4	0	0	0	(0) 0.01

En vermell, els valors de M–m. La distribució de probabilitat és:

P(0) = 0.16+0.09+0.04+0.01 = 0.3;
P(1) = 0.24+0.12+0.04 = 0.4;
P(2) = 0.16+0.06 = 0.22;
P(3) = 0.08;

E(M–m) = E(M) – E(m) = 2.54 – 1.46 = 1.08;
$E((M–m)^2) = 1·0.4 + 4·0.22 + 9·0.08 = 2$;
$V(M–m) = 2 – 1.08^2 = 0.8336$

B3. “Tangoo” és un robot del tipus netejador-aspirador, i un equip d’investigadors està analitzant les seves funcionalitats. Per la detecció d’obstacles utilitza una sèrie de sensors: si n’hi ha un al davant, un sensor el detecta amb probabilitat 0.7; per aquesta raó el robot implementa una regla de majories.

1. Es consideren dues opcions: a) cinc sensors, i reaccionar quan almenys tres detectin un obstacle; b) sis sensors, i reaccionar quan quatre o més detectin un obstacle. Els sensors operen independentment entre sí. Quina de les dues opcions donarà major probabilitat de detecció d’obstacles i per tant millor funcionament? (*Pista: trobeu models probabilístics adients per a cada opció*)

   Xa: quants sensors (dels 5) detecten l’obstacle, Xa ~ B(5, 0.7) Xa’: ... NO detecten, ~ B(5, 0.3)
   Xb: quants sensors (dels 6) detecten l’obstacle, Xb ~ B(6, 0.7) Xb’: ... NO detecten, ~ B(6, 0.3)
   La resposta la obtenim comparant $P(Xa \geq 3)$ i $P(Xb \geq 4)$.
   Equivalentment, $P(Xa' \leq 2)$ i $P(Xb' \leq 2)$. Per taules:
   a) F(2, 5, 0.3) = 0.8369
   b) F(2, 6, 0.3) = 0.7443
   És millor la primera opció, cinc sensors i que almenys tres detectin l’obstacle.

En condicions habituals, el robot ha d’interrompre les operacions per causa de brutícia que s’acumula als elements òptics o mòbils. S’ha determinat que les interrupcions ocorren 1 vegada cada 30 hores (suposem que és un procés poissonià).

2. El robot neteja durant tres hores cada dia. Quina probabilitat hi ha d’interrompre la neteja un dia qualsevol, almenys una vegada?

   Per a un període de 3 hores, $\lambda=0.1$
   T ~ P(λ): “nombre d’interrupcions en una sessió de 3 hores”. P(T > 0)?
   P(T > 0) = 1 – P(T=0) = (Taules) = 1 – 0.905 = **0.095**
   També es pot utilitzar l’expressió de la funció de probabilitat de Poisson: 0.09516258

3. Descriu un model de probabilitat per una variable que determini el nombre de dies consecutius que “Tangoo” neteja fins que un dia s’ha d’interrompre. Quin és el nombre esperat d’aquesta variable?

   Geom(p=0.095). μ = 1/0.095 = 10.5 dies

4. Troba la probabilitat que el robot netegi sense interrupcions durant més de 50 hores de treball.

   Y ~ exp(λ=1/30): “hores de treball fins a una interrupció”. El temps que el robot no neteja no es compta
   $P(Y > 50) = 1 - F_Y(50) = 1 - (1 - \exp(-50\,\lambda))$ = **0.18886**

Ara tractarem de la bateria del robot. El temps de càrrega segueix una distribució Normal, amb mitjana 150 minuts i desviació tipus 40 minuts.

5. Calcula la probabilitat que la bateria es carregui en menys de dues hores.

   B ~ N(150, 40): “temps [min] per a carregar la bateria”
   P(B < 120) = P(Z < (120 – 150)/40) = F(Z < -0.75) = 1 – F(Z < 0.75) = (Taules) = 1 – 0.7734 = **0.2266**

6. Quin temps és el màxim (en 9 de cada 10 dies) que pot necessitar el robot per carregar completament la bateria? I quin seria el mínim (també, 9 de cada 10 dies)?

   P(B < M) = 0.9; M és el “màxim”, és a dir: 9 de cada 10 vegades el temps B és menor
   M és el percentil 90%. $M = 150 + 40\, z_{0.9}$ = (Taules) = 150 + 40 1.28 = **201.2 min**
   P(B > m) = 0.9; m és el “mínim”, és a dir: 9 de cada 10 vegades el temps B és major
   m és el percentil 10%, per tant, és simètric de M: m = 150 - 40 1.28 = **98.8 min**

7. Si cada dia el robot carrega una vegada, digues quina és la probabilitat que empri més de 20 hores en carregar la bateria durant una setmana. És important assumir que els temps de càrrega diaris són independents entre sí? És important assumir que a un dia el temps segueix una distribució Normal?

   W: temps total de càrrega en 7 dies ~ $N(7 \cdot 150, \sqrt{7}\ 40)$ = N(1050, 105.83)
   P(W > 1200) ? equival a 1 – F(1.417), aprox. 1 – 0.9222 = 0.0778.
   Sí és important que els 7 dies són independents, perquè la variància total sigui la suma de variàncies. I el temps d’un dia hauria de ser Normal, o alguna distribució no molt diferent, perquè la suma de 7 VA no seria Normal si el temps de càrrega d’un dia fos quelcom molt allunyat d’aquest model (ja que 7 no és el nombre gran que precisa el TCL).