Problema 1: Solució

Una empresa d'informàtica rep una peça clau dels seus ordinadors de tres proveïdors diferents: A, B i C. Malauradament cap dels tres proveïdors produeix un 100% de les peces sense defecte. Les respectives probabilitats es troben a la taula següent, on D indica que la peça te un defecte i $\neg D$ que no en te cap.

	A	**B**	**C**
$\neg D$	0,97	0,95	0,98
D	0,03	0,05	0,02

a) (0.5 punts)
Les probabilitats a la taula són probabilitats condicionades o conjuntes? Raoneu la resposta.

Solució:
Com la suma de cada columna fa 1, es tracta de les probabilitats condicionades de la variable 'Defecte' donat cada un dels tres proveïdors. En cas de probabilitats conjuntes la suma de totes les probabilitats a la taula seria 1.

b) (1.5 punts)
Se sap que la meitat de les peces provenen del proveïdor A, i que B proveeix el doble de peces que C. Per tant, quina és la probabilitat que una peça qualsevol tingui un defecte?

Solució:
Tenim $\mathrm{P(A)} = 0.5$, $\mathrm{P(B)} = \frac{1}{3}$ i $\mathrm{P(C)} = \frac{1}{6}$ i per tant

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(D|\mathrm{A})\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(D|\mathrm{B})\mathrm{P(B)} + \mathrm{P}(D|\mathrm{C})\mathrm{P(C)} = 0.03 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot \tfrac{1}{3} + 0.02 \cdot \tfrac{1}{6} = 0.035.$$

c) (1.5 punts)
Si se sap que una peça no és del proveïdor B, quina és la probabilitat que tingui un defecte?

Solució:

$$\mathrm{P}(D|\neg\mathrm{B}) = \mathrm{P}(D|\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = \frac{\mathrm{P}\big(D \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})\big)}{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{C})} = \frac{\mathrm{P}(D|\mathrm{A})\mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(D|\mathrm{C})\mathrm{P(C)}}{0.5 + \frac{1}{6}} = 0.0275.$$

d) (1.5 punts)
Si trobem una peça amb defecte, quina és la probabilitat que sigui del proveïdor B?

Solució:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|D) = \frac{\mathrm{P}(D|\mathrm{B})\mathrm{P(B)}}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0.05 \cdot \frac{1}{3}}{0.035} = 0.476.$$

e) (0.75 punts)
Són independents les variables 'Proveïdor' i 'Defecte'? Raoneu la resposta.

Solució:
Les dues variables no són independents, ja que les distribucions condicionades a la taula són diferents. La probabilitat d'un defecte varia d'un proveïdor a un altre.

f) (1.25 punt)
Ens porten dues peces. Quina és la probabilitat que (exactament) una d'elles sigui del proveïdor C?

Solució:
Hi ha dues possibilitats: que la primera peça sigui de C i no la segona o a l'inrevés. Per tant la probabilitat és:

$$\mathrm{P(Una\ de\ dues\ peces\ és\ de\ C)} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0.278.$$

Nota: El nombre de peces de C segueix una distribució binomial.

g) (1.25 punt)
Quina és la probabilitat que (exactament) una tingui un defecte?

Solució:
Amb el mateix raonament que abans obtenim la probabilitat

$$\mathrm{P}(\text{Una de dues peces te un defecte}) = 2 \cdot 0.035 \cdot (1 - 0.035) = 0.068.$$

h) (1.75 punts)
Si sabem que una de les dues peces te un defecte, quina és la probabilitat que les dues siguin del proveïdor C?

Solució:
Sigui $D1$ la variable que exactament una de les dues peces te un defecte i C2 la variable que dues peces siguin del proveïdor C. Llavors,

$$\mathrm{P}(\mathrm{C2}|D1) = \frac{\mathrm{P}(D1|\mathrm{C2})\mathrm{P}(\mathrm{C2})}{\mathrm{P}(D1)} = \frac{2 \cdot 0.02 \cdot 0.98 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{0.068} = 0.016.$$

Nom i cognoms **DNI:**

Problema B2

El nombre de relats curts que un escriptor suec de novel·la negra publica per any (X) es distribueix segons aquesta funció de probabilitat:

x	2	3	4	5	6	7
P(X=x)	0,15	0,25	0,4	0,05	0,1	0,05

a) Determina quins valors prendrà la funció de distribució d'X. (1 punt)

b) Representa gràficament la funció de probabilitat i la funció de distribució (1 punt)

c) Quin és el valor esperat i quina es la desviació estàndard o tipus de la variable aleatòria X? Com s'interpreten aquests valors? (2 punts)

d) Quina és la probabilitat que el nostre escriptor hagi publicat 5 o més relats en un any? (1 punt)

e) Si sabem que ha publicat 5 relats o més, quina es la probabilitat que en publiqui 6 o més relats? (1 punt)

Si el nostre escriptor envia 5 relats al mes i la probabilitat que li acceptin un treball per a ser publicat és de 0.7.

f) Quin és el model de probabilitat que segueix la nostra variable Y? Quins són els valors dels paràmetres de la distribució? (1 punt)

g) Quina és la probabilitat que li publiquin exactament 2 treballs? (1 punt)

L'ingrés econòmic que li suposa la publicació d'un relat es una variable aleatòria continua (W) i és descriu mitjançant la següent funció de distribució:

$$F_W(w) = a\left(w-100\right)^b, w \in (100,200)$$

h) Si *a* val 1/10. Quin és el valor de *b*? Nota: Heu de fer servir una propietat de la Funció de distribució. (1 punt)

i) Quina proporció de relats es paga amb més de 160€? (1 punt)

Solució:

a)

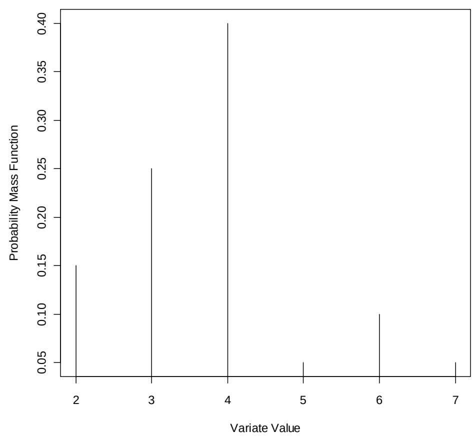
X=x	2	3	4	5	6	7
F(x) = P(X <=x)	0,15	0,4	0,8	0,85	0,95	1

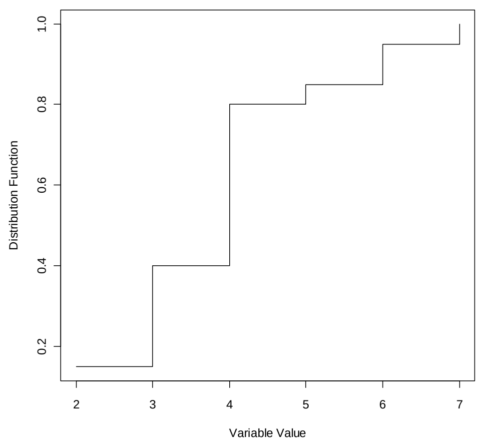
b)

```
k<-c(2,3,4,5,6,7)
probs<-c(0.15,0.25,0.4,0.05,0.1,0.05)
plot(k, probs, type="h",xlab="Variate Value", ylab="Probability Mass
Function")

# Funció de Distribució
prob_acum<-c(0.15,0.4,0.8,0.85,0.95,1)

k<-c(2,3,4,5,6,7)
plot(k,prob_acum,type="s",xlab="Variable Value",ylab="Distribution Function")
```





c)

Mitjana o valor esperat o l'esperança (μ) és la suma de $k \bullet P_X(k)$= sum(k*probs)=3.85
Desviació estàndard o tipus:

La variància (σ^2) és la suma de $(k - \mu)^2 \bullet P_X(k)$: sum(((k–(sum(k*probs)))**2)*probs) =1.7275
La desviació tipus o estàndard (σ) és l'arrel quadrada de la variància:
sqrt(sum(((k–(sum(k*probs)))**2)*probs))= 1.3143
Interpretació: La mitjana indica el valor de la tendència central de les dades.
La desviació típus és una mesura de variabilitat, indica quantes unitats es desvien les observacions en mitjana del valor esperat.

d) P(X>=5)= 0,05+0,1+0,05=0,2
O be fent 1–P(X<5)= 1–P(X<4)=1–0,8=0,2

e) P(X>=6)/ P(X>=5)= (0.1+0.05)/ (0.05+0.1+0.05)= 0.15/0.20=0.75

f) Y segueix una distribució binomial, n=5, p=0.7

g) P(Y=2) = P(Y<= 2) – P(Y<=1)
Y és B(5, 0.7) per a trobar-lo a les taules cal definir V que és B(5, 0.3) i P(V<=3) – P(V<=2)
Taules: 0.9692–0.8369=0.1323
R: pbinom(2,5,0.7)- pbinom(1,5,0.7)

h) $F_W(w)$= 1, w >= 200. a=1/10 b=? $1/10\ (200 - 100)^b = 1$;
$100^b = 10$; <u>b = 1/2</u>; per logaritmes o veient que es l'arrel quadrada de 100

i)

$P(W>160)= 1–P(W<=160)=1–F_W(W=160)=1–a(160-100)^b=$<u>0.2254</u>

Problema 3

Un determinat banc, que té per lema "l'avarícia mai ha trencat cap sac", disposa d'un producte d'alt risc que vol col·locar entre els seus clients. El director de la sucursal 0666 estima que 1 de cada 75 dels seus clients estaria interessat en comprar el producte si se li ofereix.

A, B, C: 1 punt cada subapartat; D, 2 punts cada subapartat. La justificació formal és indispensable.

A. Suposem que un treballador de la sucursal ha de plantejar la compra a 30 clients en una setmana de cinc dies laborables[1]. Quina és la distribució de probabilitat de les variables:

- nombre de clients interessats (*captats*) pel treballador, per setmana.
  - X ~ B(n=30, p=1/75); evidentment, es suposa que els clients es prenen a l'atzar, i que són independents uns d'altres.
- nombre de clients que cal oferir el producte fins que es troba a un interessat.
  - N ~ Geom(p=1/75)
- temps necessari (en dies) fins que el treballador trobi a un interessat.
  - T ~ Exp(λ), assumint que es tracta d'un procés de Poisson, on la taxa λ representa el nombre mitjà de clients que es poden trobar en un dia: per setmana serien 30*1/75, per dia laborable 6/75 = 0.08

B. Calculeu les probabilitats:

- que un treballador trobi un (1) client interessat en una setmana.
  - $P(X=1) = n\,p\,(1-p)^{29} = 0.2710212$
- que un treballador trobi un client interessat després de plantejar la compra a un màxim de 5 clients (comptant-hi amb el que comprarà).
  - $P(N \leq 5)$, on N ~ Geom(p=1/75). Es a dir:

  $P_N(1)+ P_N(2)+ P_N(3)+ P_N(4)+ P_N(5) = p(1+q+q^2+q^3+q^4) =$
  1/75(1+74/75(1+74/75(1+74/75(1+74/75)))) = 0.06491243
- que un treballador trigui més de 8 dies en trobar un client interessat en el producte.
  - P(T > 8) = exp(–0.08*8) = 0.5272924

C. Si la sucursal té 7 treballadors, i cadascú ofereix el producte a 30 clients per setmana:

- quin nombre de clients interessats esperem trobar?
  - $Y = X_1 + ... + X_7$; $E(Y) = 7\,E(X) = 7\cdot30\cdot1/75 = 2.8$ clients;
- i quina és la variància d'aquest nombre?
  - Es suposa que els 7 treballadors són independents: Y ~ B(210, 1/75)

  $V(Y) = 7\,V(X) = 7\cdot30\cdot1/75\cdot74/75 = 2.76267$
- Trobeu una cota màxima al nombre de clients que es podrien captar amb tots els treballadors, en una setmana, amb un error del 5%.
  - Aproximem Y per Poisson(2.8), i $F^{-1}(0.95) \simeq 6$: F(6) = 0.976. La resposta és **sis clients**.

[1] Totes les referencies temporals son a la setmana de cinc dies laborables.

D. El banc decideix iniciar una campanya publicitària per captar clients per a aquest producte financer. D'aquesta manera abastem més públic, encara que amb una eficiència menor: es creu raonablement que només 1 de cada 300 clients pot estar disposat a adquirir el producte. Si ens dirigim a 250,000 clients del banc,

- expliqueu amb quin(s) model(s) de probabilitat podem aproximar el nombre de clients interessats en aquesta campanya.
  - Sigui W la nova variable que compta els clients interessats. Per similitud, W és purament Binomial(n=250,000, p=1/300):
  - $E(W) = 833.33$
  - $V(W) = 830.556$ ($\sigma = 28.82$)

  Per tant, com que n és molt alt, W es pot aproximar per una Normal: $W \approx N(833.33, 28.82)$.

  W també es pot aproximar per un model Poisson, però la taxa 833.33 no fa que sigui pràctic.

- Quina és la probabilitat de no arribar a 800 clients?
  - $P(W < 800) = P(Z < (800–833.33)/28.82) = F_Z(–1.1565) = 1– F_Z(1.1565)$

  Prenent de les taules els valors 1.15 i 1.16, i fent el valor mig:

  $P(W < 800) \approx 1– (0.8749+0.8770)/2 = 0.1240$

  Una mica millor:

  $P(W < 800) \approx 1– (0.8749 \cdot 0.35+0.8770 \cdot 0.65) = 0.123735$

- A quants clients hauríem d'escriure, per tal d'assegurar un mínim de 1000 clients interessats, amb un risc del 1%?
  - $V \sim B(n=M, p=1/300) \approx (N(M/300, sqrt(M/300)$, on $P(V < 1000) = 0.10$

  $(1000–M/300)/sqrt(M/300) = –2.33 \leftrightarrow (1000–m)/sqrt(m) = –2.33$
  $(1000–m)^2 = 1,000,000 –2,000m + m^2 = (–2.33)^2$ m = 5.4289m
  m^2 –2,005.4289m + 1,000,000 = 0; m = 1,076.45; **M** =300m = **322934**