Problema 1..

A. En una ciudad existen dos fábricas de componentes electrónicos, y ambas fabrican componentes de calidad A, B y C. En la fábrica F1, el porcentaje de componentes que se fabrican de calidad A es del 80%, de calidad B del 5%, y de calidad C del 15%. En la fábrica F2, esos porcentajes son a, b y c.

A.1 Dar una expresión general de la proporción de componentes de calidad A que fabrican entre las dos fábricas. (1 punto)

Sea p=la proporción de la producción total de componentes electrónicos de la ciudad que fabrica F1=P(F1). Así, P(F2)=1-p.

$$P(A) = P(A \mid F1) \cdot P(F1) + P(A \mid F2) \cdot P(F2) = \frac{80}{100} p + \frac{a}{100}(1-p) = 0.80p + \frac{a}{100}(1-p)$$

A.2 Sabiendo que a=92%, y que el porcentaje de componentes de calidad A fabricados entre ambas fábricas es del 89%, ¿cuál es el porcentaje de la producción total de cada fábrica? ¿Qué fábrica produce más? (1 punto)

$$P(A) = 0.89 \to 0.89 = 0.80p + 0.92(1-p)$$

Entonces

$$p = \frac{0.92 - 0.89}{0.92 - 0.80} = \frac{0.03}{0.12} = 0.25$$

La fábrica F1 fabrica el 25% de todos los componentes, mientras que F2 fabrica el 75% restante.

A.3 Si el porcentaje de componentes de calidad B en toda la ciudad es del 5%, ¿qué valores toman b y c? (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} P(B) = 0.05 \\ P(B) = P(B \mid F1)P(F1) + P(B \mid F2)P(F2) = \frac{5}{100}0.25 + \frac{b}{100}0.75 \end{array}\right\} \frac{b}{100} = \frac{0.05 - 0.05 \cdot 0.25}{0.75} = 0.05 \to b = 5\%$$

Luego, como

$$a + b + c = 100 \to c = 100 - 92 - 5 = 3\%$$

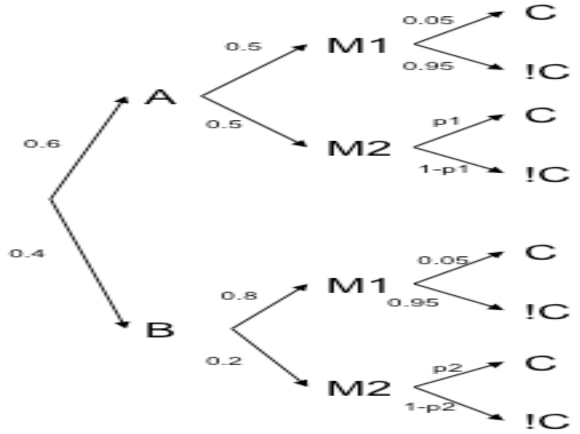
A.4 De entre las componentes que se fabrican en la ciudad de calidad C, ¿cuál es la proporción que fabrica F2? (2 punto)

$$P(F2 \mid C) = \frac{P(C \mid F2) \cdot P(F2)}{P(C \mid F1) \cdot P(F1) + P(C \mid F2) \cdot P(F2)} = \frac{0.03 \cdot 0.75}{0.15 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.75} = 0.375$$

La fábrica F2 fabrica el 37.5% de las componentes de calidad C.

B. En una zona determinada, el negocio de telefonía móvil se reparte entre dos únicas compañías, A y B. La mayoría de los usuarios pertenecen a la compañía A (60%). Estas compañías, además, sólo comercializan dos marcas de teléfono, M1 y M2. La compañía A ofrece estas dos marcas en igualdad de condiciones, por lo que la probabilidad de tener un terminal de la marca M1 en la compañía A es de 0.50 (cada usuario sólo puede tener un terminal). La compañía B, sin embargo, ha conseguido unas condiciones más ventajosas de la marca M1, con lo que la probabilidad de tener un terminal de la M1 si se es usuario de compañía B es de 0.8.
Por otro lado, se sabe que la probabilidad de un corte en la comunicación durante una llamada (C) es de 0.05 para los usuarios con un móvil de la marca M1 (independientemente de la compañía a la que pertenezcan). Para los usuarios de la marca M2, la probabilidad de un corte en la llamada depende de la compañía a la que se pertenece: p1 si es de la compañía A, p2 si es de la compañía B.

B1. Dibujad el árbol de esta experiencia aleatoria y sus probabilidades. (1 punto)



B.2 Se conoce que la probabilidad de un corte en la llamada es de 0.1 para los usuarios de la compañía A y de 0.15 para los usuarios de la compañía B. Calcular la probabilidad de C. (1 punto)

$$P(C) = P(C \mid A) \cdot P(A) + P(C \mid B) \cdot P(B) = 0.1 \cdot 0.6 + 0.15 \cdot 0.4 = 0.12$$

B.3 Se sabe que a un usuario de la marca A se le ha cortado la comunicación, ¿cuál es la probabilidad de que disponga de un teléfono de la marca M1? (1 punto)

$$P(M1 \mid C \cap A) = \frac{P(M1 \cap C \cap A)}{P(C \cap A)} = \frac{0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.05}{0.06} = 0.25$$
$$P(C \cap A) = P(C \mid A) \cdot P(A) = 0.1 \cdot 0.6 = 0.06$$

B.4 Calcular la probabilidad p1 de un corte durante una llamada para un usuario de la compañía A con un móvil de la marca M2. (1 puntos)

Conocemos p(C|A), que se puede expresar cómo la suma de todos los caminos posibles:

$$P(C \mid A) = 0.1 = P(C \mid M1, A) \cdot P(M1 \mid A) + P(C \mid M2, A) \cdot P(M2 \mid A) = 0.05 \cdot 0.5 + p1 \cdot 0.5 \rightarrow$$
$$p1 = \frac{0.1 - 0.05 \cdot 0.5}{0.5} = 0.15$$

Plantilla **problema 2.** *Totes valen igual.* *(entre parèntesis el % 'esperat' d'alumnes que contestaran bé)*

Per millorar l'aplicació per matricular-se a la FIB, volem estudiar si el nombre d'assignatures no superades el Q anterior (X) ajuda a predir el nombre d'assignatures que es volen matricular (Y). La taula dona les probabilitats conjuntes.

1. Dona les probabilitats marginals de X i de Y. (90%)

Y= Matriculades

X= No superades	**2**	**3**	**4**	**5**	
0	0	0	0.1	0.1	.2
1	0	0.1	0.1	0.1	.3
2	0.1	0.1	0.1	0	.3
3	0.1	0.1	0	0	.2
	.2	.3	.3	.2	

2. Sabem que la E(X)=1.5 i V(X)=1.05, raona, sense calcular els valors de E(Y) i V(Y) (85%)

Com Y és simètrica, E(Y)=3.5.
Com les distàncies al centre són les mateixes, Y tindrà V(Y)=V(X)=1.05

També és bona: Encara que no és la relació real entre Y,X, podem imaginar Y=X+2 (ja que comparteixen la mateixa funció de probabilitat), i aleshores E(Y)=E(X+2) i Var(Y)=Var(X+2)=Var(X)

3. Quin nombre de assignatures matriculades cal esperar per a un estudiant que les hagi superat totes. (90%)

E(Y|X=0) = .5*4 + .5*5 =4.5

4. Calcula la covariància i la correlació. (55%)

$[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]Px_iy_j$	Y-E(Y): -1,5	-0,5	0,5	1,5
X-E(X): -1,5	0	0	-0,075	-0,225
-0,5	0	0,025	-0,025	-0,075
0,5	-0,075	-0,025	0,025	0
1,5	-0,225	-0,075	0	0

$\mathrm{Cov}_{XY} = \Sigma [x_i-E(X)][y_j-E(Y)]Px_iy_j = -0,75$
$\mathrm{Corr}_{XY} = \mathrm{Cov}_{XY} / \sigma_X\sigma_Y = -0,75 / 1.05 = -0.714$

4/5 si no calcula la correlació
¾ si el resultat no és correcte però el plantejament complert sí.
½ si només dona el resultat final correcte
1/5 si escriu la fórmula correcta però no calcula.

5. El fet de conèixer el valor de X en el moment de fer la inscripció, aporta informació sobre el valor de Y? (80%)

O bé: $Corr_{XY}$ = -0.714 indica una relació negativa;
O bé: com mostra la taula, per Y petita, valors de X grans.

6. Creus que el model de Poisson podria ser una bona aproximació per la Y? (40%)

No. Tan per arguments mirant les dades (a, b i c), com teòrics (d i e), com mixtes (f)

a) la distribució observada es discreta, però simètrica i amb valors només entre 2 i 5. La Poisson també tindria valors per Y=0, per Y=1 o per Y>5. De fet , amb lambda 3.5, P(Y=0)=0.03, P(Y=1)=0.061 i P(Y>5)=0.142
b) Si fos Poisson, la seva variància seria més gran = 3.5
c) Si fos Poisson, la seva variància seria igual a la Esperança
d) Poisson parla d'esdeveniments independents, però les assignatures matriculades no ho son.
e) Poisson parla de taxa al llarg, p.e., del temps d'esdeveniments poc freqüents.
f) Aquesta variable té llímits, però Poisson, no.

Cada 1 dels 3 primers arguments ja és suficient, però 1 dels 3 últims aïllat, 2/3.
Si diu 'no'. Sense raons, 1/5.
Si diu P no és prou petita, ni n prou gran sense parlar de a què aplica, no té prou sentit: 1/5

7. El temps de resposta (en minuts) del sistema fins confirmar la matriculació es pot representar raonablement amb un model de probabilitat amb una $F(t) = 1-e^{-t}$ per a $t>0$. Si volem garantir un temps de resposta que es compleixi en un 95% de les sol·licituds, quin seria? (80%)

$0.95 = P(T<t) = 1-e^{-t} \rightarrow t=2.996$

En canvi, pel temps dels estudiants per omplir l'aplicació ens han suggerit utilitzar un model de probabilitat amb una $F(t)=(t^2 - t)/6$ per a $1 \le t \le 3$.

8. Creus que aquesta funció pot ser una Fx (Funció de distribució de probabilitat) (50%)

Sí, ja que:

a) és no decreixent (opcional),
b) compleix les cotes (obligatori):
    a. o bé, pel valor mínim, 1, $P(T \le 1)=0$ i pel valor màxim, 3, $P(T \le 3)=1$;
    b. o bé, $\int F(t)=1$

Si diu sí, sense raons, 1/5.
Si no ha canviat '8' per '6', però ho fa i raona bé, OK.

9. Dona el valor de $F_{1.5}$: Quina probabilitat hi ha de trigar 1.5 hores o menys? (85%)

$F(1.5) = F(t)=(t^2 - t)/6 = 0.125$

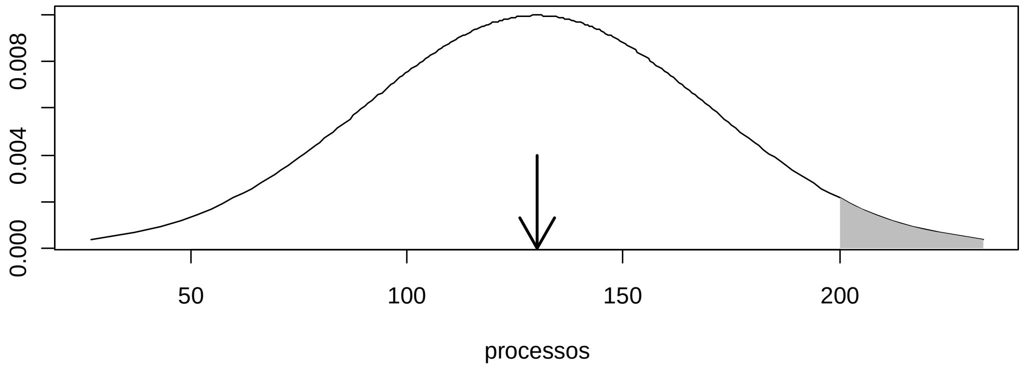
10. Troba el valor t|F(t)=0.5: Quin valor ocupa el percentil 50? (65%)

$F(t)=(t^2 - t)/6 = 0.5 \rightarrow t^2 - t - 3 = 0 \rightarrow t = 2.302776$

Problema 3. *A tots els apartats, justifiqueu les respostes, explicant quines distribucions de probabilitat heu utilitzat.*

Considerem un Buscador de internet que treballa segons una arquitectura distribuïda: disposa de 8 centres, cadascú amb 16 servidors, que són els que fan el treball de computació i que actuen independentment. El nombre de processos que estan oberts en un servidor en un moment donat (X) es pot aproximar per una distribució N(130, 40). Quan el nombre és 200 o més gran, el servidor envia un senyal per indicar que es troba en situació crítica i no pot assumir temporalment més tasques.

(a) Representa gràficament la distribució de la variable *nombre de processos*, marcant clarament l'esperança i la regió crítica. Calcula la probabilitat que un servidor determinat estigui en situació crítica. **(1 pt)**



$P(X \geq 200) = 1\text{-}P(X \leq 200) = 1\text{-}P(Z \leq (200\text{-}130)/40) = 1\text{-}P(Z \leq 1.75) = 1\text{-}0.9600 =$ **0.04**

(b) Observem un servidor: probabilitat que aquest tingui entre 120 i 140 processos oberts. **(1 pt)**

$P(X \leq 140) = F_Z(0.25) = 0.5987.$ $P(120 \leq X \leq 140) = 2(0.5987\text{-}0.5) =$ **0.1974**

(c) Prenem un servidor a l'atzar de cada centre, i fem la mitjana dels processos oberts de tots ells. Probabilitat que aquesta mitjana es trobi entre 120 i 140. **(1.5 pt)**

$M \sim N(130, 40/\sqrt{8}).$ $P(120 \leq M \leq 140) = 2(F_Z(0.7071)\text{-}0.5) =$ **0.5205**

(d) Quina és la distribució del *nombre de servidors en estat crític a un centre determinat*? Justifica la resposta. Troba la probabilitat que hi hagi exactament 1 en un moment donat. **(2 pt)**

C ~ B(16, 0.04). Hem considerat. 1) la probabilitat és la mateixa per a qualsevol servidor; 2) com ens diuen que "actuen independentment", acceptem que si un servidor es troba en situació crítica això no canvia les possibilitats d'estar els altres servidors a aquesta situació (estem ignorant que si un servidor no accepta més tasques, les hauran d'assumir els altres, i això pot incrementar una mica el seu stress, però considerem que és un efecte irrellevant).

El millor és fer-ho a ma: les taules donarien una probabilitat superior. P(C = 1) = 16 0.04 0.96^15 = **0.34693**

(e) Contesta ara amb la distribució del *nombre de servidors en estat crític a tots els centres*. Calcula la probabilitat (exacta) que hi hagi més de 2 servidors en un moment donat (és necessari detallar el càlcul). **(2 pt)**

D ~ B(128, 0.04), assumint que els centres també són independents entre sí.

P(D > 2) = 1-P(D=0)-P(D=1)-P(D=2)
= 1 – 0.96^128 – 128 0.04 0.96^127 – 128 127/2 0.04^2 0.96^126 = **0.8900**

(f) Novament: distribució del nombre de servidors en estat crític a tots els centres, utilitzant una aproximació. Si en coneixes més d'una possibilitat, ordena-les de millor a pitjor.

Una altra vegada: probabilitat que hi hagi més de 2 servidors en un moment donat, mitjançant l'aproximació o aproximacions anteriors.

Troba un límit del màxim nombre de servidors en situació crítica, amb un error del 5%. **(2.5 pt)**

(1) utilitzant la Poisson, $D \approx \mathcal{P}(128 \cdot 0.04) = \mathcal{P}(5.12)$
$P = 1 - P(0)-P(1)-P(2) = 1 - \exp(-5.12)(1 + 5.12 + 5.12^2/2) =$ **0.8851**

(2) Aproximant por $\mathcal{P}(5)$, per trobar λ a les taules:
$P = 1 - F(2) =$ **0.875**

(3) Aproximant Binomial per Normal, aquest pas és bastant feble, perquè la taxa λ no és molt gran. En aquest cas, $D \approx N(\mu=128 \cdot 0.04 = 5.12, \sigma= \sqrt{128 \cdot 0.04 \cdot 0.96} = 2.217)$
$P = 1 - F(2) = 1-F_Z(-1.41) =$ **0.9207**

$F^{-1}(0.95)$, la solució més simple és utilitzar taules, $\lambda=5$: trobem **9 servidors** (per $F(9) = 0.968 > 0.95$)
Si prenem la Normal, surt $5.12 + 1.645 \cdot 2.217 = 8.77$, que s'hauria d'arrodonir a 9.