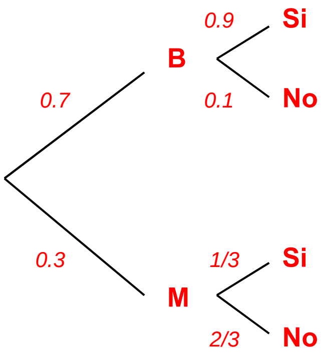
e-mail FIB **@est.fib.upc.edu**

Problema 1. *A tots els apartats justifiqueu les respostes (explicant el passos, formalitzant els càlculs de probabilitats)*

El mentalista Pi valora si presentar-se a un programa de televisió de talents. Partim de que en aquest programa, un 30% de les actuacions no són bones. Per la seva part, existeix un jurat que determina si l'actuació ha estat correcta o no. La probabilitat de tenir un "no" per part del jurat sabent que ha tingut una bona actuació és 0.10, i una de cada tres males actuacions tenen un "sí" del jurat.

1.- Determina l'arbre de probabilitats i el conjunt de resultats (1 punt)

(B=bona actuació, M=mala actuació, Si=si jurat, No=no jurat)



Ω = { (B,Si), (B,No), (B,Si), (M,No) }

2.- ¿Quina és la probabilitat de tenir un "sí" del jurat? (1 punt)

P(Si) = P(B,Si) + P(M,Si) = P(B)P(Si|B) + P(M)P(Si|M) = 0.7 0.9 + 0.3 1/3 = 0.63 + 0.10 = **0.73**

3.- ¿Quina és la probabilitat d'una mala actuació sabent que el jurat ha dit que "sí"? (1 punt)

P(M|Si) = P(M,Si) / P(Si) = 0.3 1/3 / 0.73 = 0.1 / 0.73 = **0.137**

4.- ¿Són independents identificar una actuació como a bona o no i la decisió del jurat? Justificar formalment i comentar què significa (2 punts)

No és independent una bona o mala actuació i un si o no del jurat, és a dir depenent de si l'actuació ha estat bona o no la probabilitat del resultat del jurat canvia (la proporció de una de cada tres males actuacions tenen un si del jurat puja a 9 de cada 10 bones actuacions amb un si del jurat)

Formalment, per exemple P(Si)=0.73 <> P(Si|B)=0.9 <> P(Si|M)=1/3

Si detallem tenint en compte que hi ha dos membres en el jurat les probabilitats son les següents:

		B bona actuació	M mala actuació	
Jurat 1 Si	Jurat 2 Si	0.63	0.10	
	Jurat 2 No	0.02	0.05	
Jurat 1 No	Jurat 2 Si	0.02	0.05	
	Jurat 2 No	0.03	0.10	

5.- ¿Quina és la probabilitat d'obtenir 2 sí? (1 punt)

P(J1Si,J2Si) = P(J1Si,J2Si,B)+P(J1Si,J2Si,M) = 0.63 + 0.10 = **0.73**

6.- ¿Quina es la probabilitat que, si s'obté un "sí" del primer jurat, l'altre jurat digui "sí"? Interpreteu el resultat (2 punts)

P (J2Si | J1Si) = P(J2Si,J1Si) / P(J1Si) = 0.73 / (0.63+0.10+0.02+0.05) = 0.73/0.80 = **0.91**

Amb molta probabilitat (més d'un 90%) si el primer jurat ha dit Sí l'altre també diu Si

7.- Quina és la probabilitat de que sigui una mala actuació si els dos jurats han dit "si"? Interpreteu el resultat (2 punts)

P (M | (J1Si,J2Si)) = P(M,J1Si,J2Si) / P(J1Si,J2Si) = 0.10 / 0.73 = **0.14**

La probabilitat de que hagi estat una mala actuació si els dos jurats han dit "si" és força baixa (menys del 15%)

Problema 2. *A tots els apartats, justifiqueu les respostes, explicant el passos. Tots valen igual =1 punt*

Imagineu un examen de 2 preguntes que poden valer entre 0 i 5 punts. La distribució conjunta entre X i Y val:

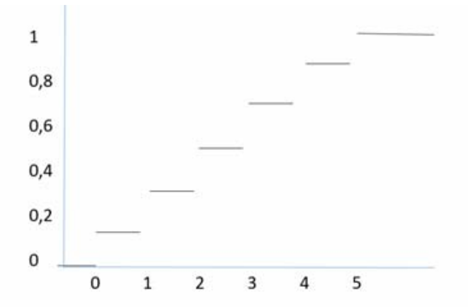
1. Calculeu la distribució marginal de X.

X \ Y	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
0	0.1	0.03	0.01				P(X=0) = 0.14
1	0.03	0.1	0.03	0.01			P(X=1) = 0.17
2	0.01	0.03	0.11	0.03	0.01		P(X=2) = 0.19
3		0.01	0.03	0.11	0.03	0.01	P(X=3) = 0.19
4			0.01	0.03	0.1	0.03	P(X=4) = 0.17
5				0.01	0.03	0.1	P(X=5) = 0.14
	0.14	0.17	0.19	0.19	0.17	0.14	1

2. Troba la funció de distribució de Y.

y	**P(Y≤y)**
y <0	0
0≤ y <1	0.14
1≤ y <2	0.31
2≤ y <3	0.50
3≤ y <4	0.69
4≤ y <5	0.86
y ≥5	1

3. Representa aquesta funció de distribució



4. Quina és la probabilitat de treure 2 o més?

P(X+Y≥2) = 1 – P(X+Y<2) = 1 – [P(X=0∩Y=0)+ P(X=1∩Y=0) + P(X=0∩Y=1)] = 1 – [0.1+0.03+0.03] = 0.84

[OK també si interpreta P(Y≥2)=1-0’31=0’69]

5. Si un alumne sap que ha tret un 2 a la pregunta X, quina probabilitat té d’aprovar l’examen?

P(X+Y≥5|X=2) = P(X=2∩Y≥3) / P(X=2) = [(P(X=2∩Y=3)+ P(X=2∩Y=4)] / P(X=2) = 0.04 / 0.19 ≈ 0.21

6. Trobeu E(X), E(Y), V(X) i V(Y)

$E(X) = \Sigma x_i P(X=x_i) = 0\cdot 0.14+1\cdot 0.17+...= 2.5$ (deduïble també per simetria)

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \Sigma x^2_i P(X=x_i) - [\Sigma x_i P(X=x_i)]^2 = [0^2\cdot 0.14+1^2\cdot 0.17+...] - 2.5^2 = 8.86 - 6.25 = 2.61$

$E(Y) = E(X) = 2.5$

$V(Y) = V(X) = 2.61$

7. Calculeu Cov (X,Y), sabent que V(X+Y)= 9.82

Com $V(X+Y) = V(X)+V(Y) + 2\cdot Cov(X,Y)$,

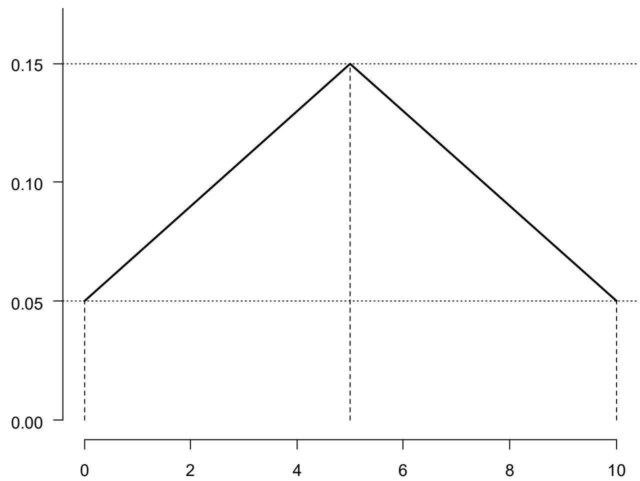
$Cov(X,Y) = [9.82 - 2.61 -2.61]/2 = 2.3$

8. Calculeu i interpreteu Corr (X,Y)

$Corr(X,Y) = Cov(X,Y) / \sqrt{[V(X)V(Y)]} = 2.3/2.61= 0.881$

Aquestes dues preguntes tenen una correlació positiva, indicant que una resposta a una pregunta va relacionada amb una resposta a l'altre (p.e., els estudiants acostumen molt a contestar igual ambdues preguntes).

La figura representa la nota de l'examen però com a resultat d'una evaluació molt precisa (és a dir, es pot considerar una variable contínua entre 0 i 10).



9. Expressa analíticament la funció de densitat representada a la figura.

Per a $0\leq X\leq 5$ $f(x) =0.05+0.1X/5$ $=0'05+0'02X$

Per a $5\leq X\leq 10$ $f(x) =0.05+0.1(10-5)X/5$ $=0'25-0'02X$

10. Troba la probabilitat que la nota estigui entre 4 i 7

$P(4\leq X\leq 7) = P(4\leq X\leq 5) + P(5\leq X\leq 7) =$

$=\int_4^5 (0'05+0'02x)\, dx + \int_5^7 (0'25-0'02x)\, dx =[0'05x + 0'02x^2]_4^5 + [0'25x - 0'02x^2]_5^7 =$

$= 0.14 + 0.26 = 0.4$

e-mail FIB **@est.fib.upc.edu**

Problema 3. *A tots els apartats, justifiqueu les respostes, explicant el passos.*

Estudiant la freqüència en que s'espatlla un cert tipus de component electrònic d'un sistema de xarxes, s'observa que, de mitjana, se n'espatlla 1 cada 3 mesos. A continuació es demana:

1. Quina és la probabilitat que en un any no se n'espatlli cap? (0.5 punts)

N= "Nombre de fallides anuals en components" ~ Poisson (λ=4) ja que es preveu que fallin 4 components a l'any. Llavors P(N=0) = exp(-4) = 0,018.

2. Quina és la probabilitat que hi hagi 5 o més components espatllats a l'any? (0.5 punts)

Demana P(N>=5) = 1-P(N<5) = 1 – F(4) = 1 – 0,629 = 0,371 (per taules)

3. Quin és el nombre màxim de components que es poden espatllar en dos anys en un sistema de xarxes amb una certesa del 95%? (1 punt)

Ara N2 segueix una distribució de Poisson amb λ=8.
Mirant a la taula:
F(12) = 0.936
F(13) = 0.966
Per tant, 13 components és el nombre màxim (amb un error inferior al 5%)

4. Es vol estudiar el temps que passa entre que s'espatllen un component i el següent. Quin model de variable aleatòria ens ho permet estudiar? I quant valen el temps esperat i la variància (utilitzeu mesos com a unitat temporal)? (1 punt)

L'alumne ha de comentar que X és exponencial (λ=1/3 = 4/12, per mesos)

Esperança = E(X) = $1/\lambda$ = 3.
Variança = V(X) = $1/\lambda^2$ = 9.

5. Quina és la probabilitat de passar més de 5 mesos amb cap component fora de servei? (1 punt)

λ = 1/3 $\rightarrow$ P(X>5) = 1 – P(X<=5) = 1 – (1-exp(-5/3)) = 0,19

El fabricant, per motius comercials, vol analitzar la distribució d'errors en un 10 anys. A continuació es demana:

6. Doneu la distribució de la variable 'nombre de components espatllats en 10 anys', la seva esperança i la seva variància. Doneu també una distribució per la qual es pugui aproximar (1 punt)

N10 = 'nombre de components espatllats en 10 anys' ~ Poisson amb λ=40

N10 = 'nombre de components espatllats en 10 anys' ~ N(40; σ^2=40). L'alumne ha de comentar que la esperança i variança són el paràmetre del model Poisson.

7. Indiqueu la probabilitat que s'espatllin més de 25 components durant aquest període de 10 anys. (1 punt)

P(N10 > 25) = 1– P(N<=25) = 1 – P(Z<(25-40)/$\sqrt{40}$) = 1 – P(Z < –2.37) = P(Z < 2.37) = 0,9911 (taules).

8. Considerem un problema determinat de la secció comercial. Es consideren usuaris Premium aquells amb cert volum de facturació i que amb el temps veiem que tenen una taxa d'incidències notablement menor (concretament, una quarta part de la que hem vist als apartats anteriors). Actualment hi ha 20 clients del perfil Premium. Per a aquells clients que han patit dos o més incidents en els últims 2 anys se'ls s'hi fan accions comercials. Quina és la probabilitat de tenir 10 clients que requereixin accions a la cartera de clients Premium actual? Comenta els resultats. (2 punts)

M2 = ' Nombre d'incidents en dos anys' ~ Poisson(λ=2), ja que és la quarta part de λ=8.
P(M2 >= 2) = 1 – P(M2 <= 1) = 1 – 0,4060 = 0,5940 (calculadora)

Com ara parlem de 20 clients farem servir la distribució Binomial (n=20, p=0,5940)
Y = ' Nombre de clients que requeriran accions comercials'.
P(Y=10)=$\binom{20}{10} 0{,}5940^{10}(1-0{,}5940)^{10} = 0{,}1229$
O bé
Amb Y'='Nombre de clients que NO requeriran accions comercials' que és Binomial (n=20,p=0.4)
Llavors P(Y=10) = P(Y'=10) = P(Y'<=10)-P(Y'<=9) = 0.8725-0.7553 = 0.1172 (taules)

Veiem que és relativament probable que el succés apareixi.

Considera que les tasques associades a revisions i manteniment mensuals tenen una distribució Normal amb mitjana 200 euros i desviació tipus de 20 euros.

9. Quina probabilitat tenim que el cost de revisió i manteniment d'una xarxa a un mes determinat no sigui superior de 220 euros? (1 punt)

C ~N(200;20) si C = 'cost mensual de revisió'
P(C<=220) = P (Z<=1) = 0,8413

10. Troba els dos valors, centrats a la mitjana, que contenen amb probabilitat 90% el cost anual de manteniment possible per a una xarxa, suposant que els costos de mesos diferents no estan relacionats. (1 punt)

El cost anual te una esperança de 12×200 = 2400 euros, i una variança de 12×400 = 4800 euros^2. La desviació tipus és 69.28€.

Per teoria entre les z = 1,65 i z = –1,65 hi ha el 90% de la distribució de la variable N(0,1).
(max – 2400)/69.28 = 1,65 → max = 2514.31€
(min – 2400)/69.28 = –1,65 → min = 2285.69€

Fer el càlcul per a un mes, i multiplicar per 12 és completament incorrecte.