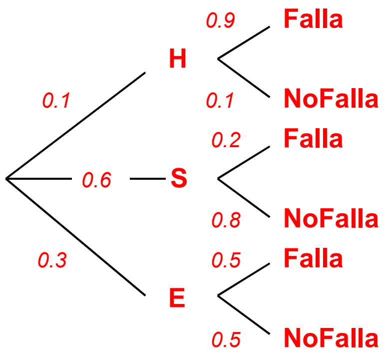
NOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.)

Problema 1 (B1).

L'empresa PH fa el seguiment de les impressores que té al mercat i determina que els problemes poden ser de tres tipus: hardware, software o elèctrics. Ara vol fer una anàlisis de les incidències que té reportades per decidir com orientar una pàgina web d'ajuda a la diagnosi quan un client reporta una nova incidència. En primer lloc determina que un 10% són per problemes de hardware, un 60% de software i la resta elèctrics.
Per a un model A d'impressora determinen que en els casos de problemes hardware la impressora ha fallat 9 de cada 10 vegades, en problemes software 1 de cada 5, i en elèctrics 1 de cada 2. I en canvi, per a un segon model B d'impressores fallen un 40% de les vegades per a qualsevol dels tres problemes.
Per a el model A indiqueu
- l'arbre i el conjunt de resultats que permet determinar les probabilitats dels problemes i fallades (1 punt)



Ω = { (H,Falla), (H,NoFalla), (S,Falla), (S,NoFalla), (E,Falla), (E,NoFalla) }

- la taula de probabilitats conjuntes i marginals (1 punt)

	H	S	E	
Falla	0.09	0.12	0.15	0.36
NoFalla	0.01	0.48	0.15	0.64
	0.10	0.60	0.30	

- si hi ha hagut una fallada, quines són les probabilitats de que sigui de hardware, de software o elèctric (1.5 punts)

P (H | Falla) = P (H ∩ Falla) / P(Falla) = 0.09 / 0.36 = 0.25
o bé = P(Falla|H) P(H) / (P(Falla|H)P(H) + P(Falla|S)P(S) + P(Falla|E)P(E)) = 0.9 0.1 / (0.9 0.1+0.2 0.6+0.5 0.3) = 0.09/0.36 = 0.25

P (S | Falla) = P (S ∩ Falla) / P(Falla) = 0.12 / 0.36 = 0.33
o bé = P(Falla|S) P(S) / (P(Falla|H)P(H) + P(Falla|S)P(S) + P(Falla|E)P(E)) = 0.2 0.6 / (0.9 0.1+0.2 0.6+0.5 0.3) = 0.12/0.36 = 0.33

P (E | Falla) = P (E ∩ Falla) / P(Falla) = 0.15 / 0.36 = 0.42
o bé = P(Falla|E) P(E) / (P(Falla|H)P(H) + P(Falla|S)P(S) + P(Falla|E)P(E)) = 0.5 0.3 / (0.9 0.1+0.2 0.6+0.5 0.3) = 0.15/0.36 = 0.42

Per a el model B indiqueu
- si hi ha hagut una fallada, quines són les probabilitats de que sigui de hardware, de software o elèctric (1.5 punts)

P (H | Falla) = P (H ∩ Falla) / P(Falla) = 0.04 / 0.40 = 0.10
o bé = P(Falla|H) P(H) / (P(Falla|H)P(H) + P(Falla|S)P(S) + P(Falla|E)P(E)) = 0.4 0.1 / (0.4 0.1+0.4 0.6+0.4 0.3) = 0.04/0.40 = 0.10
o bé com que hi ha independència llavors = P(H) = 0.10

P (S | Falla) = P (S ∩ Falla) / P(Falla) = 0.24 / 0.40 = 0.60
o bé = P(Falla|S) P(S) / (P(Falla|H)P(H) + P(Falla|S)P(S) + P(Falla|E)P(E)) = 0.4 0.6 / (0.4 0.1+0.4 0.6+0.4 0.3) = 0.24/0.40 = 0.60
o bé com que hi ha independència llavors = P(S) = 0.60

P (E | Falla) = P (E ∩ Falla) / P(Falla) = 0.12 / 0.40 = 0.30
o bé = P(Falla|E) P(E) / (P(Falla|H)P(H) + P(Falla|S)P(S) + P(Falla|E)P(E)) = 0.4 0.3 / (0.4 0.1+0.4 0.6+0.4 0.3) = 0.12/0.40 = 0.30
o bé com que hi ha independència llavors = P(E) = 0.30

Per a el model B indiqueu
- les taules de probabilitats condicionades per problema i per fallada (2 punts)

	H	S	E	
Falla	0.4	0.4	0.4	0.4
NoFalla	0.6	0.6	0.6	0.6
	1	1	1	

	H	S	E	
Falla	0.1	0.6	0.3	1
NoFalla	0.1	0.6	0.3	1
	0.1	0.6	0.3	

Per comparar els resultats pel model A i el B, indiqueu:
- si hi ha dependència o independència entre si hi ha fallada o no i el tipus de problema. Justifiqueu-ho en cada cas (1.5 punt)

En el model A no hi ha independència tal com podem veure a:
- la taula de probabilitats conjuntes i marginals en que hi ha probabilitats conjuntes que no són igual al producte de les marginals (P(Falla,H)=0.09 ≠ 0.036 = 0.36 0.10 = P(Falla) P(H)
I, per tant, no és independent la probabilitat de fallar segons el tipus de problema presentat

En el model B si hi ha independència tal com podem veure a:
- la taula de probabilitats condicionades mostren igual distribució per files (0.1 0.6 0.3) i igual per columnes (0.4 0.6)
I, per tant, independentment del tipus de problema la probabilitat de fallar és 0.4 i de no fallar 0.6,
o bé independentment de la probabilitat de fallar la dels tipus de problema són 0.1 0.6 i 0.3

- l'empresa vol usar els resultats anteriors per decidir com guiar a la pàgina web d'ajuda a la diagnosi quan un client reporta una nova incidència: per a cadascun dels models indicaria quin és el tipus de problema més probable havent tingut una fallada. Amb el resultats anteriors indiqueu quin és el tipus de problema més probable que indicaria per a cada model i justifiqueu-ho (1.5 punt)

Si és del model A indicaríem que el més probable és que sigui degut a un problema de tipus elèctric. Perquè abans hem calculat les probabilitats condicionades a Falla P(H|Falla)=0.25, P(S|Falla)='0.33 i P(E|Falla)=0.42
i el màxim ha estat 0.42 pel cas de problema elèctric

Si és del model B indicaríem que el més probable és que sigui degut a un problema de software. Perquè abans hem calculat les probabilitats condicionades a Falla P(H|Falla)=0.10, P(S|Falla)='0.60 i P(E|Falla)=0.30
i el màxim ha estat 060 pel cas de problema software

NOM:_________________________COGNOM:_______________________________________

(*Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs*)

Problema 2 (B2)

Llancem un dau cúbic equilibrat a l'atzar i observem la seva cara superior (X). Un cop llançat el tombem, també a l'atzar, sobre una de les arestes obtenint a la cara superior un nou nombre (Y). Per exemple, si en llançar el dau ens surt inicialment un dos en la cara superior, després el tombem sobre la seva aresta i podem obtenir un 1, 3, 4 o 6. No podem aconseguir ni el propi dos ni un cinc perquè aquest està a la cara oposada del dau (en un dau cúbic la suma de dues cares oposades suma set).

1. Trobeu la funció de probabilitat d'Y quan X=1 (1 punt)

k	$P_{Y\|X=1}$ (k)
2	1/4
3	1/4
4	1/4
5	1/4

2. Calculeu l'esperança i la desviació típica d'Y quan X=1. (1 punt)

$E(Y|X=1) = 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 + 5 \cdot 1/4 = 3'5$
$E(Y^2|X=1) = 2^2 \cdot 1/4 + 3^2 \cdot 1/4 + 4^2 \cdot 1/4 + 5^2 \cdot ¼ = 13'5$
$Var(Y|X=1) = 13'5 - 3'5^2 = 1'25$ i $\sigma_{Y|X=1} = 1'12$

3. Calculeu la probabilitat que ens hagi sortit un 1 en el primer llançament i un dos en girar l'aresta.(0'5 punts)

$P(Y=2 \cap X=1) = P(Y=2| X=1) \cdot P(X=1) = 1/4 \cdot 1/6 = 1/24$

4. Són X i Y variables aleatòries independents? (0'5 punts)

No, ja que $P(Y=2) = 1/6$ i $P(Y=2|X=1) = P(Y=2 \cap X=1) / P(X=1) = (1/24) / (1/6) = 1/4$

5. Trobeu la funció de probabilitat conjunta d'X i Y (1 punt)

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	0	1/24	1/24	1/24	1/24	0
2	1/24	0	1/24	1/24	0	1/24
3	1/24	1/24	0	0	1/24	1/24
4	1/24	1/24	0	0	1/24	1/24
5	1/24	0	1/24	1/24	0	1/24
6	0	1/24	1/24	1/24	1/24	0

6. a) Calculeu P(Y=3). (0'5 punts)

$P(Y=3) = P(Y=3, X=1) + P(Y=3, X=2) + P(Y=3, X=3) + P(Y=3, X=4) + P(Y=3, X=5) + P(Y=3, X=6) = 1/24 + 1/24 + 0 + 0 + 1/24 + 1/24 = 1/6$

b) Calculeu la funció de probabilitat d'Y (0'5 punts)

Seguint el cas anterior, trobem que $P(Y=k) = 1/6$ per a $k=\{1,2,3,4,5,6\}$

7. a) Calculeu la covariància d'X i Y. (1'5 punts)

$E(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 3'5$
Anàlogament E(Y)=3'5
$E(XY)= 1/24 \cdot (1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 + 1\cdot5 + 2\cdot1 + 2\cdot3 + 2\cdot4 + 2\cdot6 + 3\cdot1 + 3\cdot2 + 3\cdot4 + 3\cdot5 + 3\cdot6 + 4\cdot1 + 4\cdot2 + 4\cdot5 + 4\cdot6 + 5\cdot1+ 5\cdot3 + 5\cdot4 + 5\cdot6 + 6\cdot2 + 6\cdot3 + 6\cdot4 + 6\cdot5) = 1/24 \cdot 294 = 12'25$
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = 12'25 - 3'5^2 = 0$

b) Interpreteu el resultat de la covariància i relacioneu amb el resultat obtingut en l'apartat 4. (0'5 punts)

La covariància dona zero, això significa que la correlació lineal també és zero i per tant que no hi ha relació lineal entre les dues variables X i Y.
En l'apartat 4 hem vist que les variables X i Y no són independents. Notem que la independència de les variables aleatòries implica que la covariància valgui 0 però la implicació inversa no és certa. El cas en què ens trobem seria un exemple que dues variables no independents poden tenir covariància 0.

Estudiant el temps T (en segons) que triguen les persones al jugar al joc de daus anterior obtenim que segueix una distribució amb la següent funció de densitat:

$$f(t) : \begin{cases} \frac{2}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

8. a) Calculeu la funció de distribució de T (només cal calcular la funció de distribució sense haver de comprovar que f(t) és una funció de densitat) (1 punt)

$$F(t) = \int_1^t \frac{2}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^t = \left(-\frac{1}{t^2} + 1\right)$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

b) Calculeu la probabilitat que una persona trigui menys de cinc segons en jugar al joc dels daus proposat anteriorment (només cal calcular la probabilitat sense haver de comprovar que f(t) és una funció de densitat) (1 punt):

$$P(T<5) = \int_1^5 \frac{2}{t^3}\, dt = \left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^5 = 0'96$$

c) Calculeu el valor esperat de T. (1 punt)

$$E(T) = \int_1^{+\infty} t \cdot \frac{2}{t^3}\, dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x t \cdot \frac{2}{t^3}\, dt = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{2}{t}\right]_1^x = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{2}{x} + 2\right) = 2$$

Problema 3 (B3) SOLUCIÓ

1. **Un grup de 10 turistes arriben a un petit poblet i decideixen passar-hi la nit. La probabilitat que un el turista vulgui quedar-se a l'únic hotel del lloc és 0.6.**
   a) **Definiu quina es la variable que estem mesurant i indiqueu quina distribució segueix.**

La nostra variable aleatoria és: X = "nombre de turistes que es queden a l'hotel".

Si ens fixem en un turista, aquest pot quedar-se a dormir o no, per tant estem davant d'una Bernoulli, donat que repetim l'experiment 10 cops de forma independent la nostra variable segueix una distribució binomial amb paràmetres n = 10 i p=0.6, $X \approx B(10{,}0.6)$

   b) **Del grup de 10 turistes, quina és la probabilitat que només un turista del grup vulgui passar la nit en l'hotel d'aquell municipi?**

Per calcular la probabilitat que només un turista es quedi a dormir ho anotem de la seguent manera: P(X=1)

Resolem:

$$P(X=1) = \binom{10}{1} 0.6^1 * 0.4^9 = 0.0016$$

Amb R:

```
dbinom(1,size = 10,prob = .6)
## [1] 0.001572864
```

   c) **Del grup de 10 turistes, quina és la probabilitat que 3 o més turistes del grup vulguin passar la nit en l'hotel d'aquell municipi?**

Per calcular la probabilitat que 3 o més turistes es quedin a dormir en un hotel ho anotem de la seguent manera: $P(X \geq 3)$ Resolem:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) =$$

$$= 1 - [\, P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\,] =$$

$$= 1 - [\, \binom{10}{0} 0.6^0 * 0.4^{10} + \binom{10}{1} 0.6^1 * 0.4^9 + \binom{10}{2} 0.6^2 * 0.4^8\,] = 0.9877054$$

amb R:

```
pbinom(q = 2, size = 10,prob = 0.6, lower.tail = F)
## [1] 0.9877054
```

   d) **Calculeu l'esperança i desviació tipus per a la variable dels l'apartat anteriors**

$$E(X) = n * p = 10 * 0.6$$

$$\sigma_x = \sqrt{p * q * n} = \sqrt{0.6 * 0.4 * 10} = \sqrt{2.4} = 1.549193$$

2. **El poble és cada vegada més conegut. Es sap que el nombre de turistes s'ha multiplicat per 10 en un any respecte als turistes de l'apartat 1. Sabent això:**
   a) **Definiu quina es la variable que estem mesurant i indiqueu quina distribució segueix.**

La nostra variable aleatoria segueix sent: X = "nombre de turistes que arriben al poblet". Segueix una distribució binomial amb paràmetres n = 100 i p=0.6.

$X \approx B(100{,}0.6)$

   b) **Té sentit aplicar en aquesta ocasió el Teorema central del Límit? Raona la teva resposta.**

Sabem que ara n=10x10=100, p=0,6. Tot i que el model original com hem comentat a l'apartat a) que seguiria la variable aleatòria X seria Binomial, com la grandària de la mostra és gran, podem aproximar la nostra variable binomial a una normal, considerant el Teorema Central del Límit, de forma que la $X \approx B(100{,}0.6)$ convergiria a una $N \approx (60{,}4.899)$.

c) **Calculeu la probabilitat de que com a màxim 50 turistes vulguin passar la nit al poble.**

Per calcular la probabilitat que un màxim de 50 turistes es quedin a dormir en un hotel ho anotem de la seguent manera: $P(X \leq 50)$ Resolem:

$$P(X \leq 50) = P(\frac{X-60}{4.899}) < P(\frac{50-60}{4.899}) = P(Z < -2.04) =$$

Busquem a les taules, i com el valor és negatiu i a les taules només tenim positius fem :

$$1 - 0.9793 = 0.0207$$

Amb R:

```
pnorm(50, mean = 60, sd = 4.899,lower.tail = T)
## [1] 0.02061384
```

3. **A més, se sap que els turistes triguen una mitjana de 40 minuts en el trajecte de l'hotel al centre amb una desviació tipus $\sigma = 16$.**

a) **Definiu quina és la variable que estem mesurant i indiqueu quina distribució segueix.**

La nostra variable aleatoria es X = "temps en minuts de trajecte". Es considera una distribució normal amb mitjana 40 i una desviació estàndard de 16, $N \approx (40{,}16)$

b) **Quina és la probabilitat que el temps del trajecte d'un turista seleccionat a l'atzar estigui entre 15 i 30 minuts?**

$$P\left(\frac{15-40}{16} < \frac{X-40}{16} < \frac{30-40}{16}\right) = P(-1.56 < Z < -0.63) = P(0.63 < Z < 1.56) = F(1.56) - F(0.63)$$
$$= 0.9406 - 0.7357 = 0.2049$$

Amb R:

```
pnorm(-10/16) - pnorm(-25/16)
## [1] 0.2069004
```

c) **Quin temps màxim podem assegurar per el 20% dels turistes que fan el trajecte de l'hotel al centre més ràpidament?**

En aquest apartat busquem: $P(X < k) = 0.2$

On k és el número de minuts màxim dels trajectes d'entre el 20% més curt. Fem:

$$P(\frac{X-40}{16} < \frac{k-40}{16}) = P(Z < \frac{k-40}{16}) = 0.2$$

Sabem que Z es una distribució N(0,1), per tant, busquem a les taules de la Normal el valor que deixa una probabilitat de 20% a l'esquerra, aquesta es: -0.8416. Per tant,

$$\frac{k-40}{16} = -0.8416$$

Resolem i obtenim 26.5344 minuts

```
-0.8416*16 +40
## [1] 26.5344
```