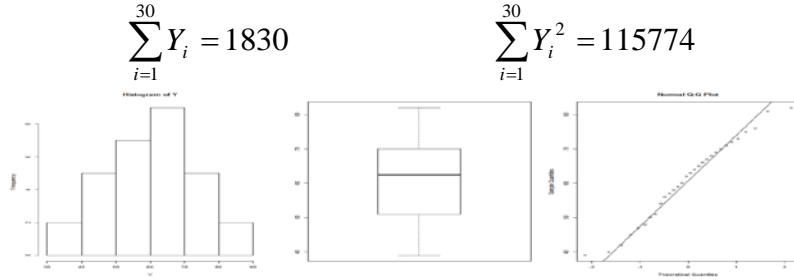


Problema 1 (B4)

Volem estudiar el rendiment dels cables per connectar un disc extern amb l'ordinador. A partir d'una sèrie d'arxius, obtenim la variable (Y) velocitat de transmissió que s'aconsegueix, en MB/s.

Un fabricant A defensa que compleix els requisits de velocitat mitjana 65 i desviació tipus 10. Per argumentar la seva afirmació estima l'esperança per interval a partir dels següents resultats amb una mostra aleatòria de 30 arxius grans:



- Calculeu les estimacions puntuals de la velocitat mitjana i de la desviació tipus dels 30 arxius (1 punt)

Mitjana és $1830 / 30 = 61$

Desviació tipus s és $\sqrt{(115774 - (1830)^2/30) / 29} = 11.95$

- Calculeu l'interval de confiança del 95% per a l'esperança (sense assumir la desviació poblacional requerida) (1 punt)

$$61 \pm t_{29,0.975} 11.95/\sqrt{30} = 61 \pm 2.045 11.95 / \sqrt{30} = [56.54 , 65.46]$$

Un equip extern d'acreditació planteja més qüestions:

- Feu una prova d'hipòtesis per contrastar si la desviació és 10 o si és superior amb un risc del 5%:

Indiqueu el contrast de les hipòtesis (0.5 punts)

$H_0: \sigma=10$

$H_1: \sigma>10$

Indiqueu l'estadístic i calculeu-ne el valor (0.5 punts)

$$11.95^2 29 / 10^2 = 41.41$$

A quina conclusió arribeu? (1 punt)

$$41.41 < 42.56 (Chi^2_{29,0.95}) \rightarrow \text{no hi ha evidència per rebutjar desviació de 10}$$

- Calculeu l'interval de confiança del 95% per a l'esperança assumint la desviació poblacional de 10 (1 punt)

$$61 \pm Z_{0.975} 10 / \sqrt{30} = 61 \pm 1.96 10 / \sqrt{30} = [57.42 , 64.58]$$

Compareu l'interval aportat pel fabricant i el de l'equip extern. Comenteu què aporten sobre complir el requisit d'una velocitat mitjana de 65 MB/s (1 punt)

IC amb sigma és més estret, més precís, i és el de l'equip extern.

IC fabricant inclou valor 65. IC equip extern no inclou valor 65. Per això fabricant diu que compleix requisit de velocitat mitjana però equip extern ho posa en dubte.

En les condicions de l'interval calculat per l'equip extern, calculeu amb quina grandària de mostra s'aconseguiria un IC amb la meitat d'amplada: (1 punt)

Interval equip extern: $64.58 - 57.42 = 7.16$

Semiinterval equip extern $7.16/2 = 3.58$

Reduir a la meitat: $3.58/2 = 1.79$

$1.79 = 1.96 \cdot 10 / \sqrt{n} \rightarrow n \geq 120$

Finalment l'equip extern planteja la prova d'hipòtesis de si la velocitat mitjana és 65 o no amb un risc del 5%. Per a aquesta prova, assumint el valor de la desviació poblacional:

- indiqueu les hipòtesis (0.5 punts)

$H_0: \mu = 65$

$H_1: \mu \neq 65$

- indiqueu l'estadístic i calculeu-ne el valor (0.5 punts)

$(61 - 65) / (10 / \sqrt{30}) = -2.19$

- calculeu el p_value, expliqueu què expressa i com s'interpreta (1 punt)

$2 (1 - p(Z < 2.19)) = 2 (1 - 0.9857) = 0.0286$

El p_value expressa la probabilitat de valors més extrems que el de l'estadístic observat

S'interpreta en el sentit que si és inferior al risc es considera una probabilitat prou petita per evidenciar que el valor de l'estadístic obtingut no està a la zona d'acceptació de la hipòtesi nul·la

- indiqueu la conclusió i interpretació de la prova (1 punt)

$-2.19 < -1.96$ (punt crític per la part negativa) o bé $p_value < risc (=0.05) \rightarrow$ evidència per rebutjar H_0 de mitjana igual a 65

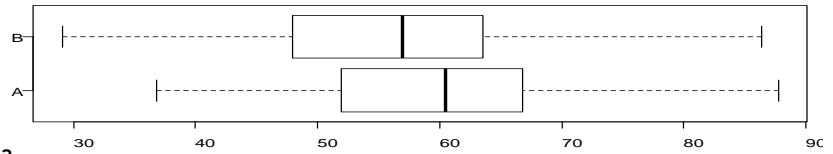
NOM: _____ COGNOM: _____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs)

Problema 2 (B5)

Seguint amb l'estudi dels cables connectors del problema anterior, l'equip extern vol comparar els de dos fabricants A i B. Per això han escollit 120 arxius grans i els han assignat aleatòriament a un cable o l'altre (60 cadascú), amb els següents resultats:

	mitjana	Desviació tipus
Cable tipus A	59.933	12.1
Cable tipus B	56.218	11.178



..... p-value = 0.04163

alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0

95 percent confidence interval:

0.189 Inf

1.- Primer volem contrastar la igualtat dels dos tipus de cable a través de la comparació de mitjanes. El fabricant A defensa que els seus materials són millors i assoleix velocitats més altes que el fabricant B. Poseu-ho a prova:

- Indiqueu i justifiqueu quin és el disseny (independent/aparellat) emprat? (0.5 punts)

Són mostres independents perquè són diferents arxius els assignats a cada cable, el mateix nombre (60) però diferents casos

- Expresseu les dues hipòtesis de la prova (0.5 punts)

$H_0: \mu_A - \mu_B = 0$

$H_1: \mu_A - \mu_B > 0$

- Valoreu com podríem argumentar amb els resultats de l'enunciat que es compleixen les premises de normalitat i igualtat de variàncies (1 punt)

La normalitat es comprovaria amb plots de normalitat però els boxplots mostren força simetria que pot correspondre a la distribució normal.

La igualtat de variàncies es comprovaria amb la prova d'hipòtesi corresponent però en els boxplots es pot observar un repartiment i amplada prou semblants.

- Sota la hipòtesi d'igualtat, quin seria l'error tipus estimat per a la diferència de mitjanes mostrals? (1 punt)

$\text{Error_tipus} = s_{\text{pooled}} \sqrt{1/60 + 1/60} = 11.65 \sqrt{2/60} = 2.13$

$(s_{\text{pooled}} = (59 \cdot 12.1^2 + 59 \cdot 11.178^2) / (60 + 60 - 2) = 11.65)$

- Indiqueu quin és l'estadístic de la prova i calculeu-lo (1 punt)

$t = (59.993 - 56.218) / \text{Error_tipus} = 1.7469$

- Si no hi hagués cap diferència en la velocitat mitjana dels dos fabricants, com es distribuiria l'estadístic de la prova? Amb un risc $\alpha=5\%$, feu un gràfic per il·lustrar el o els punts crítics i situar les àrees d'acceptació i de rebuig de la hipòtesi nul·la (1 punt)

t_{118}

punt crític: $t_{118, 0.95}$ (taules aprox $t_{120, 0.95} = 1.658$)

(zona d'acceptació de $-\infty$ a 1.658 ; zona de rebuig de 1.658 a ∞)

- A quina conclusió arribeu? Incorporeu l'interval de confiança del 95% a la discussió (1 punt)

$1.74 > 1.658$ -> evidència per no acceptar igualtat de velocitat mitjana
(també per $p_value=0.04163 < risc=0.05$ indicat als resultats d'R de l'enunciat)

Segons IC unilateral dels resultats d'R de l'enunciat:

95 percent confidence interval:
0.189 Inf

el fabricant A és un mínim de 0.19 MB/s més ràpid que fabricant B

2.- També volen estudiar la proporció de mesures de velocitat per sota del llindar de 50 MB/s. A la mostra n'hi ha 11 per A i 23 per B. Per comparar si els dos fabricants tenen igual proporcions o no, indiqueu:

- Quines són les proporcions estimades de velocitat inferior a 50 MB/s per a cada fabricant? (0.5 punts)

$$P_A = 11/60$$

$$P_B = 23/60$$

- Expressen les hipòtesis de la nova prova (0.5 punts)

$$H_0: P_A - P_B = 0$$

$$H_1: P_A - P_B < 0$$

- Indiqueu quin és l'estadístic de la prova i calculeu-lo (1 punt)

$$P = (60 \cdot P_A + 60 \cdot P_B) / 120 = 0.283$$

$$z = (11/60 - 23/60) / \sqrt{(0.283 \cdot 0.117)/60 + 0.283 \cdot 0.117/60} = -2.43$$

- Com es distribueix l'estadístic sota la hipòtesi nul·la? Feu un gràfic indicant el o els punts crítics i la zona d'acceptació i de rebuig (1 punt)

$N(0,1)$

Punts crítics -1.96 i 1.96

(zona acceptació entre -1.96 i +1.96)

- Interpreteu el resultat, i feu una conclusió global (1 punt)

$-2.43 < -1.96$ -> Evidència per no acceptar la igualtat de proporcions

NOM: _____ COGNOM: _____

Problema 3 (B6)

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs: Cada pregunta → 1 punt)

Seguint amb l'estudi dels cables connectors dels problemes anteriors, ara tenim recollides les dades de mida M d'arxiu (MB) i temps T de transmissió (sg) per a 60 arxius (d'entre 70 i 290 MB), amb els següents resultats intermedis

$$\sum_{i=1}^{60} M_i = 9080 \quad \sum_{i=1}^{60} M_i^2 = 1559600 \quad \sum_{i=1}^{60} T_i = 135.85 \quad \sum_{i=1}^{60} T_i^2 = 349.97 \quad \sum_{i=1}^{60} M_i T_i = 23316.5$$

Calculeu les mitjanes, les desviacions típiques (o estàndards), la covariància i la correlació entre M i T

mean(M) 151.3333 sd(M) 56.07098

mean(T) 2.264167 sd(T) 0.8475334

cov(M,T) 46.7435 cor(M,T) 0.9836176

[Si uno mal, o faltan → ½]

Calculeu i interpreteu els coeficients de la recta de regressió del temps en funció de la mida

$b_1 = S_{TM}/S_M^2 = r_{TM} \cdot S_T/S_M \approx 0.015$

lm(formula = T ~ M)
Coefficients:

$b_0 = m_T - b_1 m_M \approx 0.014$

```
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.0141820  0.0576837   0.246   0.807
M            0.0148677  0.0003578  41.555 <2e-16 ***
Residual standard error: 0.1541 on 58 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9675,    Adjusted R-squared:  0.9669
```

Per contrastar si la recta de regressió és plana amb un risc del 5%, calculeu i interpreteu l'estadístic. Doneu la conclusió.

$S^2 = (n-1)(S_T^2 - b_1 S_{TM}) / (n-2) \approx 0.023747$

$S^2_{b_1} = S^2 / [(n-1)S_M^2] = 0.023747 / (59 \cdot 56.07098^2) \approx 0.0003578^2$

$t^{\wedge} = 0.015 / 0.00036 \approx 41.5$ en una t_{58} Com $t_{58,0.975} \approx 2 \rightarrow$ Rebutgem H_0

[Si "llavors H_0 és certa", màxim 2/3]

[Si razona bien pero errores, máximo 2/3]

Ídem per contrastar si la recta de regressió passa per l'origen de coordenades

$S^2_{b_0} = S^2 [(1/n) + m_M^2 / (n-1)S_M^2] = 0.023747 \cdot [1/60 + 151.33^2 / (59 \cdot 56.07098^2)] \approx 0.0577^2$

$0.014 / 0.058 = 0.246$ en una t_{58} Com $t_{58,0.975} \approx 2 \rightarrow$ Res s'oposa a acceptar H_0 ("absolt per manca de proves")

[Si "llavors H_0 és certa", màxim 2/3]

Calculeu una predicció puntual del temps de transmissió per un arxiu de mida 300 MB i calculeu un interval de confiança per a aquesta predicció del temps de transmissió d'un fitxer individual

$T_{M=300} \approx 0.014 + 0.015 \cdot 300 \approx 4.47$

[Si sólo puntual, ¼]

$S^2(T_{M=300}) \approx S^2 \{ 1 + 1/n + (300 - m_M)^2 / [(n-1)S_M^2] \} = 0.023747 \{ 1 + 1/60 + (300 - 151.33)^2 / (59 \cdot 56.07098^2) \} \approx 0.027$
 $S(T_{M=300}) \approx 0.165$

Com $t_{58,0.975} \approx 2$

$IC_{95\%}(\text{casos amb } T_{M=300}) \approx 4.47 \pm 2 \cdot 0.165 \approx 4.47 \pm 0.33 \approx 4.14 ; 4.80$

Encara que M representa el *input* o variable predictora i T el *output* o resposta, per parlar de forma 'positiva' es usual calcular la velocitat de transmissió com el pendent de la recta de la mida M com a resposta en funció del temps T.

A partir dels següents resultats: `lm(formula = M ~ T)`

Coefficients:	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	3.995	3.782	1.056	0.295
T	65.074	1.566	41.555	<2e-16

Residual standard error: 10.19 on 58 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9675, Adjusted R-squared: 0.9669

Calculeu i interpreteu un interval de confiança del 95% pel paràmetre β_0

Com $t_{58,0.975} \approx 1.98 \approx$

[Si planteja mal -> 0]

$IC_{95\%}(\beta_0) = b_0 \pm t_{58,0.975} S_{b_0} \approx 3.995 \pm 1.98 \cdot 3.782 \approx 4 \pm 7.5 \approx -3.5; 11.5$

No significatiu. Com a molt petit, -3.5; i com a molt gran, 11.5

[Si no interpreta -> 2/3]

Calculeu i interpreteu un interval de confiança del 95% pel paràmetre β_1

$IC_{95\%}(\beta_1) = b_1 \pm t_{58,0.975} S_{b_1} = 65.074 \pm 1.98 \cdot 1.566 \approx 65.1 \pm 3.1 \approx 62.0; 68.2$

[Si planteja mal -> 0]

Rebutgem $H_0: \beta_1=0$: Significatiu. Pendent més gran de 62 i més petit de 68.2

[Si no interpreta -> 2/3]

Quin és el coeficient de determinació? Interpreteu-lo

$R^2 \approx 0.97$ El 97% de la variabilitat de M es explicable per T.

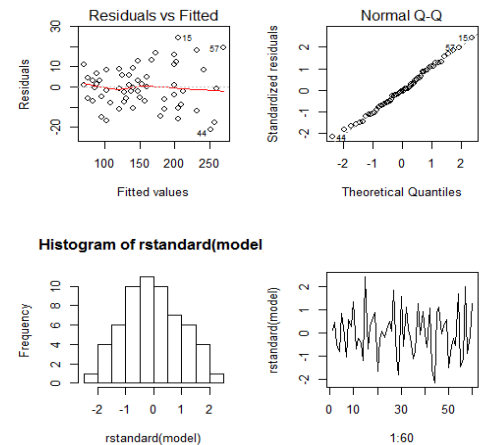
Enuncieu les premisses o hipòtesis de la regressió lineal i comenteu si es compleixen o no per aquest cas concret. Especifiqueu de quins resultats i/o gràfics es dedueixen els vostres comentaris.

Linealitat: ok, valors força ajustats a la recta en el plot [1,1]

Homoscedasticitat: raonable, encara que el plot [1,1] sembla mostrar més dispersió per valors predits més grans.

Normalitat: l'ajust a una normal és força correcte en el QQplot [1,2] i l'histograma [2,1]

Independència: molt raonable, ja que no hi ha patró en el plot [2,2]



En la pràctica, no es fa aquesta regressió sencera, sinó que es calcula directament el quocient M/T com a mesura de la velocitat. Comenteu si els resultats anteriors confirmen aquest procediment

Si perquè la constant es petita: Aquest costum equival a calcular per cada punt el pendent ($\Delta M/\Delta T$) respecte el origen, ignorant la constant. Per tant, la pregunta és si la constant es nul·la i no hi ha un cost fixe per engegar el procés. El límit superior de l'interval de confiança de β_0 diu que com a molt aquest preu per "engegar el procés" és 11.5. Comparat amb el valor del pendent (65) és prou petit per considerar que ignorar-lo és una aproximació raonable.

[Nota: Convindria tornar a calcular el R^2 per una recta amb $B_0=0$ per quantificar el 'preu' d'aquesta simplificació. El bon comportament dels residus i un R^2 del 97% recolzen aquestes consideracions.] [Si afirma H_0 per no ser significatiu B_0 -> 2/3]