NOM:__________________________COGNOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs)

Problema 1 (B1)

Un servei tècnic (ST) rep els ordinadors que han patit alguna avaria durant el període de garantia. Ens concentrem en dues marques, A i B: per cada ordinador B es venen 2 de marca A. El 90% dels B no presenten problemes els primers dos anys ("CAP"), però 1 de cada 4 dels A sí. Simplificant molt, els problemes dels ordinadors poden ser pel transformador (T), per els xips de memòria (M) o per la placa base (P). Dels que arriben al ST de la marca A, les proporcions respectives són de 3-3-4; i de la marca B, 5-3-2 (és a dir: pel que respecta als de marca A, per cada 3 avaries causades pel transformador, hi ha altres 3 degudes a la memòria, i altres 4 atribuïbles a la placa base).

1) Empleneu la taula adjunta amb les probabilitats dels esdeveniments corresponents (per exemple, marca A i cap avaria):

	CAP	T	M	P	
A	0.5	0.05	0.05	0.066...	0.666...
B	0.3	0.0166...	0.01	0.0066...	0.333...
	0.8	0.066...	0.06	0.0733...	1

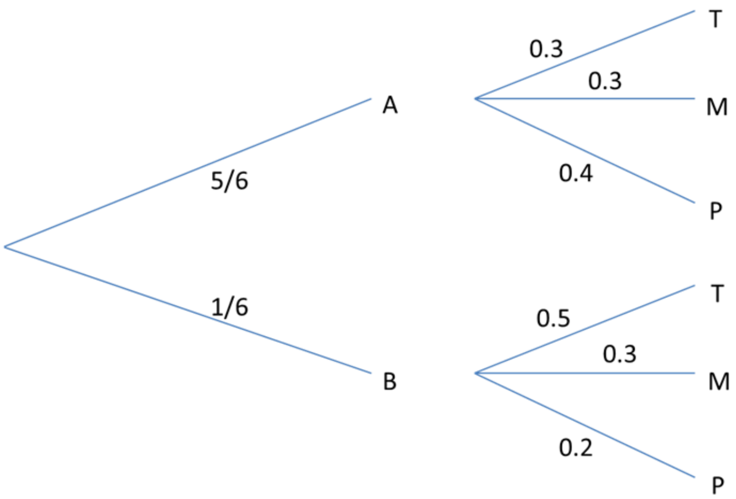
P(A) = 2/3

P(A i CAP) = P(CAP | A) P(A) = ¾ 2/3 = ½

P(A i T) = P(T | ¬ CAP i A) P(¬CAP i A) = 3/10 ¼ 2/3 = 1/20

etc

2) Ara imaginem que l'ordinador és un dels que han arribat al ST. Dibuixeu l'arbre de probabilitats de l'experiència que suposa seleccionar a l'atzar un ordinador que arriba al ST dins el període de garantia. Utilitzeu els símbols ja indicats i poseu probabilitats a totes les branques.



Les probabilitats per A i B no són 2/3 i 1/3 perquè ara són ordinadors que han anat al ST, llavors hem de calcular:

P(A| ¬CAP) = P(A i ¬CAP)/P(¬CAP) =

$$\frac{1/6}{1/5} = 5/6$$

3) Calculeu la probabilitat que aquest ordinador avariat sigui de la marca B. Quants de la marca A hi haurà per cada un de la marca B?

Similarment, P(B | ¬CAP) = P(B i ¬CAP)/P(¬CAP) = P(¬CAP | B) P(B) / P(¬CAP) = (1/10 1/3) / 1/5 = 1/6

N'hi ha 5 ordinadors $\left(\frac{5/6}{1/6}\right)$de la marca A al ST per cada un de la marca B.

4) Si és de marca A, quina és la probabilitat que l'avaria fos per la placa base? I si sabem que té la placa base avariada, quina és la probabilitat que fos de la marca A?

P(P | A) = 0.4 *{assumim que és un del ST, i no explicitem que sabem que està espatllat amb ¬CAP}*

Perquè les proporcions dels A són 3 (T) – 3 (M) – 4 (P): 4 de cada 10.

Tots els apartats puntuen igual.

P(A | P) = P(P | A) P(A) / P(P) = P(P | A) P(A) / [P(P | A)P(A) + P(P | B)P(B)] =

$$\frac{0.4\ 5/6}{0.4\frac{5}{6}+0.2\ 1/6}=\frac{10}{11}$$

Dels que tenen avaria a la placa base, n'hi ha 10 de marca A per cada un de marca B

5) Trobeu la probabilitat que un ordinador (independentment de quina marca sigui) tingui l'avaria per la memòria.

{*Continuem amb ordinadors que han arribat al ST avariats: no val si és un ordinador qualsevol*}

P(M) = P(M | A) P(A) + P(M | B) P(B) = 0.3 5/6 + 0.3 1/6 = 0.3

En aquest cas (com ja deia l'enunciat) és el 30% de cada marca, és a dir, el 30% de tots (l'avaria per memòria i la marca sí són independents)

6) Per a un mes determinat s'han previst 200 transformadors. Quina quantitat de kits de memòria i de plaques base hem de preveure per cobrir les avaries corresponents al mateix mes?

Ja hem trobat P(P) = 0.366..., i P(M) = 0.3. Llavors, P(T) = 1– 0.3 – 0.366... = 0.333... = 1/3

Si necessitem 200 transformadors, vol dir que el total d'ordinadors que passaran aquest mes pel ST és de 600

Per tant, preveiem 600 P(P) = 220 plaques base i 600 P(M) = 180 memòries.

Aquest apartat també es pot resoldre sense assumir probabilitats de P, M o T condicionades a ST: és a dir, les probabilitats brutes P(P) = 0.0733..., P(M) = 0.06 i P(T) = 0.066... també són proporcionals a 220, 180 i 200.

Tots els apartats puntuen igual.

Exercici 2

A la facultat FBI d'una certa universitat s'està usant la plataforma EStatusQuo com a eina d'aprenentatge. Per les dades dels últims anys se sap que els alumnes de la FBI fan fins a 5 exercicis d'EStatusQuo a la setmana. En concret, la variable X: "Nombre d'exercicis setmanals fets amb EStatusQuo" té la funció de probabilitat mostrada a la Taula 1.

Taula 1: Distribució del 'Nombre d'exercicis realitzats a la setmana'

$X = x$	0	1	2	3	4	5	≥ 6
$\mathrm{P}(X = x)$	0.1	0.25	0.25	0.15	0.15	0.1	0

(a) (1 punt)
Quina és la funció de distribució de la variable X?

Solució:

X	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	≥ 6
$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$	0.1	0.35	0.6	0.75	0.9	1	1

(b) (2 punts)
Quins són el valor esperat i la desviació estàndard d'X? Com s'interpreta el valor esperat d'X?

Solució:

$$\begin{aligned}\mu_X &= 0 \cdot 0.1 + \cdots + 5 \cdot 0.1 = 2.3,\\ \sigma_X &= \sqrt{(0 - 2.3)^2 \cdot 0.1 + \cdots + (5 - 2.3)^2 \cdot 0.1}\\ &= \sqrt{0^2 \cdot 0.1 + \cdots + 5^2 \cdot 0.1 - 2.3^2} = \sqrt{2.21} = 1.49.\end{aligned}$$

El valor esperat d'X es pot interpretar com centre de gravetat de la variable. Implica, entre d'altres, que la mitjana d'exercicis setmanals fets per molts alumnes serà un valor a prop de 2.3.

(c) (1 punt)
Quina és la probabilitat que un alumne faci més de 3 exercicis a la setmana si se sap que n'ha fet almenys dos?

Solució:

$$\mathrm{P}(X > 3 | X \geq 2) = \frac{0.15 + 0.1}{1 - (0.1 + 0.25)} = \frac{0.25}{0.65} = 0.38.$$

En total hi ha 250 alumnes a la FBI que fan l'assignatura i que utilitzen EStatusQuo independentment entre ells. Definim llavors la nova variable S_{250}: "Nombre d'exercicis setmanals fets amb EStatusQuo per 250 alumnes".

(d) (2 punts)
Quins són el valor esperat i la desviació estàndard d'S_{250}?

Solució:

$$S_{250} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{250},$$

on $X_1, \ldots, X_{250}$ són independents i amb la funció de probabilitat mostrada a la Taula 1. Per tant,

$$\mathrm{E}(S_{250}) = \sum_{i=1}^{250} \mathrm{E}(X_i) = 250 \cdot 2.3 = 575$$

$$\sigma_{S_{250}} \overset{\text{Indep.}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{250} \mathrm{Var}(X_i)} = \sqrt{250 \cdot 2.21} = 23.51.$$

A continuació treballem amb la variable T: "Temps de lliurement d'un examen de dues hores de duració" de la qual se sap que té com a funció de densitat

$$f(t) = a \cdot t^3, \quad t \in [0,\, 2].$$

La Figura 1 mostra una representació gràfica d'aquesta funció de densitat.

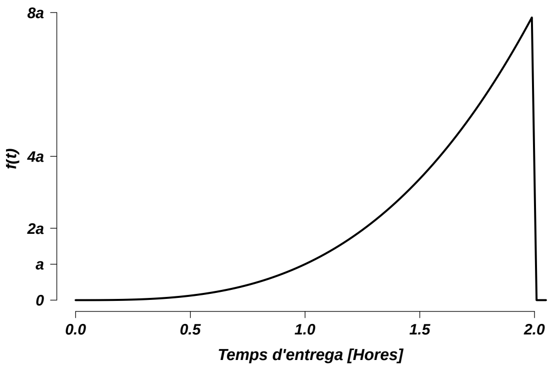


Figura 1: Funció de densitat de la variable "Temps de lliurement d'un examen"

(e) (1 punt)
Quin és el valor d'a?

Solució:
L'àrea per sota de la funció de densitat ha de ser igual a 1:

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 a \cdot t^3\,dt = \frac{a}{4} \cdot t^4 \Big|_0^2 = 4a \implies a = \frac{1}{4} = 0.25.$$

(f) (1 punt)
Si l'examen comença a les 13:15h, quina és la probabilitat que un alumne lliuri l'examen exactament a les 14:15h?

Solució:

$$P(T = 1) = 0.$$

(g) (1 punt)
Quina és la probabilitat que un alumne lliuri l'examen en menys d'una hora?

Solució:

$$P(T < 1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{4} \cdot t^3\,dt = \frac{1}{16} \cdot t^4 \Big|_0^1 = 0.0625.$$

(h) (1 punt)
Quina és la mediana de T?

Solució:
La mediana de T, $t_{0.5}$, és el valor per al qual tenim $P(T < t_{0.5}) = P(T > t_{0.5}) = 0.5$. Per tant:

$$P(T < t_{0.5}) = \frac{1}{16} \cdot t^4 \Big|_0^{t_{0.5}} = \frac{1}{16} \cdot t_{0.5}^4 \implies t_{0.5} = (0.5 \cdot 16)^{1/4} = 1.68.$$

NOM:__________________________COGNOM:____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs)

Problema 3 (B3)

En una empresa han estudiat que l'amplada dels components que fabriquen segueixen una distribució normal amb μ=0,850 mm i σ=0,003 mm. El component no es considera defectuós si es troba dins dels límits 0,850 mm ± 0,005 mm.

1. Quin percentatge de components serà defectuós? (2 punts)

   Definim X: "amplada del component", X~N(0.850, 0.003)

   P(component defectuós) = 1- P(0.850-0.005≤ X ≤ 0.850 + 0.005) = 1 – P(0.845 ≤ X ≤ 0.855) = 1 – P($\frac{0.845-0.850}{0.003}$ ≤ X ≤ $\frac{0.855-0.850}{0.003}$) = 1 - P(−1.6667≤ X ≤ 1.6667) = 1 – 0.905 =0.095

   Amb les taules

   P(X ≤ 1.6667) = 0.9525 i per tant P(X ≥ 1.6667) = 0.0475 = P(X ≤- 1.6667)

   P(−1.6667≤ X ≤ 1.6667) = P(X ≤ 1.6667) - P(X ≤- 1.6667) = 0.9525 - 0.0475 = 0.905

   Per tant, el 9'5% de components resultarà defectuós.

2. Una caixa conté 10 components que han estat fabricats de manera independent. Considera la variable aleatòria Y: "nombre de components defectuosos en un caixa".

a. Determina la distribució que segueix la variable Y. (1 punt)

   Y~Bin(10, 0.095)

b. Quina és la probabilitat que cap dels 10 components d'una caixa sigui defectuós? (1 punt)

   P(Y=0) = $\binom{10}{0}\cdot 0.095^{0}\cdot(1-0.095)^{10}$=0.3685

Quan un client compra un component defectuós es posa en contacte amb el servei d'atenció al client. El nombre de trucades que reben a la seva centraleta per aquesta causa segueix una llei de Poisson amb una mitjana 1,5 trucades per hora.

3. Quina és la probabilitat que en una hora es rebin dues trucades? (1 punt)
   X1: "nombre de trucades a la centraleta per hora", X1~Poiss(1.5)
   P(X1=2) = 0.251021

4. Quina és la probabilitat que en una hora es rebin tres o més trucades? (1 punt)
   P(X1 ≥ 3) = 1 – P(X1 < 3) = 1 - P(X1 ≤ 2) = 1- 0.809 = 0.191

5. Si en una hora s'han rebut dues o més trucades, quina és la probabilitat que en aquella hora se'n rebin quatre o més? (1 punt)
   P(X1 ≥ 4 | X1 ≥ 2) = $\frac{P(X1 \geq 4)}{P(X1 \geq 2)} = \frac{0.066}{0.442}$ = 0.1493

   P(X1 ≥ 2) = 1 – P(X1 < 2) = 1 - P(X1 ≤ 1) = 1- 0.558 = 0.442
   P(X1 ≥ 4) = 1 – P(X1 < 4) = 1 - P(X1 ≤ 3) = 1- 0.934 = 0.066

6. Tenint en compte que les trucades rebudes a la centraleta del servei d'atenció al client segueixen una distribució de Poisson amb una mitjana de 1,5 trucades per hora, considera la variable aleatòria T: "temps transcorregut entre dues trucades consecutives a la centraleta". Quina és la probabilitat que el temps transcorregut entre dues trucades sigui més petit de dues hores? [Explicita la variable aleatòria que uses, així com la seva distribució] (1.5 punts)
   T~exp(1.5)
   P(T<2) = 1-$e^{-1.5\cdot 2}$ = 0.95021

7. Considerem ara les trucades que es reben a la centraleta en un dia. Utilitzant el Teorema Central del límit volem estudiar el nombre de queixes que es reben a la centraleta en 24 hores.
   a) Raona quines condicions s'han d'assumir per poder utilitzar el Teorema Central del Límit. (0.75 punts)
   Considerem 24 variables aleatòries $X1_i$ = "nombre de trucades a la centraleta per hora" amb la mateixa distribució ($X1_i$ ~ Poiss (1.5)) i independents. És a dir, considerem que les trucades que es reben a cada hora segueixen la mateixa mitjana sigui quina sigui l'hora del dia.

   b) Calcula el nombre màxim de queixes que es reben en un dia a la centraleta amb un error de l'1%. (0.75 punts)
   Considerem $S_{24}= X1_1+...+X1_{24}$ amb $X1_i$ independents i idènticament distribuïdes tal i com hem justificat a l'apartat anterior. Pel Teorema Central del Límit tenim que S_{24} ~ $N(24\cdot 1{,}5\ ,\ \sqrt{24 \cdot 1'5}\ ) = N(36,6)$

   $P(S_{24} \leq k) = 0.99$
   $P(\ Z \leq \frac{k-36}{6}\ ) = 0.99$, amb $Z \sim N(0,1)$. Seguint la taula tenim que: $\frac{k-36}{6} = 2.33$, per tant $k= 49.98$
   Amb un error d'1% rebrem un màxim de 50 queixes en un dia.