

NOM: _____ COGNOMS: _____

(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliqueu i justifiqueu els càlculs)

Problema 1 (B1-B2)

S'ha estudiat els resultats de 250 alumnes de les assignatures de BD i PE. Per simplificar s'han arrodonit les notes per rangs superiors i finalment s'ha obtingut la següent taula:

BD \ PE	0	4	6	9	10	
0	10	15	5	3	2	35
4	7	20	10	7	0	44
6	3	18	20	10	12	63
9	5	10	15	30	15	75
10	0	5	10	7	11	33
	25	68	60	57	40	250

1. Considereu PE i BD com a variables aleatòries resultants de l'experiència "escollir a un alumne a l'atzar". Trobeu la funció de probabilitat de la variable PE, i calculeu-ne el valor esperat i la desviació tipus. Interpreteu el resultat. ? (1.5 punts)
2. Trobeu la distribució de la variable PE sabent que la qualificació és de més de 4 a l'assignatura BD. Quina és la qualificació esperada per a aquests alumnes? (1.5 punts)
3. Si s'obté un 10 en alguna de les dues assignatures, el següent curs es guanya beca pels crèdits equivalents. A més, en el cas que es tregui un 9 en ambdues assignatures també s'obté una beca (però només una). Quina probabilitat té un alumne a pertànyer al segon cas (haver tret dos "9"), sabent que ha obtingut beca? (1 punt)
4. Expliqueu la diferència existent entre trobar la probabilitat que un alumne amb una (i només una) beca hagi tret un 9 a PE o que un alumne amb un 9 a PE hagi obtingut una (i només una) beca. Calculeu-les. (1 punt)

5. Trobeu i representeu gràficament les funcions de probabilitat de la nota de PE tal que han tret un 4 a BD i la funció de PE tal que han tret un 6 a BD. Són independents les qualificacions de PE i de BD? Justifica la resposta. (1.5 punts)

6. Si S és la suma de les qualificacions de PE i BD, calcula la correlació entre ambdues qualificacions, coneixent que $E(BD^2) = 49.388$ i $E[S^2] = 182.48$ (1.5 punt)

Estem analitzant les hores dedicades per aprovar una assignatura, i es sap que en el cas d'una assignatura concreta s'ha de dedicar un mínim de 60 hores. Es vol estudiar les hores addicionals que dedica cada estudiant.

7. Es sap que la distribució d'aquest temps de dedicació és així: un 60% dels alumnes dedica entre 0 i 30 hores addicionals, i la resta dedica entre 30 i 70, en ambdós casos amb perfil uniforme. Dibuixa les funcions de probabilitat i de distribució i descriu el significat de cadascuna d'elles. (1 punt)

8. Calcula la probabilitat que un alumne dediqui en total un màxim de 100 hores a preparar l'assignatura. Troba quin és el temps de dedicació que correspon al percentil 95%. (1 Punt)

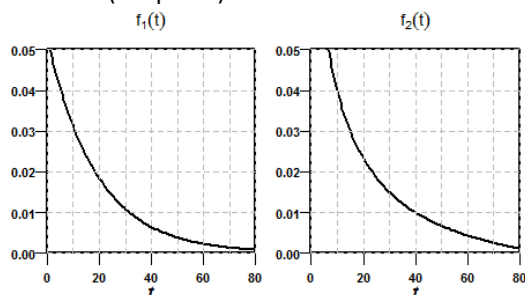
Problema 2 (B3-B4)

El temps de lliurament dels paquets d'una determinada empresa de missatgeria (24 hores/7 dies) es distribueix segons una exponencial. L'empresa considera que un temps raonable per completar el lliurament són 2 dies. Malgrat això, es coneix que només el 10% dels lliuraments d'aquesta empresa es fan dins d'aquest termini de 2 dies.

1. Quin és el temps esperat (en dies) de lliurament? (1 punt)

2. Quina és la probabilitat que un lliurament que no s'ha lliurat durant el primer dia, es lliuri en els dos dies següents, és a dir que es lliuri abans de 3 dies? (0.5 punts)

3. Digues quin dels 2 gràfic següents creus que representa la funció de densitat d'aquesta variable exponencial i argumenta-ho. t : "temps en dies" (0.5 punts)



4. En una determinada sucursal han rebut 20 ordres de lliurament en un dia concret. Quina és la probabilitat que almenys 2 d'aquests lliuraments arribin abans de 2 dies? (1 punt)

5. En 2000 lliuraments fets per aquesta empresa, quina és la probabilitat que almenys 200 arribin en els 2 primers dies? (0.5 punts)

6. Digues quan val y en la següent frase i justifica els càlculs: "La companyia garanteix que almenys y paquets (dels 2000 anteriors) es lliuraran abans de dos dies amb una probabilitat de 0.95" (1 punt)

7. Els paquets de pes entre 1 kg i 5 kg (suposem que el pes és uniforme) es posen a banda en un carretó per ser classificats. Si en un moment donat hi han 30 paquets al carretó, calcula la probabilitat que el pes de la càrrega del carretó superi els 100 kgs. (1 punt)
8. En un estudi posterior amb 60 lliuraments, posant a prova si el temps mitjà és inferior a 15 dies s'ha trobat un p-valor igual a 0.1. Si la mitjana mostral era idèntica a la desviació mostral, pots trobar quin ha estat la mitjana del temps de lliurament a la mostra? (1 punt)

Per tal de millorar el rendiment del temps de lliurament, l'empresa ha introduït una millora en la logística. La suma i la suma al quadrat dels temps de lliurament en dies dels 120 primers enviaments han estat:

$$\sum_{i=1}^{120} y_i = 2082.2 \qquad \sum_{i=1}^{120} y_i^2 = 147992.5$$

9. Dóna una estimació puntual de la mitjana i de la desviació poblacionals dels nous temps de lliurament. (1 punt)
10. Calcula un interval de confiança del 95% del temps mitjà de lliuraments poblacional (1 punt)
11. Revisant les dades, es donen compte que entre aquests 120 lliuraments hi havia un d'un paquet que es va quedar oblidat dins d'un magatzem i que no es va entregar fins a 300 dies més tard des de que es va donar l'ordre. Recalcula l'anterior interval de confiança sense considerar aquest lliurament. (1 punt)
12. Assenyala quin és el límit inferior de l'interval de confiança del 95% per σ després d'haver eliminat aquesta observació entre les següents opcions. *Pista: no facis càlculs però justifica la resposta breument* (0.5 punts)

- | | |
|-----------|---------|
| a) 1234.8 | e) 35.1 |
| b) 739.7 | f) 27.2 |
| c) 348.5 | g) 18.7 |
| d) 208.7 | h) 14.5 |

Problema 3 (B5-B6)

Volem fer un estudi per comparar el temps d'enciptació (en μs) de dos algorismes AES i CAM. Per fer-ho es creen 30 fitxers de mida aleatòria i es mesura el temps d'enciptació per l'algorisme AES (A) i l'algorisme CAM (C). Les dades en μs es recullen en la següent taula:

	A (AES)	C (CAM)	D = C - A
Mitjana	5'1674	7'6076	2'4402
Desviació tipus	0'6363	2'1781	1'5558

Podem suposar que les variables A, C i D segueixen una distribució normal. Per contestar els següents apartats considereu un risc $\alpha=0.05$ i una confiança del 95%.

1. Es tracta de dues mostres independents o aparellades? Raoneu la resposta. (1 punt)

Suposeu que es tracta d'un disseny aparellat. Volem estudiar si els dos algorismes triguen o no el mateix temps en encriptar.

2. a) Indiqueu les hipòtesis i les premisses de la prova a realitzar. (0'5 punts)

b) Indiqueu la fórmula de l'estadístic i quina és la distribució d'aquest quan se suposa que els dos algorismes tenen la mateixa mitjana. (0'5 punts)

c) Calculeu l'estadístic i raoneu si podem rebutjar la hipòtesi nul·la. (1 punt)

Considereu que es tracta d'un disseny amb mostres independents. Ara volem estudiar si l'algorisme CAM té una dispersió més gran que l'algorisme AES posant a prova les variàncies del temps d'enciptació.

3. a) Indiqueu les hipòtesis i les premisses. (0'5 punts)

b) Indiqueu la fórmula de l'estadístic i quina és la distribució d'aquest sota la hipòtesi nul·la. (0'5 punts)

c) Calculeu l'estadístic i raoneu si podem si podem rebutjar la hipòtesi nul·la. (1 punt)

Volem estudiar si hi ha relació entre els temps d'enciptació dels dos algorismes.

4. a) A partir de les propietats de la variància, deduiu una expressió per calcular el coeficient de correlació lineal amb les dades donades a l'exercici, és a dir, les desviacions tipus de les variables A, C i D. Calculeu el coeficient de correlació lineal. (1'5 punts)

Si no heu pogut calcular el coeficient de correlació, useu el valor $r=0'9$ pels següent apartats.

- b) Interpreteu el coeficient de correlació lineal. (0'5 punts)

5. a) Calculeu la recta de regressió de l'algorisme CAM respecte l'algorisme AES. (1 punt)

- b) Podem considerar el temps d'enciptació de CAM està associat al d'AES? Realitza la prova d'inferència estadística apropiada per donar resposta a la pregunta. (1 punt)

6. Fes una predicció puntual i per interval de confiança pel temps d'enciptació de CAM per un temps d'enciptació d'AES de $5 \mu s$ (1'5 punts)