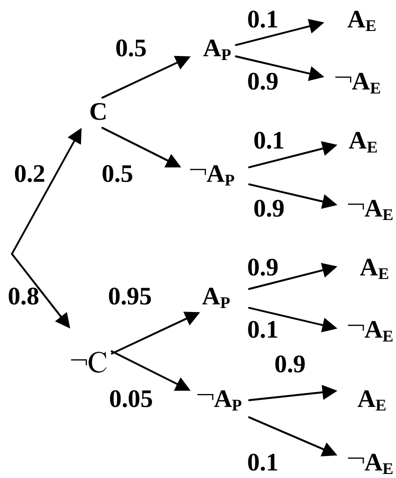
Plantilla solució

Problema 1. Un alumne cursa una assignatura on fa exercicis cada setmana. Un en concret requereix un càlcul que ha estat programat per un altre alumne amb un codi (C). Un 20% d'estudiants opten per dedicar 5' i fer aquest exercici amb el codi mentre que la resta li dediquen 60' i ho fan sense el codi (¬C). Si ho fan amb el codi tenen una probabilitat d'aprovar (si no els descobreixen) aquest problema (A_P) de 0.5 i l'examen (A_E) de 0.1. Però si treballen l'exercici 60' aquestes probabilitats són 0.95 i 0.9.

Utilitzi C, ¬C, A_P, $\neg A_P$, A_E i $\neg A_E$.



<u>Escrigui formalment</u> totes les probabilitats que ha de calcular

1) Calculi les probabilitats dels 8 esdeveniments que resulten de intersecar els 3 esdeveniments C, A_P i A_E

$P[\ C \cap A_P \cap A_E\ ] = 0.2 * 0.5 * 0.1 = 0.01$
$P[\ C \cap A_P \cap \neg A_E\ ] = 0.2 * 0.5 * 0.9 = 0.09$
$P[\ C \cap \neg A_P \cap A_E\ ] = 0.2 * 0.5 * 0.1 = 0.01$
$P[\ C \cap \neg A_P \cap \neg A_E\ ] = 0.2 * 0.5 * 0.9 = 0.09$
$P[\neg C \cap A_P \cap A_E\ ] = 0.8 * 0.95 * 0.9 = 0.684$
$P[\neg C \cap A_P \cap \neg A_E\ ] = 0.8 * 0.95 * 0.1 = 0.076$
$P[\neg C \cap \neg A_P \cap A_E\ ] = 0.8 * 0.05 * 0.9 = 0.036$
$P[\neg C \cap \neg A_P \cap \neg A_E\ ] = 0.8 * 0.05 * 0.1 = 0.004$

Si no especifica la probabilitat demanada: -0'3 (enunciat diu "escriure formalment")

2) Probabilitat d'aprovar el problema si no usen el codi?

$P(A_P \mid \neg C) = 0.95$ Directament de l'enunciat

També: $P(A_P \mid \neg C) = P(A_P \cap \neg C) / P(\neg C) = 0.76 / 0.8 = 0.95$

Si no especifica ("escriure formalment") la probabilitat demanada: -0'5

3) Probabilitat de usar el codi i aprovar el problema i aprovar l'examen?

$P[\ C \cap A_P \cap A_E\ ] = 0.2 * 0.5 * 0.1 = 0.01$ (Primera línia pregunta 1)

Altres solucions correctes, OK.

Si no especifica ("escriure formalment") la probabilitat demanada: -0'5

4) Probabilitat d'aprovar el problema i l'examen si usen el codi?

$P[(A_P \cap A_E) \mid C] = P[C \cap A_P \cap A_E] / P(C) = 0.01 / 0.2 = 0.05$

Si no especifica ("escriure formalment") la probabilitat demanada: -0'5

5) Probabilitat d'aprovar l'examen.

$P[A_E] = P[(C \cap A_P \cap A_E) \vee (C \cap \neg A_P \cap A_E) \vee (\neg C \cap A_P \cap A_E) \vee (\neg C \cap \neg A_P \cap A_E)] =$
$= 0.01 + 0.01 + 0.684 + 0.036 = 0.74$

Si no especifica ("escriure formalment") la probabilitat demanada: -0'5

6) Probabilitat d'aprovar el problema.

$P[A_P] = P[(C \cap A_P \cap A_E) \vee (C \cap A_P \cap \neg A_E) \vee (\neg C \cap A_P \cap A_E) \vee (\neg C \cap A_P \cap \neg A_E)] =$
$= 0.01 + 0.09 + 0.684 + 0.076 = 0.86$

Si no especifica ("escriure formalment") la probabilitat demanada: -0'5

7) Probabilitat d'aprovar el problema i l'examen?

$P[A_P \cap A_E] = P[(C \cap A_P \cap A_E) \vee (\neg C \cap A_P \cap A_E)] =$
$= 0.01 + 0.684 = 0.694$

Si no especifica ("escriure formalment") la probabilitat demanada: -0'5

8) Aprovar el problema i l'examen són independents?

NO, ja que $P[A_P \cap A_E] = 0.695 \neq 0.6364 = P[A_P] * P[A_E]$

Altres solucions correctes, OK.

9) Un alumne que aprova l'examen, amb quina probabilitat ha usat el codi?

$P(C \mid A_E) = P(C \cap A_E) / P(A_E) = P[(C \cap A_P \cap A_E) \vee (C \cap \neg A_P \cap A_E)] / P(A_E) =$
$= (0.01 + 0.01) / 0.74 \approx 0.027$

Si no especifica ("escriure formalment") la probabilitat demanada: -0'5

10) Hem calculat que si el codi s'expandeix com un virus i l'utilitzen el 90%, la probabilitat d'aprovar l'examen baixa fins a un 0.18. Amb aquesta informació i els resultats anteriors, quins consells pel alumnat i professorat et semblen raonables?

Òbviament, a l'alumnat, que no convé utilitzar el codi. I al professorat, que ha d'aconseguir que l'alumnat no l'utilitzi.

[Aconsellar als professors exàmens més fàcils NO descompta cap punt.]

[Càlculs interesants secundaris haurien de considerar les conseqüències. Per exemple, a curt termini, en temps perdut per l'alumnat – que no podrà dedicar a gaudir de la vida. O en 'cadires' docents no ocupades –que implica malbaratament de recursos públics i per tant, menys diners per formació, sanitat, etc. I a llarg termini, en oportunitats de feina perdudes, o ...]

NOTA: $P[A_E] = P[(C \cap A_P \cap A_E) \vee (C \cap \neg A_P \cap A_E) \vee (\neg C \cap A_P \cap A_E) \vee (\neg C \cap \neg A_P \cap A_E)] =$
$= 0.9 * 0.5 * 0.1 + 0.9 * 0.5 * 0.1 + 0.1 * 0.95 * 0.9 + 0.1 * 0.05 * 0.9 =$
$= 0.045 + 0.045 + 0.0855 + 0.0045 = 0.18$

A tots els apartats, justifiqueu les respostes, explicant quines distribucions de probabilitat heu utilitzat.

Tenim una nova xarxa social anomenada “facelrook” que permet als seus usuaris penjar textos i fotos a un lloc que es diu “el mur”, enviar comentaris als amics i coses de l’estil. Un usuari que estudia a la FIB ha determinat que rep comentaris dels seus col·legues d’acord amb una distribució de Poisson i mitjana 0.5 al dia. Els dies que rep més d’un comentari (i només aquests dies), per celebrar-ho ell penja una foto.

(a) Quina és la probabilitat que un cert dia triat a l’atzar aquest usuari rebi més d’un comentari? **(1.5 pt)**

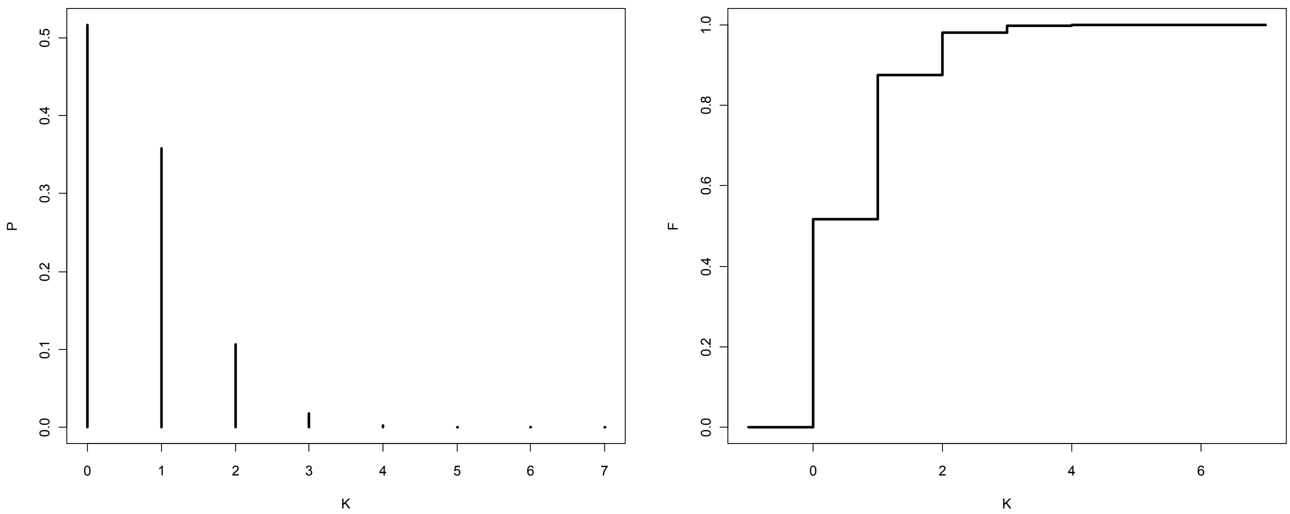
Sigui C ~ Poisson(λ), on λ = 0:5, la distribució del nombre de comentaris rebuts per dia.
Per tant, la probabilitat és Prob(C > 1) = 1 - Prob(C = 0) - Prob(C = 1).
La resposta és 1 – exp(–λ) – exp(–λ) λ = 1 – 0.6065 – 0.3033 = **0.0902**.

(b) Hem vist que el cap de setmana (dos dies, és clar) ha penjat una foto. Tenint en compte aquest fet, digueu la probabilitat que durant aquest temps hagi rebut exactament tres comentaris (raonant la resposta). **(2 pt)**

Diem A al esdeveniment “tres comentaris en dos dies”, i B a “una foto en dos dies”. El que es busca és Prob(A | B) = Prob(A∩B)/Prob(B).
A∩B = “dos comentaris a un dia i un a l’altre dia, o tres a un dia i cap a l’altre”.
Observem que A∩B = A, doncs A està inclòs a B. Llavors, Prob(A∩B) = Prob(A).
La distribució de C_2, el nombre de comentaris en dos dies (si són independents) és Poisson amb paràmetre λ = 1, i Prob(C_2 = 3) = 0.0613
Tenir només una foto és tenir un dia més d’un comentari, i l’altre un o menys:
Prob(B) = 2 Prob(C > 1)Prob(C ≤ 1) = 2 0.0902(1–0.0902) = 0.1641
Prob(A | B) = 0.0613 / 0.1641 = **0.3736**

(c) Al llarg de *n* dies, quina és la distribució del nombre de fotos que va penjant? Digueu el nom del model emprat, i els paràmetres amb el seu valor si el coneixeu. Representeu gràficament, encara que de forma aproximada, les seves funcions de probabilitat i de distribució per a una setmana. **(2 pt)**

Com en un procés de Poisson cada dia és independent dels altres, si un dia es penja la foto o no és un esdeveniment independent dels altres dies; i per cada dia, la seva probabilitat és la mateixa (apartat a): per tant, en *n* dies, el nombre de fotos és **Binomial(*n*, *p*=0.0902).**
Aquí teniu les funcions exactes:



(d) En mitjana: quants comentaris rep en un mes (de 31 dies)? I quantes fotos es penjaran? **(1 pt)**

Valors esperats:
- comentaris per mes: $31 \cdot 0.5 =$ **15.5** (segons una llei Poisson)
- fotos penjades per mes: $31 \cdot 0.0902 =$ **2.7962** (segons una llei Binomial)

(e) facelrook t'informa de la mitjana de missatges que cada usuari envia des del seu compte. El nostre fiber no ho necessita perquè: a) el 40% dels dies no envia *cap* missatge, i b) de la resta dels valors possibles coneix aquesta propietat:

$$\text{Prob}(k \text{ missatges}) = a/k, \quad k = 1,2,3,4$$

- Quin és el valor de la constant a? **(0.75 pt)**

M: "nombre de missatges enviats al dia"
Prob(M=0) + Prob(M=1) + Prob(M=2) + Prob(M=3) + Prob(M=4) = 1
$0.40 + a(1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4) = 1$
$a = 0.60 \cdot 12/25 =$ **0.288**

- Quin és el nombre esperat de missatges enviats en un dia per aquest usuari? **(0.75 pt)**

Suma {k=0...4} (k· Prob(M=k)) = a·(suma {k=1…4} (k/k)) = 4 a = **1.152**

- Comproveu que la desviació tipus del nombre de missatges enviats en un dia és aproximadament 1.25. Per a un cap de setmana, suposant que el que fa un dia és independent de l'altre, què valdria la desviació tipus del nombre de missatges enviats? **(1 pt)**

$E(M^2) = a\cdot(1 + 4\cdot 1/2 + 9\cdot 1/3 + 16\cdot 1/4) = a\cdot(1 + 2 + 3 + 4) = 2.88$
$V(M) = 2.88 - 1.152^2 = 1.552896$
$\sigma = \sqrt{1.5529} =$ **1.246**
W: "nombre de missatges enviats en dos dies" = M1 + M2
Si M1 i M2 són independents, V(W) = V(M1) + V(M2) = 2·V(M) = 3.1058
I la desviació tipus de W = $\sqrt{3.1058}$ = **1.762** (*no és el doble*)

- Ara imagineu que S són els missatges enviats el dissabte i D els enviats el diumenge del mateix cap de setmana, i que S i D tenen correlació +0.5. Trobeu el nombre mitjà de missatges enviats en un cap de setmana, i la seva variància. **(1 pt)**

$E(M_S) + E(M_D) = 1.152 + 1.152 =$ **2.304**
Si M_S i M_D **NO** són independents, $V(W) = V(M_S) + V(M_D) + 2\,Cov(M_S, M_D) =$
$= V(M_S) + V(M_D) + 2\,\rho\,\sigma_S\,\sigma_D = 1.5529 + 1.5529 + 2\cdot 0.5\cdot 1.246\cdot 1.246 =$ **4.6587**

Ara, la desviació tipus del nombre de missatges per a tot el cap de setmana és 2.158.
La correlació positiva significa que si un dia l'usuari envia molts missatges, normalment l'altre dia també; llavors la suma dels dos dies fluctua més que en el cas de dies independents.

1. La Corporació BOMBIS ha instal·lat un nou procediment de fabricació de bombetes de llum i han detectat que no els hi acaba de funcionar molt be ja que han pres un lot de 20 bombetes i 3 de cada 10 no funcionen.
    a. Quina distribució de probabilitat segueix la variable aleatòria número de bombetes foses?
    b. Quant val la seva esperança? I la seva variància?
    c. Calculeu la probabilitat de que un lot d'aquests hagin 8 bombetes que no funcionin
    d. I que hi hagin més de 8?

    Solució:

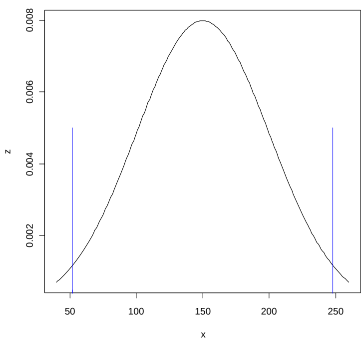
    a) $B(n=20, p=0.3)$
    b) $E(X1)=np=6$; $V(X1)=npq=20*0.3*0.7=4.2$
    c) $P(X1=8)$ per combinatòria=0.114 o per Taules:
       $P(X1<=8)-P(X1<=7)=0.8867-0.7723=0.1134$
    d) $P(X1>8) = 1-P(X<=8)=1-0.8867=0.1133$

2. El tècnic de control de qualitat d'aquesta empresa aconsella que és millor comprovar la duració en dies d'aquestes bombetes. S'ha observat que una bombeta dura 150 dies amb desviació estàndard de 50 dies. Assumint que la vida de les bombetes segueix una distribució normal:
    a. Quina és la probabilitat de que una bombeta duri més de 200 dies,
    b. Calculeu els valors a i b tal que si X és la variable aleatòria duració en dies de les bombetes, $p(a<X<b)=0.95$.
    c. Representeu gràficament la variable aleatòria X e indiqueu damunt de la gràfica els valors dels punts a i b.
    d. Es prenen 100 bombetes idèntiques i es vol conèixer quina és la duració mitjana (en dies) d'aquestes bombetes així com la seva variabilitat. Quina distribució de probabilitat segueix la duració mitjana d'aquestes bombetes?

    Solució:

    $N(150, sigma=50)$

    a) $P(X>=200)=1-P(X<=200)=1-P(Z<((200-150)/50)=$
       $1-P(Z<=1)=1-0.8413=0.1587$
    b) $P(a<X<b)=0.95$ és equivalent a $P(-1.96<Z<1.96)=0.95$. És a dir, $((a-150)/50)=-1.96$; per tant a=52 i $((b-150)/50)=1.96$; per tant b=248 dies.
    c) Representació gràfica



d) n=100, E(sum(Xi)/n)=mu=150; Var((sum(Xi)/n)=sigma^2/n^2=25. Xbar~N(150,sigma2=25)

3. A continuació, es verifica que les bombetes de baix consum fabricades per aquesta empresa tenen una duració exponencial amb paràmetre λ=8 mesos. Si Y és la variable aleatòria de la duració de les bombetes en mesos:
   a. Quant val E(Y) i la Var(Y)?
   b. Doneu les expressions de la funció de densitat i de distribució de la variable aleatòria Y.
   c. Quina és la probabilitat que una bombeta duri entre 3 i 12 mesos? Representeu-la gràficament.
   d. Quants mesos han de passar fins que s'hagin fos el 90% d'aquestes bombetes?

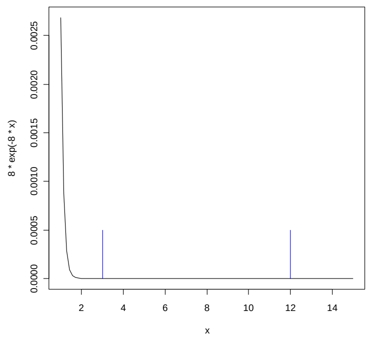
   Solució:

   a) $E(Y)=1/\lambda=1/8$; $V(Y)= 1/\lambda^2=1/8^2$

   b) $F_Y(x)=1-e^{-8x}$ i $f_Y(x)=8e^{-8x}$

   c) $P(3<Y<12)= F_Y(12)- F_Y(3)=$ 3.775136e-11

   Representació gràfica:



   d) $P(Y<=a)=0.9$; $1-{}^{e-8a}=0.9$; $-8a=\log(0.1)=-2.303$; per tant, a=0.287 mesos.