NOM:______________________________COGNOMS:____

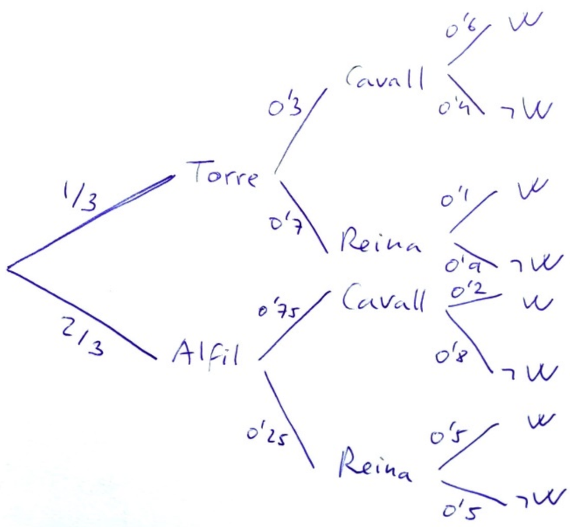
(*Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs*)

Problema 1 (B1)

Analitzant partides d'escacs, ens fixem en una determinada jugada. Quan les blanques utilitzen la torre (T), després les negres escullen el cavall (C) amb probabilitat 0.3 o, si no, la reina (Q). Quan les blanques juguen amb l'alfil (A) les negres utilitzen el cavall 3 de cada 4 vegades, i la reina la resta. Les blanques empren l'alfil el doble que la torre. El desenllaç de la partida, mitjançant la probabilitat de W (W: victòria per a les blanques), es mostra a la taula:

		negres	
	Prob W	C	Q
blanques	Torre	*0,6*	*0,1*
	Alfil	*0,2*	*0,5*

1. En primer lloc, construïu l'arbre d'esdeveniments i probabilitats per a aquesta situació (l'arbre tindrà tres nivells, l´últim victòria o derrota del jugador amb blanques). *(1 pt)*



2. Segons la taula anterior, es pot dir que l'esdeveniment "guanyar les blanques una partida" està relacionat amb el moviment que faci en aquest punt i el posterior moviment de les negres? Per què? *(1 pt)*

   Tenint en compte que la probabilitat de W canvia segons quin sigui la combinació de moviments, és evident que sí està relacionat amb la jugada de les negres i de les blanques. És a dir:
   P(W | T i C), P(W | T i Q), P(W | A i C), P(W | A i Q) són tots diferents.

3. Trobeu la probabilitat que les negres juguin amb la reina; doneu també la de que les negres juguin amb la reina si les blanques han emprat l'alfil. *(1 pt)*

   P(Q) = P(Q | T) P(T) + P(Q | A) P(A) = 0.7 1/3 + 0.25 2/3 = 0.4
   P(Q | A) = 0.25 (és directe)

4. Si sabem que en una certa partida les negres han jugat amb la reina, quina és la probabilitat que les blanques hagin utilitzat abans l'alfil? *(1 pt)*

   P(A | Q) = P(Q | A) P(A) / P(Q) = 0.25 2/3 / 0.4 = 0.4167

5. Calculeu la probabilitat que guanyi les blanques si han emprat la torre. És la mateixa probabilitat, si hagués utilitzat l'alfil? Són independents, guanyar la partida i el moviment de les blanques? *(2 pts)*

   P(W | T) = P(W | T i C) P(C | T) + P(W | T i Q) P(Q | T) = 0.6 0.3 + 0.1 0.7 = 0.25
   P(W | A) = P(W | A i C) P(C | A) + P(W | A i Q) P(Q | A) = 0.2 0.75 + 0.5 0.25 = 0.275
   No és la mateixa probabilitat, és una mica més fàcil guanyar jugant amb l'alfil (però s'assemblen molt, així que realment no importa massa el moviment que es fa).

6. Calculeu i expliqueu què volen dir P(T | W) i P(T | ¬W). Si són iguals, representa que T i W són independents? *(2 pts)*

   P(T | W): probabilitat d'haver jugat amb la torre si les blanques han guanyat la partida
   P(T | ¬W): probabilitat d'haver jugat amb la torre si les blanques han perdut la partida

   $P(T \mid W) = P(W \mid T)\, P(T) / P(W) = P(W \mid T)\, P(T) / [\, P(W \mid T)\, P(T) + P(W \mid A)\, P(A)\,] = 0.25\ 1/3 / [0.25\ 1/3 + 0.275\ 2/3\,] = 0.3125$

   $P(T \mid \neg W) = P(\neg W \mid T)\, P(T) / P(\neg W) = P(\neg W \mid T)\, P(T) / [\, P(\neg W \mid T)\, P(T) + P(\neg W \mid A)\, P(A)\,]$
   $= (1\text{-}0.25)\ 1/3 / [(1\text{-}0.25)\ 1/3 + (1\text{-}0.275)\ 2/3\,] = 0.3409$

   Els dos valors són semblants, però no iguals a P(T)=1/3. Per tant T i W no són independents (per poc).

7. Empleneu la següent taula amb les probabilitats de cada cas, i responeu justificant la resposta: es pot dir que la victòria de les blanques no depèn del moviment de les peces negres? *(2 pts)*

	C	Q
W	0,16	0,1067
¬W	0,44	0,2933

   $P(W \text{ i } C) = P(W \text{ i } C \mid T)\, P(T) + P(W \text{ i } C \mid A)\, P(A) = P(W \mid C \text{ i } T)\, P(C \mid T)\, P(T) + P(W \mid C \text{ i } A)\, P(C \mid A)\, P(A) = 0.6\ 0.3\ 1/3 + 0.2\ 0.75\ 2/3 = 0.16$
   Veiem que es sumen els productes de les probabilitats que van de W a l'arrel passant per C.
   De forma similar pels altres casos

   $P(W \text{ i } Q) = P(W \text{ i } Q \mid T)\, P(T) + P(W \text{ i } Q \mid A)\, P(A) = 0.1\ 0.7\ 1/3 + 0.5\ 0.25\ 2/3 = 0.1067$

   $P(\neg W \text{ i } C) = P(\neg W \text{ i } C \mid T)\, P(T) + P(\neg W \text{ i } C \mid A)\, P(A) = 0.4\ 0.3\ 1/3 + 0.8\ 0.75\ 2/3 = 0.44$

   $P(\neg W \text{ i } Q) = P(\neg W \text{ i } Q \mid T)\, P(T) + P(\neg W \text{ i } Q \mid A)\, P(A) = 0.9\ 0.7\ 1/3 + 0.5\ 0.25\ 2/3 = 0.2933$

   Ara que tenim la taula completa, observem que: P(W) P(C) = (0.16 + 0.1067) (0.16 + 0.44) = 0.16 = P(W i C), i el mateix amb les altres interseccions. Efectivament, W no depèn de si les negres han jugat amb el cavall o amb la reina.

8. Resum global. *(0 pts)*

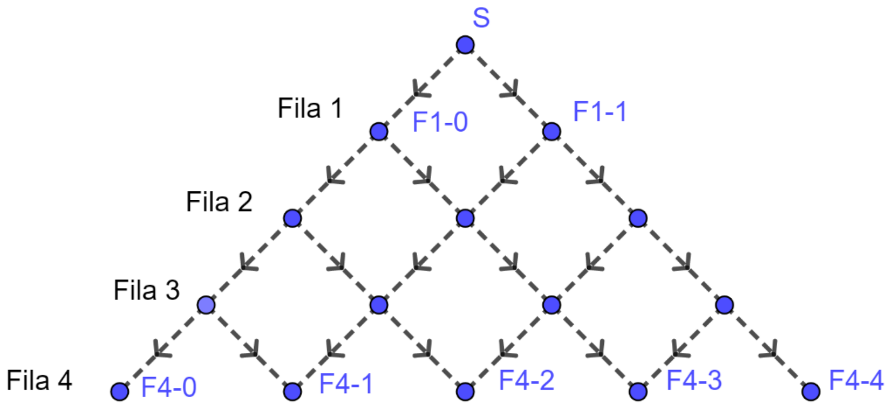
   Aquesta pregunta no figurava a l'examen. Noteu que:
   - La victòria de les blanques no depèn del moviment de les negres
   - La victòria de les blanques depèn (no massa) del propi moviment de les blanques
   - Malgrat aquests dos punts, la probabilitat de la victòria de les blanques varia considerablement en funció de la combinació dels dos moviments (blanques i negres).

NOM:____________________________COGNOM:____________________________________

(*Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs*)

Problema 2 (B2)

Es vol estudiar els diferents camins que es poden traçar a partir de la construcció d'una imatge. Cada camí comença sempre al punt de sortida **S** i continua en ordre descendent seguint el sentit de les fletxes. A cada punt hi ha una bifurcació per anar a una de les dues caselles que es troben a sota. Per escollir si anar a la dreta o a l'esquerra es llança una moneda no trucada. Si surt cara, el camí segueix la fletxa de la dreta fins a la següent casella de la fila inferior; i, si surt creu, es segueix la fletxa de l'esquerra. Per a cada fila, els punts s'anomenen començant pel que es troba més a l'esquerra amb la posició 0. Així a la fila 1 es troben les posicions 0 i 1; i a la fila 4 hi ha les posicions de la 0 fins la 4 tal i com es pot veure en la figura següent:



Es defineix X com la variable aleatòria que recull la posició final del camins que acaben a la fila 1. I es defineix com a Y la variable aleatòria que recull la posició final dels camins que acaben a la fila 4.

1. Indiqueu la funció de probabilitat d'Y. (1,5 punts)

k	P_Y (k)
0	1/16
1	4/16 = 1/4
2	6/16 = 3/8
3	4/16 = 1/4
4	1/16

2. Calculeu l'esperança i la desviació típica d'Y (1 punt)

$E(Y) = 0 \cdot 1/16 + 1 \cdot 4/16 + 2 \cdot 6/16 + 3 \cdot 4/16 + 4 \cdot 1/16 = 32/16 = 2$
$E(Y^2) = 0^2 \cdot 1/16 + 1^2 \cdot 4/16 + 2^2 \cdot 6/16 + 3^2 \cdot 4/16 + 4^2 \cdot 1/16 = 80/16 = 5$
$Var(Y) = 80/16 - 2^2 = 1$ i $\sigma_Y = 1$

3. Indiqueu la funció de probabilitat d'Y sabent que el camí ha passat per X=0. (1 punt).

Es vol calcular P(Y=k |X=0) per als diferents valors de k. Per a k=0, es té que $P(Y=0 \mid X=0) = P(Y=0 \cap X=0) / P(X=0) = (1/16) / (1/2) = 1/8$. Fent, el mateix raonament per als altres casos, s'obté que:

k	$P_{Y\mid X=0}$ (k)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
4	0

Per a k=4 la probabilitat és 0 perquè no és possible accedir des de la posició F1-0 a la F4-4

Ara es repeteix l'experiment aleatori amb **una moneda trucada** que té probabilitat ***p* que surti creu** i anomenem M la variable aleatòria que recull la posició final dels camis que acaben a la fila 4 amb aquesta moneda trucada.

4. Indiqueu la funció de probabilitat de M (1,5 punts)

k	P_M (k)
0	p^4
1	$4p^3(1-p)$
2	$6p^2(1-p)^2$
3	$4p(1-p)^3$
4	$(1-p)^4$

5. Calcula l'E(M) i troba el valor de p per tal que l'esperança sigui 1 (1 punt)

E(M) = -4p + 4 i per tant, p=3/4

Considerem la variable aleatòria T que segueix una distribució amb la següent funció de densitat:

$$f(t) : \begin{cases} k(1+t) & \text{si } 0\leq t\leq 4 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

6. Trobeu el valor de k per tal sigui una funció de densitat. (1,5 punts)

Per tal que sigui una funció de densitat s'ha de complir que:
1.- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ =1.
2.- Els valors de f(t) siguin sempre positius

Respecte la primera condició es té que: $\int_0^4 k(1+t)dt \;=\; \left[\frac{k(1+t)^2}{2}\right]_0^4$ = 25k/2 – k/2 = 12k = 1 -> *k* = 1/12
Si *k* > 0 i *t*+1 > 0 es comprova que, efectivament, es compleix la segona condició.

La funció de densitat és aleshores:

$$f(t) : \begin{cases} \frac{1+t}{12} & \text{si } 0\leq t\leq 4 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

(Observació: També es pot trobar el valor de k a partir de l'àrea del trapezi)

7. Calculeu la funció de distribució de T (1,5 punts)

$$F(t) = \int_0^t \frac{1+x}{12}\, dx = \left[\frac{(1+x)^2}{24}\right]_0^t = \frac{(1+t)^2}{24} - \frac{1}{24} = \frac{t^2+2t}{24}$$

$$F(t) : \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \frac{t^2+2t}{24} & \text{si } 0\leq t\leq 4 \\ 1 & \text{si } t>4 \end{cases}$$

8. Calculeu el percentil 70 de T (1 punt):

$$\frac{t^2+2t}{24} = 0.7;\; t^2+2t-16.8 = 0;$$
$$t = \frac{-2+\sqrt{71.2}}{2} = 3.219; (\text{l'altra arrel és negativa})$$

NOM:___________________________COGNOM:___________________________________

(*Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs*)

Problema 3 (B3)

Una escola universitària vol promoure un nou tipus d'exercicis a realitzar en una plataforma virtual. En una prova preliminar s'ha establert que un 30% dels estudiants utilitzarien la plataforma.

<u>(En tots els apartats definiu clarament les variables aleatòries i els models que useu)</u>

1. a) En un grup de 20 estudiants de l'assignatura XX, quants es pot esperar que l'utilitzin? (0.5 punts)

X = "nombre estudiants de XX que es connecten" és Bin(n=20,p=0.3) (0.25 punts)

E(X) = n*p = 20 * 0.3 = **6 estudiants** 0.25 punts)

b) Un altre grup, per l'assignatura YY, resulta en una variable que té per variància 6.3. Deduïu la mida del grup de YY (1 punt)

Y = "nombre estudiants de YY que es connecten" és Bin(n_2=?,p=0.3), i V(Y) = 6.3 (0.5 punts)

V(Y) = n_2 p (1-p) = 6.3 —> n_2 = 6.3/0.3 0.7 = **30** (0.5 punts)

2. Seguint amb el grup de 20 estudiants, quina probabilitat hi ha que l'utilitzin més de 5 alumnes a la plataforma? I que no l'utilitzi cap? (2 punts)

P(X>5) = 1-P(X<=5) = {taules} = 1-0.4164 = **0.5836** **(més del 50%)** (1 punt)

P(X=0) = P(X<=0) = {taules} = **0.0008** (1 punt)
(o bé fent $p_X(0)$ amb la fórmula)

3. Quina és la probabilitat d'haver d'observar 10 estudiants fins trobar el primer que utilitza la plataforma? (1 punt)

V = "nombre estudiants fins el primer que utilitza" és Geom(p=0.3) (0.5 punts)

P(V=10) = $(0.7)^9$ * 0.3 = **0.012** (0.5 punts)

Amb l'objectiu de fomentar la plataforma, els professors envien correus a tots els estudiants per tal de recordar que el seu ús és molt interessant. El seu enviament és aleatori en el sentit de no seguir un patró pre-definit. S'observa que, de mitjana, els estudiants reben un correu a la setmana per part dels professors.

4. Quina probabilitat hi ha que en un mes un estudiant, seleccionat a l'atzar, rebi 5 correus electrònics? (1.5 punts)

Donat que un correu a la setmana equival a quatre al mes:
C = "Nombre de correus que es reben al mes" ~ Poisson(Lambda=4) (0.5 punts)

P(C=5) = P(C<=5) – P(C<=4) = {taules} = 0.785 – 0.629 = **0.156** (1 punt)
= (4^5 * exp(-4)) / 5! = 0.156

5. a) Quina probabilitat hi ha que passin més de dues setmanes entre dos correus recordatoris per part dels professors? I la probabilitat que passin entre 10 i 15 dies? (1.5 punts)

T = "Temps en mesos entre correus electrònics" ~ Exp(Lambda=4) (0.5 punts)

Com dues setmanes equival a 0.5 mesos:
P(T>0.5) = 1 – P(T<=0.5) = 1-(1-exp(-4*0.5)) = exp(-2) = **0.135** (0.5 punts)

Entre 10 i 15 dies → en mesos, entre 1/3 i 1/2 :
P(1/3 < T < 1/2) = F(1/2) – F(1/3) = exp(-4/3) – exp(-4/2) = **0.128** (0.5 punts)

(valors similars obtinguts amb lambda=30/7 també són correctes)

Al final es decideix obrir la plataforma a tots els estudiants dels 10 grups d'una assignatura (200 estudiants). Podem considerar que la proporció d'ús seguirà sent la mateixa.

6. Quina probabilitat hi ha que més del 35% dels estudiants utilitzin la plataforma? (1.5 punts)

A = "nombre estudiants es connecten" és Bin(n=200,p=0.3)
que es pot aproximar per una Normal amb μ=200*0.3=60 i σ^2=200*0.3*0.7=42 (és a dir σ=6.48) (0.5 punts)

El 35% dels estudiants involucrats a la prova són 70
P(A>70) = P(Z>(70-60)/6.48) = P(Z>1.54) = 1 – P(Z<=1.54) = 1 – 0.9382 = **0.0618** (1 punt)

7. Amb una seguretat del 98%, quin es el nombre garantit d'estudiants que utilitzaran la plataforma? (1 punt)

P(A > ?) = 0.98 = P(Z > (?-60)/6.48)

El valor és a l'esquerra del valor esperat, o el valor estandarditzat corresponent és negatiu, llavors prendrem el valor simètric, que és el que deixa per sota un 98% de la probabilitat.

Z = 2.05 és el percentil estandarditzat del 97.98% (Z=2.06 és del 98.03%). Agafarem aquests valors amb signe negatiu.

(?-60)/6.48 = -2.05 → ? = -2.05*6.48 + 60 = 46.71 → **el nombre és 46 estudiants** (seguretat: 98.46%)

(o bé (?-60)/6.48 = -2.06 → ? = -2.06*6.48 + 60 → ? = 46.65 → també 46)

La resposta 47 no donaria seguretat > 98%: 97.75%