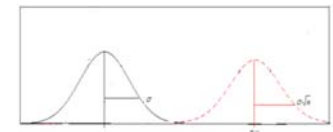
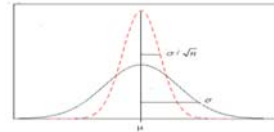


Propietats de les mostres i Interval de Confiança

TCL: X_1, \dots, X_n i.i.d. ($n \rightarrow \infty$), amb $E(X_i) = \mu$ i $V(X_i) = \sigma^2$, llavors $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}_n \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ (també $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, \sigma^2 n)$)



Estadístic mitjana mostral (\bar{X}): $\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\sigma^2/n}} \approx N(0,1)$ $\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{s^2/n}} \approx t_{n-1}$ on $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$

Estadístic variància mostral (s^2): $S^2 \frac{n-1}{\sigma^2} \approx \chi_{n-1}^2$ on $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n}}{n-1}$

Paràmetre	Estadístic	Premisses	Distribució	Interval de Confiança 100(1- α)%
μ	$Z = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\sigma^2/n}}$	[$X \sim N$ o $n \geq \approx 30$] i σ coneguda	$Z \sim N(0,1)$	$\mu \in (\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}})$
μ	$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2/n}}$	$X \sim N$	$T \sim t_{n-1}$	$\mu \in (\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2}{n}})$
μ	$Z = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2/n}}$	$n \geq \approx 100$	$Z \sim N(0,1)$	$\mu \in (\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2}{n}})$
σ (normal)	$X^2 = \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$	$X \sim N$	$X^2 \sim \chi_{n-1}^2$	$\sigma^2 \in \left(\frac{S^2(n-1)}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}, \frac{S^2(n-1)}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \right)$
π (Binomial)	$Z = \frac{(P - \pi)}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$	(1- π) $n \geq \approx 5$ $\pi n \geq \approx 5$	$Z \sim N(0,1)$	$\pi \in (P \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}})$ $\hat{\pi} = P$ o $\hat{\pi} = 0.5$

Proves d'Hipòtesis

Paràmetre	Hipòtesi nul·la	Estadístic	Premisses	Distribució sota H_0	Criteri Decisió (Risc α)
μ	$H_0 : \mu = \mu_0$	$Z = \frac{(\bar{Y} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2/n}}$	$Y \sim N$ o $n \geq 30$ i σ coneguda	$Z \sim N(0,1)$	Rebutjar H_0 si $ Z > z_{1-\alpha/2}$
μ	$H_0 : \mu = \mu_0$	$T = \frac{(\bar{Y} - \mu_0)}{\sqrt{S^2/n}}$	$Y \sim N$	$T \sim t_{n-1}$	Rebutjar H_0 si $ T > t_{n-1, 1-\alpha/2}$
μ	$H_0 : \mu = \mu_0$	$Z = \frac{(\bar{Y} - \mu_0)}{\sqrt{S^2/n}}$	$n \geq 100$	$Z \sim N(0,1)$	Rebutjar H_0 si $ Z > z_{1-\alpha/2}$
π (Binomial)	$H_0 : \pi = \pi_0$	$Z = \frac{(P - \pi_0)}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$	$(1-\pi_0) n \geq 5$ $\pi_0 n \geq 5$	$Z \sim N(0,1)$	Rebutjar H_0 si $ Z > z_{1-\alpha/2}$
σ (normal)	$H_0 : \sigma = \sigma_0$	$X^2 = \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$	$Y \sim N$	$X^2 \sim \chi^2_{n-1}$	Rebutjar H_0 si $X^2 < \chi^2_{n-1, \alpha/2}$ o $X^2 > \chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}$
En les proves unilaterals s'acumula el risc a un sol costat				$H_0: \mu \leq \mu_0 \rightarrow$ Rebutjar H_0 si $Z > z_{1-\alpha}$ $H_0: \mu \geq \mu_0 \rightarrow$ Rebutjar H_0 si $Z < -z_{1-\alpha}$	

Proves de μ i σ en 2 mostres

Paràmetres	Hipòtesi nul·la	Estadístic	Premisses	Distrib. sota H_0	Decisió (Risc α)
μ	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$Z = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$	$[Y_1, Y_2 \sim N \text{ o } n_1, n_2 \geq \approx 30]$ m.a.s. indep. i σ_1, σ_2 conegudes	$Z \sim N(0,1)$	Rebutjar H_0 si $ Z > z_{1-\alpha/2}$
μ	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$T = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{S\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$ $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$Y_1, Y_2 \sim N$ $\sigma_1 = \sigma_2$ desconegudes m.a.s indep.	$T \sim t_{n_1+n_2-2}$	Rebutjar H_0 si $ T > t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha/2}$
μ	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$Z = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$	$n_1, n_2 \geq \approx 100$ m.a.s indep.	$Z \sim N(0,1)$	Rebutjar H_0 si $ Z > z_{1-\alpha/2}$
μ	$H_0 : \mu_D = \mu_0$ ($\mu_D = \mu_1 - \mu_2$)	$T = \frac{\bar{D} - \mu_0}{S_D/\sqrt{n}}$	$D \sim N$ m.a. aparellada	$T \sim t_{n-1}$	Rebutjar H_0 si $ T > t_{n-1, 1-\alpha/2}$
σ	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$F = S_A^2 / S_B^2$ Sent $S_A^2 > S_B^2$	$Y_1, Y_2 \sim N$ m.a.s. indep.	$F \sim F_{n_A-1, n_B-1}$	Rebutjar si $F > F_{n_A-1, n_B-1, 1-\alpha/2}$
Les corresponents proves unilaterals es fan acumulant el risc α a un costat					

Proves de π en 2 mostres

Proves de Comparació de 2 Paràmetres més usuals				
Hipòtesis	Estadístic	Premisses	Distrib.(H ₀)	Decisió (risc α)
$H_0: \pi_1 = \pi_2 = \pi$ $H_1: \pi_1 \neq \pi_2$	$Z = \frac{(P_1 - P_2)}{\sqrt{P(1-P)/n_1 + P(1-P)/n_2}}$ $P = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}$	$e_{ij} \geq 5 \forall i,j$ m.a.s indep.	$Z \sim N(0,1)$	Rebutjar * H ₀ si $ Z > z_{1-\alpha/2}$
	$X^2 = \sum_{\forall ij} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$		$X^2 \sim \chi^2_1$	Rebutjar si $X^2 > \chi^2_{1, 1-\alpha}$
$H_0: \pi(A_j \cap B_i) = \pi(A_j) \pi(B_i)$ $H_1: \exists i,j \text{ t.q. } \pi(A_j \cap B_i) \neq \pi(A_j) \pi(B_i)$ $i=1\dots I, j=1\dots J$	$X^2 = \sum_{\forall ij} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$	$e_{ij} \geq 5 \forall i,j$ m.a.s indep.	$X^2 \sim \chi^2_{(I-1)(J-1)}$	Rebutjar si $X^2 > \chi^2_{(I-1)(J-1), 1-\alpha}$
* La corresponent prova unilateral es fa acumulant el risc α a un costat.				

Model lineal

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n(\bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n}}{n-1}$$

$$S_{XY} = \frac{\sum_i x_i Y_i - \frac{\sum_i x_i \sum_i Y_i}{n}}{n-1}$$

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}) / n - 1}{S_X S_Y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

$$b_1 = \frac{S_{XY}}{S_X^2} = r_{XY} \frac{S_Y}{S_X}$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_i e_i^2}{n-2} = \frac{(n-1) S_Y^2 (1 - r_{XY}^2)}{n-2} = \frac{(n-1) (S_Y^2 - b_1 S_{XY})}{n-2}$$

Estimació i inferència dels paràmetres model lineal

Paràmetre	β_0	β_1	σ^2
Estimador	$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{x}$	$b_1 = S_{XY} / S^2_X$	$S^2 = \sum e_i^2 / (n-2)$
Esperança	$E(b_0) = \beta_0$	$E(b_1) = \beta_1$	$E(S^2) = \sigma^2$
Variància	$S^2_{b_0} = S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)S^2_X} \right)$	$S^2_{b_1} = \frac{S^2}{(n-1)S^2_X}$	$V(S^2) = 2\sigma^4 / (n-2)$
Distribució	$(b_0 - \beta_0) / S_{b_0} \sim t_{n-2}$	$(b_1 - \beta_1) / S_{b_1} \sim t_{n-2}$	$(n-2)S^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-2}$
Interval de Confiança	$IC(\beta_0, 95\%) =$ $= b_0 \pm t_{n-2, 0.975} \cdot S_{b_0}$	$IC(\beta_1, 95\%) =$ $= b_1 \pm t_{n-2, 0.975} \cdot S_{b_1}$	$IC(\sigma^2, 95\%) =$ $(n-2)S^2 / \chi^2_{n-2, 0.975} \leq \sigma^2$ $\leq (n-2)S^2 / \chi^2_{n-2, 0.025}$
H_0	$\beta_0 = \beta'_0$	$\beta_1 = \beta'_1$	
Rebutjar H_0 si	$ (b_0 - \beta'_0) / S_{b_0} > t_{n-2, 0.975}$	$ (b_1 - \beta'_1) / S_{b_1} > t_{n-2, 0.975}$	
Previsions	Estimació puntual	Estimació per interval 95%	
	$Y_h = \hat{y}_h = b_0 + b_1 x_h$	Per al valor esperat	Per a valors individuals
		$\hat{y}_h \pm t_{n-2, 0.975} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_h - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$	$Y_h \pm t_{n-2, 0.975} S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_h - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$