# Càlcul de probabilitats

| | |
|---|---|
| Probabilitat (axiomes) | $0 \le P(A)$ $\quad P(\Omega)=1$ $\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ si A i B disjunts |
| Propietats | $P(\bar{A})=1-P(A)$ $\quad P(\phi)=0$ $\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ |
| Probabilitat condicionada i d'una intersecció | $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ si $P(B)>0$ $\quad P(A\cap B)=P(B\mid A)\cdot P(A)=P(A\mid B)\cdot P(B)$ |
| Fórmula de Bayes | $P(A\mid B)=\dfrac{P(B\mid A)\cdot P(A)}{P(B)}$ |
| Fórmula probabilitats totals ($A_1,A_2,\ldots,A_i\ldots,A_J$ és una partició del conjunt de resultats) | $P(B)=\sum_{j=1}^{J}P(B\mid A_j)\cdot P(A_j)$ $\quad P(A_i\mid B)=\dfrac{P(B\mid A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{J}P(B\mid A_j)\cdot P(A_j)}$ |
| Independència | $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$ $\quad P(B\mid A)=P(B)$ $\quad P(A\mid B)=P(A)$ |

# Indicadors numèrics de variables aleatòries

| | Definicions | Propietats |
|---|---|---|
| Esperança | $E(X)=\mu_X=\sum_{\forall k}kp_X(k)$ (V.A.D.)<br>$E(X)=\mu_X=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)dx$ (V.A.C.) | • $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$<br>• $E(a+b\cdot X)=a+b\cdot E(X)$ |
| Variància | $V(X)=\sigma_X^2=\sum_{\forall k}(k-E(X))^2\,p_X(k)$ (V.A.D.)<br>$V(X)=\sigma_X^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f_X(x)dx$ (V.A.C.) | • $V(X)=E\,[\,X-E(X)\,]^2=E(X^2)-(E(X))^2$<br>• $V(a+b\cdot X)=b^2\cdot V(X)$ |
| Covariància i correlació | $Cov(X,Y)=\sum_{\forall x}\sum_{\forall y}(x-E(X))(y-E(Y))\,p_{XY}(x,y)$ (V.A.D.)<br>$Cov(X,Y)=\int\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X)(y-E(Y)f_{X,Y}(x,y)dxdy$ (V.A.C.)<br>$\rho_{X,Y}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$ | • $Cov(X,Y)=E\,(X-E(X))\,(Y-E(Y))=E(XY)-E(X)E(Y)$<br>• $Cov(a\cdot X,b\cdot Y)=a\cdot b\cdot Cov(X,Y)$<br>• $Cov(X,X)=V(X)$<br>• $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)+Cov(X,Y)$<br>• $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$ (si $X$ i $Y$ són independents)<br>• $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\cdot Cov(X,Y)$<br>• $V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2\cdot Cov(X,Y)$<br>• $V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$ (si $X$ i $Y$ són independents) |

# Distribucions de variables discretes i contínues

| Distribució | Declaració | Funció de probabilitat o de densitat | Funció distribució $F_X(k) = \sum_{i<=k} P_X(i)$ o $\int_{-\infty}^{k} f_X(x)dx$ | Esperança $\mathrm{E}(X)$ | Variància $\mathrm{V}(X)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Bernoulli | X~Bern(*p*) | $P_X(k) = \begin{cases} q & k=0 \\ p & k=1 \end{cases}$ | $F_X(k) = \sum_{i<=k} P_X(i)$ | $p$ | $p \cdot q$ |
| Binomial<br>`R:*binom(k,n,p)` | X~B(*n*,*p*) | $P_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad k = 0,1,\ldots,n$ | $F_X(k) = \sum_{i<=k} P_X(i)$ | $p \cdot n$ | $p \cdot q \cdot n$ |
| Poisson<br>`R:*pois(k,λ)` | X~P(*λ*) | $P_X(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0,1,2,\ldots$ | $F_X(k) = \sum_{i<=k} P_X(i)$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| Geomètrica §<br>`R: *geom(k,p)` | X~Geom(*p*) | $P_X(k) = p \cdot q^{k-1}, k = 1,2,\ldots$<br>`(en R dgeom(k-1))` | $F_X(k) = 1 - q^k$<br>`(en R pgeom(k-1))` | $1/p$<br>E(X2)=*q*/*p* | $q/p^2$ |
| Binomial Negativa § | X~BN(*r*, *p*) | $P_X(k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{k-r}, \; k \geq r$ | $F_X(k) = \sum_{i<=k} P_X(i)$ | $r/p$ | $q\, r/p^2$ |
| Exponencial<br>`R:*exp(x,λ)` | X~Exp(*λ*) | $f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad x > 0$ | $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ |
| Uniforme<br>`R:*unif(k,a,b)` | X~U(*a*,*b*) | $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b$ | $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ | $\frac{(a+b)}{2}$ | $(b-a)^2/12$ |
| Normal<br>`R:*norm(k,μ,σ)` | X~N(*μ*,*σ*) | $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ | $F_X(x) = ?$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |

`* = d, p, q, r`; $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; n, r enter > 0; a, b, μ real; λ, σ real > 0; "~" segueix exactament; "≈" aproxima

§ Pel model Geomètric i BN, R implementa com a "nombre de fracassos fins al r-èssim èxit" enlloc del nombre d'intents: per tant k intents correspon a k-r fracassos

Siguin $X1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ $X2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ *a*, *b* escalars llavors $X = aX1 + bX2 \sim N(\mu_X = a\mu_1 + b\mu_2 \,,\; \sigma_X = \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2 \cdot ab \cdot \rho_{X1X2} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2})$

*TCL:* $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. amb $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ i $\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ llavors quan n és gran $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}_n \approx N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ (variància $\sigma^2/n$, desviació $\sigma/\sqrt{n}$) ( i també $\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ ) (variància $\sigma^2 n$ , desviació $\sigma\sqrt{n}$ )