PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 1 (entrega: 30 de setembre)

TEORIA: Espai Mostral, Esdeveniments, freqüència relativa, regles de càlcul de probabilitat, probabilitat de la unió d'esdeveniments

Exercici 1.–Descriu l'espai de probabilitat associat als experiments aleatoris següents:

i) Tirada d'un dau no trucat i observar el número de la cara obtinguda.

ii) Tirada de dos daus i observar els números de les cares obtingudes.

iii) Tirem 2 monedes (no trucades) i observem el número de cares obtingudes.

iv) Igual que a iii), però amb dues monedes trucades: la probabilitat de cara és el doble que la probabilitat de creu.

v) El 60% dels alumnes d'una classe són noies. Triem tres alumnes a l'atzar i observem el número de noies.

Exercici 2.–Tireu 25 vegades una moneda i observeu el número de cares obtingudes. Feu el mateix 10.000 vegades (ajudeu-vos amb ordinador).

Exercici 3.–Una caixa té 3 boles blanques i 2 de negres. Fem 500 extraccions amb restitució. Aproximadament, quantes boles blanques obtindrem? Quina serà la proporció aproximada de boles blanques. Feu aquest experiment utilitzant l'ordinador.

Exercici 4.–En una ciutat es publiquen tres diaris A, B i C. El 50% de la gent està subscrita a A, el 40% a B i el 30% a C. El 20% està subscrita a A i B, el 10% a A i C , el 20% a B i C i el 5% a A, B i C. Calculeu: i) Percentatge de gent que està subscrita al menys a un diari, ii) percentatge de gent que no està subscrita a cap diari i iii) percentatge de gent que està subscrita exactament a un diari.

Exercici 5.–A l'entrada del restaurant un cambrer recull els barrets de 4 clients. A la sortida, el cambrer reparteix a l'atzar els 4 barrets entre els 4 clients. Calculeu la probabilitat que com a mínim un client hagi rebut el seu barret.

Exercici 6.–

a) Descriu un espai mostral per a l'experiment següent: Es llencen dos daus i s'anota la diferència entre el primer i el segon.

b) Descriu l'espai de probabilitats de l'exemple anterior.

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 2 (entrega: 7 d'octubre)

TEORIA: Regla de la suma, regla del producte, independencia, probabilitat condicionada, teorema de Bayes, t. de la probabilitat total

Exercici 1.–En un trajecte de metro utilitzem tres escales mecàniques, A, B i C. L'escala A està avariada aproximadament un de cada 10 dies, l'escala B ho està un de cada set dies i la C, ho està un de cada 15 dies, però les tres escales s'avarien independentment unes de les altres. En un viatge concret, calculeu la probabilitat i) que com a mínim hi hagi una escala avariada, ii) que no n'hi hagi cap d'avariada, iii) que n' hi hagi exactament una d'avariada.

Exercici 2.–Utilitzeu l'ordinador per calcular (aproximadament) les probabilitats associades a l'experiment aleatori d'observar el número d'escales avariades en un trajecte dels considerats en l'exercici anterior.

Exercici 3.–Tenim quatre fitxes marcades amb les lletres A, B, C, ABC. En triem una a l'atzar. Estudieu si els esdeveniments associats a la presència de les lletres A, B i C són o no independents.

Exercici 4.–Traiem una bola de cada una de les caixes següents:

$$\text{(A) } \boxed{1\ 2\ 3} \text{ i (B) } \boxed{1\ 2\ 3\ 4}$$

Trobeu les probabilitats: i) que el número de la caixa A sigui més gran que el de la caixa B; ii) que els dos números siguin iguals i iii) que el número de A sigui més petit que el de B.

Exercici 5.–Suposem tres caixes amb la següent composició de boles blanques (B) i negres(N). Caixa 1: $\boxed{\text{B N N}}$, Caixa 2: $\boxed{\text{B B N}}$, Caixa 3: $\boxed{\text{B N}}$. Tirem dues monedes i segons obtinguem 0, 1, o 2 cares escollim una bola de la caixa 1, 2 o 3, respectivament. Si la bola escollida es blanca, quina és la probabilitat de que provingui de la caixa 1?.

Exercici 6.–La pesca d'una barca supera les 10 Tm amb un 20% de probabilitat en dies calurosos i en un 30% dels casos en dies freds. Si el mes d'octubre la probabilitat de dia fred és del 40%, quina és la probabilitat que la pesca en dia d'octubre sigui superior a 10 Tm?

Exercici 7.–En un grup de 12 alumnes n'hi ha 4 que no saben probabilitat. Se'n trien tres a l'atzar. Quina és la probabilitat que tots els triats sàpiguen probabilitats?

Exercici 8.–Tenim una urna amb 8 boles numerades amb $1, 2, 13, 24, 123, 124, 314, 54$. En extreure una bola, considerem els esdeveniments $\{i\} \equiv$"apareix la xifra i".

a) Demostreu que $\{1\}$ i $\{2\}$ són esdeveniments independents.

b) Són $\{1\}$ i $\{3\}$ independents?

c) Són $\{1\}$, $\{2\}$ i $\{4\}$ independents?

d) Es pot concloure si $\{1\}$, $\{2\}$ i $\{3\}$ són independents?

Exercici 9.–Demostreu que

a) $P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B)$

b) $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

Exercici 10.–Llenço un dau amb cares 1, 1, 2, 3, 3, 3 i després llenço una moneda tantes vegades com indica la cara del dau obtinguda. El premi és igual al número de cares que obtingui. Calculeu el preu just del joc.

Exercici 11.–Llencem una moneda 50 vegades. La probabilitat de cara és 2/3. Calculeu el preu just del joc si es guanya una pesseta per cara i se'n perden 2 per cada creu.

Exercici 12.–La construcció d'un edifici té tres fases cadascuna de les quals s'ha d'acabar en un temps d'un mes. La probabilitat que la constructora pugui acabar la primera fase a temps és del 70%. Si la primera s'acaba a temps, la segona es podrà fer en un mes amb probabilitat 0.8, i suposant que les dues primeres s'acabin dintre del termini previst, la tercera es podrà fer en el temps previst amb una probabilitat del 90%. Quina és la probabilitat que la obra s'acabi en tres mesos?

Exercici 13.–El 5% de gent d'un colectiu han viatjat a l'Àsia, el 15% han i la resta no han sortit d'Europa. La probabilitat de contraure la malària en un viatje a l'Àsia és del 20%. En un viatje a Amèrica és del 5%, mentre que Europa aquesta probabilitat és del 2%. Si una persona d'aquest colectiu ha contret la malaltia, quina és la probabilitat que hagi sigut a l'Àsia?

Qüestions de resposta tancada de cursos anteriors

Segueixen unes quantes qüestions amb resposta tancada corresponents a exàmens parcials o finals de cursos anteriors. Cada qüestió té una i una sola resposta correcta.

1.– Tirem una moneda 6 vegades. Considerem les següents seqüències:

```
Seq\"u\‘encia 1:  C + + C + C
Seq\"u\‘encia 2:  + + + + + +          ("C" = cara, "+" = creu)
```

a) les dues seqüències tenen la mateixa probabilitat
b) la probabilitat de la seqüència 2 és més petita que la de la seqüència 1
c) cap de les altres dues

2.– Tirem dos daus (no trucats), la probabilitat que els dos daus presentin números diferents és
a) 5 sobre 6: $\binom{5}{6}$ **b)** 1 sobre 6: $\binom{1}{6}$ **c)** cap de les altres dues

3.– En un trajecte del metro utilitzem tres escales mecàniques, A, B i C. L'escala A està avariada 1 de cada 10 dies, la B 2 de cada 10 dies, i la C 3 de cada 10 dies. Les escales s'avarien de forma independent. La probabilitat que en un trajecte concret no n'hi hagi cap d'avariada és
a) $\frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{10}$ **b)** $\frac{1}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ **c)** $1 - \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{10}$

4.– Tirem un dau i una moneda. Guanyem si la moneda surt creu o bé la cara del dau és més petit o igual que 2 (o quan passen ambdues coses a la vegada). La probabilitat de guanyar és:
a) $1/2 + 2/6 = 5/6$ **b)** $(1/2) \times (2/8)$ **c)** cap de les altres dues.

5.– Traiem un número d'una caixa. Hi ha una probabilitat del 20% que el número sigui més petit que 10, i una probabilitat del 10% que sigui més gran que 50. La probabilitat que el número estigui comprès entre 10 i 50 (ambdós inclosos) és
a) del 70% **b)** del 40% **c)** no es pot calcular

6.– El percentatge de families de dos fills que tenen els dos fills del mateix sexe és, aproximadament,
a) el 50% **b)** el 25% **c)** aproximadament el 10%
Nota: aproximeu a 0.5 la probabilitat que un naixement sigui nena, i suposeu independència del caràcter sexe en diferents naixements.

7.– En una caixa tenim 6 boles blanques i negres numerades de la següent manera:
Blanca(1) Blanca(1) Blanca(0) Negra(1) Negra(1) Negra(0).
Considerem els esdeveniments següents: A = ”bola mostra número 1” i B =”bola blanca”.
a) A i B són dos esdeveniments independents,
b) B és més probable que A,
c) cap de les altres dues.

8.– si P(A) = 0.4 i P(B) = 0.7, A i B poden ser
a) disjunts **b)** un complementari de l' altre **c)** cap de les altres dues

9.– Suposem que A i B són independents, A i C són independents, i B i C són independents, aleshores es compleix, sempre, que
a) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ **b)** $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ **c)** cap de les altres dues

10.– $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ és igual a
a) $1 - P(A) - P(B)$ **b)** $1 - P(A \cap B)$ **c)** cap de les altres dues

11.– Si $A \subset B$ i P(B) < 1, aleshores $P(A \mid B)$
a) $> P(A)$ **b)** $= P(A)$ **c)** $< P(A)$

12.– Si A i B són independents, aleshores
a) $P(A \mid B) = P(A)P(B)$ **b)** $P(A \mid B) = P(A)$ **c)** cap de les altres dues

13.– Hi ha tres urnes: Urna 1:$\boxed{2\ 2\ 3\ 3\ 3}$, Urna 2:$\boxed{\mathrm{B\ B\ B\ N\ N}}$, i URna 3:$\boxed{\mathrm{B\ B\ N\ N\ N}}$. S'extreu una bola de la primera i segons el número obtingut, s'en treu una de la urna 2 o de la 3. Denotem amb U_i l'esdeveniment "la segona bola ha sortit de la urna i". La probabilitat de A="La segona bola és blanca" és igual a:
a) $P(A) = P(A \mid U_2) + P(A \mid U_3)$
b) $P(A) = P(A \cap U_2) + P(A \cap U_3)$
c) Cap de les dues anteriors.

14.–Si barrejem les tres urnes de les preguntes anteriors en una sola urna i n'extreiem una bola, els esdeveniments $A \equiv$"surt un número" i $B \equiv$"surt bola blanca"
a) són independents però no disjuntes
b) són disjuntes però no independents
c) són independents i disjuntes.

15.–Repartim a l'atzar els seus exàmens corregits a un grup de 10 alumnes. La probabilitat que a tothom li toqui el seu examen és de
a) $1/10!$ **b)** $\binom{10}{1}$ **c)** $9/10!$

16.–Donats tres esdeveniments A, B, C sabem que són independents dos a dos, i sabem també que $P(A|B \cap C) = P(A)$.
a) Podem assegurar que són mútuament independents.
b) No n'hi ha prou, per assegurar-ho necessitem saber també que $P(B|A \cap C) = P(B)$.
c) Cap de les dues anteriors.

17.–Llencem tres monedes. La probabilitat d'obtenir dos resultats iguals i un de diferent és:
a) La contrària d'obtenir-ne tres d'iguals. **b)** 3/8. **c)** $2/8 = 1/4$.

18.–El nombre d'elements de l'àlgebra d'esdeveniments d'un espai de probabilitat és sempre
a) finit **b)** infinit **c)** més gran o igual que dos.

19.–Llencem dos daus i sumem els valors de les cares. La probabilitat que la suma sigui tres és
a) 1/36 **b)** 2/36 **c)** 3/36

20.–Extreiem una bola de cadascuna de les següents urnes: $U_1 : \boxed{1\ 2\ 3}$ $U_2 : \boxed{1\ 2\ 3}$ La probabilitat que les dues boles siguin iguals és
a) 1/2 **b)** 1/3 **c)** 1/9

21.–Calcula el numero d'asos que obtindrem en promig si treiem 25 cartes amb restitució d'una baralla de pòker (52 cartes repartides en quatre pals).
a) 100/52 **b)** $52 \cdot 50 \cdot 49 \ldots \cdot 25$ **c)** Cap de les altres dues.

22.–Si A i B són dos esdeveniments independents, quina de les següents és falsa? (B^c indica complementari)
a) $P(A|B) = P(A)$ **b)** $P(A|B) = P(B|A)$ **c)** $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$

23.–Si A, B són esdeveniments tals que $P(B) > P(A \cap B)$, podem assegurar
a) $P(A \cup B) = P(A)$ **b)** $P(A \cup B) < P(A)$ **c)**$P(A \cup B) > P(A)$

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 3 (entrega: 14 d'octubre)

TEORIA: variables aleatòries, esperança, variància, desviació estàndard

Exercici 1.–Un joc consisteix en fer 100 extraccions amb restitució d'una de les urnes següents: Composició Urna A: 1, 2. Composició Urna B: 0, 1, 2, 4. Es guanya en pesetes la quantitat obtiguda multiplicada per mil. Quina urna prefereixes?. Quan esperes guanyar amb una jugada?. Fes tres jugades amb l'ordinador.

Exercici 2.–En el cas de les dues opcions següents: (a) tirem un dau 60 vegades, cada vegada que surti un as o un sis guanyeu 5 ptes, en cas contrari no guanyeu res. (b) extraiem 100 vegades amb restitució una papereta de la caixa següent:

$$\boxed{5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}.$$

En cada extracció guanyeu en pessetes el número de la papereta obtinguda. Quina opció és la millor? Raoneu la resposta. Jusfiqueu-ho de forma analítica i utilitzant el métode de Monte Carlo.

Exercici 3.–Trobeu la distribució de probabilitat de les següents variables aleatories:

a) X = Nombre de creus que s'observen en la tirada de 3 monedes

b) Y = Nombre d'asos que s'obtenen en la tirada de 3 daus

c) Z = Nombre d'assignatures aprovades d'un grup de 5 (cada assignatura té una probabilitat d'aprovar de .8. Suposeu independència entre assignatures)

Feu una representació gràfica de diagrama de barres de les distribucions de probabilitat obtingudes. Trobeu també l'esperança, variància i desviació estàndard de les variables X, Y i Z.

Exercici 4.–Un joc consisteix en tirar un dau i obtenir en pessetes el número de la cara del dau mutiplicat per 10. Si per participar en una jugada cal pagar 40 pessetes, calculeu: (a) guany esperat i variància en una jugada; (b) guany esperat i variància en 5 jugades.

Exercici 5.–Tirem tres monedes trucades i observem la variable aleatòria X = "nombre de cares obtingudes". Si les monedes (A, B i C) estan trucades de manera que les probabilitats de cara de A, B i C són, respectivament, .1, .3 i .5, calculeu la distribució de probabilitat de la variable aleatòria X. Feu un exercici de Monte Carlo (amb 1000 rèpliques) per comprovar que la distribució de probabilitat obtinguda és encertada. Trobeu també la mitjana aritmètica i la variància de les 1000 rèpliques de la variable X. Comproveu que la mitjana aritmètica i la variància de les 1000 rèpliques s'apropa a l'esperança i variància, respectivament, de la variable aleatòria X.

Exercici 6.–Establim un joc en el que es tira una moneda fins que surt cara i el jugador obté en pessetes 100 multiplicat pel número de vegades que cal tirar la moneda. Quin és el guany esperat en aquest joc?. Si el Casino vol guanyar 20 pessetes per cada jugada, quin és el preu del tiquet en aquest joc?. (*Ajuda*: Per comprovar que $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n = 2$, pots partir de

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n/2^n = 1/2 + \sum_{n=2}^{\infty} n/2^n = 1/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)/2^{n+1} = \dots)$$

Exercici 7.–Tirem un dau i una moneda. No guanyem res si la moneda mostra creu, mentres que si surt cara guanyem (en pessetes) 10 vegades el número de la cara del dau. Si el preu d' entrada en el joc és de 20 pessetes, calculeu el valor esperat i desviació estàndard del guany en una jugada.

Exercici 8.–Un casino estableix un joc en el que es tira una moneda fins que surt cara i el jugador guanya (en pessetes) dos elevat al número de vegades que calgui tirar la moneda. Pots determinar el preu d'una entrada en aquest joc?. (Aquest problema es coneix com la Paradoxa de San Petersburg).

Exercici 9.–Es llença una moneda fins que surt cara. Quina és la probabilitat que calgui tirar com a mínim tres vegades?

Exercici 10.–Calculeu el valor de $E(X - EX)^2/SD(X)^2$

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 4 (entrega: 21 d'octubre)

TEORIA: Distribucions discretes, dependència/independència de v.a.

Exercici 1.–Un dau ha estat trucat de manera que la probabilitat de cada cara és proporcional al número de la cara. Obteniu la distribució de probabilitat, esperança i variància de la variable aleatòria corresponent. Feu una representació gràfica de la distribució de probabilitat corresponent. Trobeu la funció de distribució (acumulativa).

Utilitzeu el Minitab per simular 1000 tirades del dau. Calculeu la mitjana i variància d'aquestes 1000 observacions. Compareu aquests valors empírics amb els teòrics. (Nota: escriviu el resultat de la instrucció "Tally" de Minitab aplicat a la variable nombre de la cara del dau; concretament, doneu la distribució de frequències acumulades)

Exercici 2.–Sigui X la variable aleatòria que representa el nombre de nens en una família de 4 fills. Expliqueu el significat de:

a) la variable $Y = 4 - X$

b) la variable $W = Y - X$.

Hi ha independència entre les variables Y i X?. Raoneu la resposta.

c) Si en un naixement la probabilitat de nen és .51, trobeu la distribució de probabilitat de X, Y i W. Trobeu també l'esperança i variància de X, Y i W.

Exercici 3.–Es llença una moneda trucada, amb $P("C") = 1/3$. Si surt cara, es llença un dau normal, si surt creu, es llença un dau amb cares 2, 4, 6, 8, 10, 12. Sigui X el número del dau obtingut. Calculeu EX.

Exercici 4.–En una corba del quilòmetre 22 de la Nacional C-xxxx es produeixen accidents a una mitjana de 1.3 per setmana. Calculeu la probabilitat que en una setmana determinada hi hagi com a mínim 3 accidents. Idem que no n'hi hagi cap. Idem que n'hi hagi entre 1 i 4.

Exercici 5.–En relació al problema anterior, feu servir el Minitab per simular els accidents que hi ha hagut al llarg de 100 setmanes. Calculeu la mitjana aritmètica i la variància d'aquestes 100 observacions. Compareu aquests valors empírics (mitjana i variància de les 100 observacions) amb els valors teòrics corresponents. (Nota: escribiu el resultat de la instrucció "Tally" de Minitab aplicat a la variable nombre d'accidents; concretament, doneu la distribució de frequències absolutes)

Exercici 6.–En una illa del Carib cada any hi ha com a mínim un, però mai més de 3, huracans. La probabilitat de x huracans és inversament proporcional a x. Trobeu la distribució de probabilitat de la variable nombre d'huracans, X, així com la seva esperança i variància. Feu un diagrama de barres que representi la distribució de probabilitat de X. Idem per la funció de distribució acumulativa. Simuleu amb el Minitab el nombre d'huracans al llarg de 30 anys; calculeu la mitjana i variància dels 30 valors simulats i compareu-los amb la mitjana i variància teòriques.

Exercici 7.–Utilitzant la funció generatriu de moments, trobeu el moment de tercer ordre d'una distribució binomial de paràmetres n i p.

Exercici 8.–Calculeu la f.g.m. d'una variable geomètrica de paràmetre 1/2

Exercici 9.–Es llença una moneda (amb probabilitat p de treure cara) fins s'obté el mateix resultat dues vegades seguides. Quina és la probabilitat qu e calgui tirar 6 vegades?

Exercici 10.–En una distribució geomètrica de paràmetre 1/6 calculeu $P[X \geq 3]$

Exercici 11.–Quina és la distribució del nombre d'estudiants que fumen en un grup de 200?

Exercici 12.–Si $X \sim B(n,p)$, calculeu $E(X - EX)$.

Exercici 13.–Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, demostreu que $EX = \lambda$ sense fer servir la funció generatriu de moments.

Exercici 14.–Si $X \sim B(n,p)$, quina és la distribució de $n - X$?

Exercici 15.–Si X segueix una distribució de Poisson de paràmetre λ, quin és valor modal (el de probabilitat màxima) de X. (*Si $f(x)$ és la funció de massa de probabilitat, calcula $f(x+1)/f(x)$ i dedueix d'això el que et demanen*).

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 5 (entrega: 28 d'octubre)

TEORIA: Distribucions bivariants discretes

Exercici 1.–Amb l'objectiu de fer diners de viatge de curs, uns estudiants del curs de Probabilitat han montat el joc següent. Es juga per parelles, jugadors 1 i 2 . Es decideix a cara i creu jugar amb la urna 1 (U1) o amb la urna 2 (U2). Una vegada escollida la urna, els jugadors extreuen, un després de l'altra, una bola de la urna (extracció sense reposició). Els jugadors cobren de o pagen als organitzadors del joc (depen del signe, + o -) en duros el número que mostra la bola obtinguda. Sigui X el guany (o perdua) del jugador 1, i Y el guany o perdua del jugador 2. La composició de les urnes és la següent: $U1 : -100 \quad +100 \quad 0\,; U2 : -10000 \quad 0 \quad 10000$. Es demana:

1. Guany esperat del estudiants (casino) en cada jugador. Guany esperat del casino en el conjunt dels dos jugadors. Calculeu també la variància de X i Y.
2. Distribució de probabilitat conjunta de X i Y. Distribucions marginals.
3. Distribució de Y condicionada a que $X = 0$.
4. Esperança $E(Y \mid X = 0)$.
5. Funció (corba) de regressió $E(Y \mid X)$
6. Covariància i coeficient de correlació entre X i Y.
7. Esperança i Variància de les variables $Z = X + Y$, $T = X - Y$.
8. Resoldre de nou els apartats anteriors considerant el cas ara en que les extraccions de la urna és fan amb reposició (és a dir, el jugador 1 retorna la bola a la urna abans de l'extracció del jugador 2).

Exercici 2.–Construeix una distribució discreta (la que vulguis)

X	1	2	3	...	n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

tal que tingui coeficient d'assimetria positiu. Idem que tingui coeficient d'assimetria negatiu. En ambdós casos, calcula també el coeficient d'apuntament. Genera amb `Minitab` 1000 valors de cada una d'aquestes distribucions. Fes un histograma dels valors obtinguts.

Exercici 3.–Calculeu $P[2 < X \leq 4, 3 < Y \leq 6]$ en funció de $F_{X,Y}$.

Exercici 4.–Llencem un dau vermell i un verd. Sigui X el nombre del dau vermell, Y el nombre més petit de tots dos i Z la suma del dos daus.

a) Calculeu la distribució de probabilitat conjunta de X i Y.

b) Calculeu les distribucions marginals de X i de Y.

c) Calculeu les distribucions condiciondes de X donat Y.

d) Trobeu EZ.

Exercici 5.– Un examen consta de 25 preguntes tipus test, cada una amb tres respostes possibles, una de les quals és la correcta. La puntuació s'efectua de la forma següent: $+1$ si la resposta és correcta, -0.5 si la resposta és incorrecta. Considereu un estudiant que coneix amb certesa la resposta correcta de k preguntes, i respon a l'atzar les $25 - k$ restants. Sigui X la variable corresponent a la puntuació final del test. Calculeu el valor esperat de X i la seva variància, en funció de k.

Qüestions de resposta tancada de cursos anteriors

Segueixen unes quantes qüestions amb resposta tancada corresponents a exàmens parcials o finals de cursos anteriors. Cada qüestió té una i una sola resposta correcta.

24.– Considereu les instruccions de MINITAB següents:

```
MTB>  RANDOM 100 C1;
 SUB>  BINOMIAL 10 0.4.
```

La mitjana aritmètica dels valors recollits a `C1` serà aproximadament igual a
a) 40 **b)** 4 **c)** cap de les altres dues

25.– Si sumem 4 variables de Bernouilli independents amb valor de p comú igual a 0.4, s'obté
a) una distribució de Poisson amb $\lambda = 0.16$
b) una distribució binomial amb paràmetres $n = 4$ i $p = 0.4$
c) cap de les altres dues

26.– Si $V(X)$ denota variància de X i EX denota l'esperança de X, aleshores
a) $V(X) = E(X^2 - EX)$ **b)** $V(X) = E(X - EX)^2$ **c)** cap de les altres dues.

27.– La variància $V(Y)$ de la variable $Y = -3X + 5$, on X és una variable aleatòria, és
a) $9V(X)$ **b)** $3V(X)$ **c)** $-3V(X) + 5$

28.– Si contesto a l'atzar les 25 preguntes d'aquest examen, el número de preguntes encertades seguirà una distribució
a) de Poisson de paràmetre $\lambda = 25 \times (1/3)$ **b)** uniforme de 0 a 25 **c)** cap de les altres dues.

29.– Un dau ha estat trucat de manera que la probabilitat de cara és proporcional al número de la cara del dau. Guanyem en pessetes el número de la cara del dau. El guany esperat és
a) $(1/21) \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)$ **b)** 3.5 **c)** cap de les altres dues

30.– La variància d'una variable aleatòria que sempre pren valors negatius serà
a) sempre més petita o igual que zero **b)** sempre més gran o igual que zero **c)** depèn de la mitjana de la variable

31.– Una distribució binomial de paràmetres n i $p = 0.5$
a) és sempre simètrica **b)** el coeficient d'assimetria varia amb n **c)** cap de les altres dues

32.– En una distribució de Poisson de paràmetre λ
a) L'esperança és igual a la desviació estàndar **b)** L'esperança és igual a la variància **c)** cap de les altres dues

33.– El nombre de vegades que cal tirar un dau fins que surti l'as segueix una distribució
a) de Poisson **b)** Binomial **c)** cap de les altres dues

34.– Una de les següents igualtats és incorrecta:
a) $\mathrm{Cov}(-X, -Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)$ **b)** $\mathrm{Cov}(-X, Y) = -\mathrm{Cov}(X, Y)$
c) $\mathrm{Cov}(2X, Y) = 2^2\mathrm{Cov}(X, Y)$

35.– Si $Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ aleshores,
a) $\mu_Y = \mu_X$ **b)** $\sigma_Y = \sigma_X$ **c)** $\sigma_Y = 1$

36.– Si X i Y són variables aleatòries amb ρ_{XY} igual a zero, podem assegurar que
a) X, Y són independents **b)** X, Y són incompatibles **c)** cap de les altres dues

37.– Si X, Y, Z són variables aleatòries, es verifica sempre que :
a) $Cov(XY, Z) = Cov(X, Z)Cov(Y, Z)$
b) $Cov\alpha X - Y, Z) = Cov(X, Z) - Cov(Y, Z)$
c) cap de les altres dues

38.– Considereu les instruccions de MINITAB següents:

```
MTB>  RANDOM 1000 C1-C5;
 SUB>  BERNOULLI 0.4.
MTB> let C6=C1 +C2 +C3 +C4 +C5
```

els valors de la variable `C6` corresponen a observacions independents d'una distribució **a)** de Poisson **b)** Geomètrica **c)** cap de les altres dues

39.– Considereu les instruccions de MINITAB següents:

```
MTB>  RANDOM 1000 C1-C5;
 SUB>  BERNOULLI 0.4.
MTB> let c6=C1 +C2 +C3 +C4 +C5
```

la mitjana aritmètica de la variable `C6` serà exactament igual a **a)** 2.000000000000 **b)** 0.4 **c)** cap de les altres dues

40.– Si X és una variable aleatòria amb $EX = 0$, aleshores
a) $V(X) = (EX)^2$ **b)** $V(X) = E(X - EX)^2$ **c)** cap de les altres dues.

41.– Considereu les instruccions de MINITAB següents:

```
MTB>  RANDOM 1000 C1-C5;
 SUB>  BERNOULLI 0.4.
MTB> let C6=C1 +C2 +C3 +C4 +C5
```

els valors de la variable `C6` corresponen a observacions independents d'una distribució **a)** Binomial de paràmetres $p = 0.4, n = 1000$. **b)** Geomètrica **c)** cap de les altres dues

42.– Si X i Y són variables aleatòries amb $E(XY) = E(X)E(Y)$ aleshores **a)** X, Y són incorrelacionades **b)** la variància del producte és igual al producte de variàncies. **c)** cap de les altres dues.

43.– Si X i Y són variables aleatories independents, aleshores sempre
a) $E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2)$
b) $E(XY) = EXEY$
c) les dues anteriors són certes.

44.–Tirem un dau que té 3 cincs i 3 sisos a les cares (sigui X el número que ens dóna), i un altre dau normal (sigui Y el número que ens dóna). Sigui $Z = X + Y$. Aleshores,
a) $EZ = 9$ **b)** $EZ = 9/2$ **c)** Cap de les anteriors.

45.–Marca la afirmació incorrecta, si X és una variable aleatòria i a és un nombre real,
a) $V(a + X) = V(a - X)$ **b)** $E(-aX) = -aE(X)$ **c)** $V(-aX) = -a^2V(X)$

46.–Es llença una moneda i es pren $X = 0$ si surt cara, $X = 1$ si surt creu. També es llença un dau i Y és el nombre de la cara que surt. Sigui Z la variable aleatòria producte de X amb Y.
a) El valor esperat de Z és $7/4$
b) No es pot calcular el valor esperat de Z ja que X i Y no són independents.
c) Cap de les altres dues.

47.–En una urna hi ha 10 boles blanques i 5 negres. L'experiment consisteix en extreure boles fins que surt blanca. Sigui X el nombre de boles extretes.
a) X segueix una distribució geomètrica de paràmetre $p = 10/15 = 2/3$.
b) X segueix una distribució geomètrica de paràmetre $p = 5/15 = 1/3$.
c) X no segueix una distribució geomètrica.

48.–Es llencen sis daus i es sumen els nombres de les cares. Sigui X la suma.
a) El valor esperat de la suma és 21.
b) No es pot calcular el valor esperat ja que hi ha independència.
c) Cap de les anteriors.

49.–D'una urna amb 10 boles blanques i 5 negres treiem 7 boles sense restitució. Sigui X el nombre de boles que són blanques.
a) X segueix una binomial de paràmetres $n = 7, p = 2/3$
b) X segueix una distribució de Bernoulli amb $p = 2/3$
c) Cap de les anteriors.

50.–Una variable aleatoria discreta pren els valors $\{0, 1, 2\}$ i la seva distribució de probabilitat ve donada per la funció de distribució (acumulada) $F(0) = 1/4, F(1) = 1/2, F(2) = 1$.
a) La funció generatriu de moments és $\psi(t) = 1/4 + t/2 + t^2$
b) La funció generatriu de moments és $\psi(t) = \frac{1}{4}[1 + e^t + 2e^{2t}]$
c) Cap de les dues anteriors és correcta.

51.–Quina de les següents és falsa en general?
a) $E(X+Y) = EX + EY$ **b)** $E(XY) = EX\,EY$ **c)** $V(X+a) = VX$

52.–Computa la probabilitat de no sentir la paraula “sexe” en una canço de rock que dura tres minuts, si suposem que aquesta paraula apareix a l’atzar un promig de quatre vegades cada tres minuts en les cançons de rock.
a) $\frac{4^{-3}e^{-4}}{3!}$ **b)** $\frac{3^{-4}e^{-3}}{4!}$ **c)** $\frac{4^{0}e^{-4}}{0!}$

53.–Sigui X una variable aleatòria amb desviació estàndar 2 i esperança 3. Calcula el seu moment de segon ordre EX^2.
a) 4 **b)** 13 **c)** Cap dels anteriors.

54.–Sigui X una variable aleatoria amb distribució de Poisson amb paràmetre 3 i Y binomial de paràmetres 4 i 1/2. $E(X+2Y)$ és igual a
a) 3.5 **b)** 7 **c)** Cap de les altres dues.

55.–Si X és una variable aleatoria que compleix sempre $X \leq 3$, es té
a) $VX \leq 9$ **b)** $EX \leq 3$ **c)** $EX < 3$

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 6 (entrega: 4 de novembre)

TEORIA: Llei de l'esperança iterada, distribucions condicionals, moments de distribucions

Exercici 1.–Un joc es juga en dues etapes, de la següent manera. Primer es tira un dau no trucat i s'anota el número X de la cara obtinguda. Després s'esculleix a l'atzar un número Y de la Urna X. La composició de boles en les sis urnes és tal que en cada urna hi ha un total de 10 boles, X de les quals estan marcades amb 1 i la resta estan marcades amb 0. Es demana

1. $EX, EY, V(X), V(Y)$
2. $E(3Y^2 + 1)$
3. σ_{XY}, ρ_{XY}
4. $E(Y \mid X)$ i $E(X \mid Y)$
5. CA i CAp de X i Y

Exercici 2.–El nombre d'avaries diàries en una sala de màquines segueix una distribució de Poisson de paràmetre 1.3. El temps en hores necessari per reparar una avaria segueix una geomètrica de paràmetre 1/3 (independentment de si hi ha o no altres avaries).

a) Quin és el temps promig de reparació d'una avaria?

b) Si tenim x avaries en un mateix dia, sigui T_x la variable que dona el temps total de reparació necessari. Quin és el valor esperat de T_x? Quina és la probabilitat que $T_x = x$?

c) Quina és la variància de T_x?

d) Quin és el temps diari esperat de reparacions a la sala de màquines?

e) Quina és la variància d'aquest temps?

(Nota: *Utilitza l'esperança iterada per respondre les dues darreres qüestions*)

Exercici 3.–En una illa del Carib cada any hi ha com a mínim un, però mai més de 3, huracans. La probabilitat de x huracans és inversament proporcional a x. En una companyia d'assegurances es presenta un client que va a passar una any en aquesta illa. El client sol.licita una asseguranóa de vida. La prima és de 10 milions de pessetes a entregar a la vídua en cas que el client es mori pels efectes d'un huracà. Suposant que la probabilitat de mort en un huracà és de .3, trobeu el preu d'aquesta prima d'assegurança.

Exercici 4.–Calcula, per una distribució geomètrica de paràmetre p, els coeficients d'assimetria i d'apuntament. Calcula també el coeficient de variació.

Exercici 5.–En una urna hi ha 3 boles blanques i 2 boles negres. Efectuem dues extraccions i prenem $X = 1$ si la primera és blanca, $X = 0$ si la primera és negra. Prenem Y igual però mirant la segona bola. Considera els dos casos: a) Les extraccions es fan sense restitució, b) es fan amb restitució, i en cada cas calcula:

i) La distribució de probabilitats conjunta i les marginals de X iY.
ii) Les esperances.
iii) La covariança i la correlació.

Exercici 6.–Si X_1, X_2 són dos binomials $(10, 1/2)$ independents, veriqueu que

$$P[X_1 + X_2 = 0)] \neq P[2X_1 = 0].$$

Exercici 7.–Es llença una moneda fins que surt cara. Sigui X el nombre de tirades. Després es llença una altra moneda X vegades y sigui Y el nombre de cares que en resulta. Calculeu EY i EY^2.

Exercici 8.–Un caminante llega a las puertas de una ciudad amurallada y pide permiso para entrar. El vigilante le informa de que no es tan fácil acceder a esa ciudad. Para conseguirlo habrá de lanzar 20 dados y sólo entrará si aparecen exactamente cinco dados con un cinco en su cara superior. Si el caminante no consigue los cinco cincos, tendrá que volver a intentarlo al día siguiente.

(a) ¿Cuál es el número esperado de días que el caminante tardará en lograr entrar en la ciudad?

(b) Un día llegan a la ciudad 100 caminantes, ¿cuántos esperas que logren entrar?

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 7 (entrega: 11 de novembre)

TEORIA: distribucions continues, funció de densitat de probabilitat, funció de distribució, quartils, percentils, moments

Exercici 1.–Una variable aleatòria X té la següent funció de densitat de probabilitat: $f(x) = (4/3)(1 - x^3)$ per $x \in [0,1]$, i $f(x) = 0$, per $x \notin [0,1]$. Comproveu que $f(x)$ és una funció de densitat i feu una representació gràfica de $f(x)$.

Trobeu:

1. $F(x)$
2. EX, VX
3. $P[0.2 < X < 0.5]$
4. Esperança i Variància de la variable $Y = -4X + 3$

Exercici 2.–Sigui X la variable aleatòria amb distribució uniforme a l'interval [-2, 5]. Trobeu:

1. $f(x)$ i $F(x)$
2. EX, VX
3. $P[-2 < X \leq 3]$
4. Mediana, Primer quartil, Percentil 85.
5. Esperança i Variància de la variable $Y = -X + 10$

Exercici 3.–Utilitzeu Minitab per simular 1000 observacions de la variable de l'exercici anterior. Calculeu la mitjana i Variància de les 1000 observacions .

Exercici 4.–Una variable aleatòria continua pren valors de 1 a 10 amb probabilitat inversament proporcional al valor de la variable. Trobeu:

1. $f(x)$ i $F(x)$
2. EX, VX
3. $P[2, 5]$
4. Mediana, Primer quartil, Percentil 85.

Exercici 5.–Considereu deu variables (`C1-C10`) independents cada una amb distribució uniforme a [0,1]. Estudieu la distribució de la variable Y = suma de les deu variables (`C1-C10`). Calculeu de forma exacta la esperança i Variància de la suma. Investigueu si la suma Y té distribució uniforme. Calculeu aproximadament la probabilitat que $Z = Y/10$ estigui entre 0.4 i 0.6. (Indicació: Feu 1000 observacions de la variable suma i observeu la forma de l'histograma i les proporcions corresponents).

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 8 (entrega: 18 de novembre)

TEORIA: distribucions contínues: uniforme, exponencial, normal

Exercici 1.–L'interval de temps X entre l'arribada de dos vehicles a una gasolinera segueix una distribució exponencial de mitjana 3 minuts. Trobeu:
a) les funcions de densitat i de distribució de la variable X.
b) A partir del moment de l'arribada d'un vehicle, probabilitat que com a mínim passin 5 minuts sense arribar-ne cap més.
c) Percentil 95 de la distribució. Comenteu el seu significat.
d) Si han passat 5 minuts després de l'arribada d' un vehicle, probabilitat que passin 3 minuts més sense arribar-ne cap.

Exercici 2.–El temps X que tarda a arribar un autobús (a partir del moment que arribo a la parada) segueix una distribució uniforme de 0 a 10 minuts. Determineu:
a) Valor esperat de X.
b) Probabilitat que tingui d'esperar-me més de 3 minuts.
c) Percentil 95 de la distribució. Expliqueu-ne el significat.
d) Si ja portem 5 minuts esperant, probabilitat que m'hagui d'esperar 3 minuts més. Compareu el resultat d'aquest apartat amb l'obtingut a l'apartat d) de l'exercici anterior.

Exercici 3.–La distribució de les notes d'un examen test és, aproximadament, normal amb valor esperat 5.85 i desviació típica 1.72. Calcula:
a) El percentatge de gent que està per sobre la puntuació 5 (aprovat en la prova test).
b) El percentatge de gent que té puntuació entre 5 i 7.
c) El percentil de la teva nota en el darrer examen test segons aquest model. Com l'interpretes? c) Calcula i interpreta els quartils de la distribució.

Exercici 4.–Obteniu 1000 observacions d'una variable X amb distribució N(4, 16). Feu un histograma dels 1000 valors de X. Feu el mateix per una variable Y amb distribució exponencial de paràmetre l igual a 0.25. El mateix per una distribució uniforme a [-2 10]. Compareu els tres histogrames.

Exercici 5.–El nombre d'errades mecanogràfiques per pàgina d'una secretària segueix una distribució de Poisson de valor esperat 10. Calculeu la probabilitat que en una pàgina es trobin entre 8 i 15 errades. Feu els càlculs:
a) Utilitzant l'aproximació normal i la taula corresponent a $\Phi(x)$.
b) Càlcul directe utilitzant la instrucció `CDF` de Minitab corresponent a la distribució de Poisson.
Compareu els resultats obtinguts.

Exercici 6.–Tirem 500 vegades un dau. Calculeu la probabilitat que el nombre d'asos obtingut estigui entre 80 i 100. (*Nota*: Utilitzeu l'aproximació normal a la binomial).

Exercici 7.–Si X té distribució $N(0,1)$, trobeu $E|X|$.

Exercici 8.–Donades X, Y amb distribució $N(0,1)$ i independents,

a) calculeu la f.g.m. de $Z = X + Y$

b) Calculeu $E(X+Y)$ i $V(X+Y)$ per dos mètodes diferents i verifiqueu que el resultat és el mateix.

Exercici 9.–Es llença un dau 100 vegades. Calculeu la probabilitat que el nombre de asos sigui més gran que 50.

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 9 (entrega: 25 de novembre)

TEORIA: Distribucions relacionades amb la Normal. Transformació de variables aleatòries. Mètode de Monte-Carlo. Distribucions contínues bivariants. Normal bivariant.

Exercici 1.–Els salaris d'una empresa segueixen una distribució log-normal. Si el 2% cobra més de 4.800.000 ptes i el 12% cobra menys de 200.000 ptes, trobeu la proporció de gent que té un salari comprès entre 250.000 i 350.000 ptes.

Exercici 2.–Suposem que X és una variable aleatòria amb funció de densitat $f(x) = 2x$ quan $x \in [0,1]$ i igual a 0 quan $x \notin [0,1]$. Considereu la variable $Y = \sqrt{X}$.
a) Trobeu la funció de densitat de probabilitat, funció de distribució, esperança, variància, coeficient d'assimetria i d'apuntament de la variable Y
b) Obtingueu 1000 observacions de la variable aleatòria Y de l'exercici anterior i feu una descripció estadística d'aquestes 1000 observacions. Compareu els valors mostrals de la mitjana aritmètica, variància, assimetria i apuntament amb els corresponents valors poblacionals de Y.

Exercici 3.–Si X_1 i X_2 són $N(0,1)$ i independents, quina és la distribució de $X_1 + X_2$?

Exercici 4.–Si $X \sim \text{Cauchy}(0,1)$, trobeu la funció de densitat de $Y = 3 + 2X$.

Exercici 5.–Siguin X i Y variables aleatòries amb funció de densitat conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} k(y-x) & \text{si } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

per alguna constant k. Es demana:

1. Dibuixar el suport de (X,Y).
2. Dibuixar la funció de densitat en tres dimensions.
3. Hallar el valor de k.
4. Distribució marginal de X: calcular i dibuixar la seva funció de densitat.
5. $P(Y < 2/3 \mid X = 1/2)$.

Exercici 6.–Siguin X i Y variables aleatòries $N(0,1)$. Expreseu la probabilitat $P(X + 2Y \le 3)$ en terms de la funció de distribució de la normal estàndard Φ,

1. supossent X i Y independents,
2. si (X,Y) ès normal bivariant i $\text{Corr}(X,Y) = .5$.

Exercici 7.–Siguin X_1 i X_2 variables aleatòries $N(0,1)$ independents. Es defineixen

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \\ Y_2 &= \alpha X_1 + 2X_2 \end{aligned}$$

No es sap el valor de α però se sap que $\text{Cov}(Y_1,Y_2) = 0$. Trobar $\text{Cov}(X_1,Y_2)$ i $\text{Corr}(X_1,Y_2)$.

PROBABILITAT (1999)

LEC i LADE, segon curs, primer trimestre. Fac. Econòmiques, UPF.

Professors: Pedro Delicado, Arturo Koatsu

Deure núm. 10 (entrega: 2 de desembre)

TEORIA: Convergència de variables aleatories. Llei dels grans nombres. Teorema central del límit.

Exercici 1.–Volem calcular el valor total S de la suma de 2000 factures. Per facilitar el processament de les dades, sumem els imports de les factures arrodonits a milers i obtenim la suma aproximada S^*. Trobeu la probabilitat que S i S^* difereixin en més de 10000.

Nota: utilitzeu la hipòtesi que per cada factura, la diferència entre el valor exacte i l'arrodonit segueix una distribució uniforme a $[-500, 500]$.

Exercici 2.–El percentatge de gent que està a favor de limitar la circulació de cotxes privats a la ciutat de Barcelona és del 60%. Per una persona escollida a l'atzar, considerem la variable que pren el valor 1 si la persona està a favor de la limitació i 0 en cas contrari. Considerem les variables $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ associades a deu persones escollides a l'atzar. Considereu la variable $\bar{X} = \sum_i X_i/10$.
a) Trobeu la probabilitat que $\bar{X}$ estigui comprés entre 0.55 i 0.65.
b) Idem en el cas que el nombre d'entrevistats sigui 100 enlloc de 10.
c) Trobeu N, el nombre d'entrevistats, per tal que aquesta probabilitat sigui del 95%.

Exercici 3.–Considereu la variable aleatòria $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ on les X_i són variables aleatòries independents amb distribució idèntica a la distribució X que bé donada per la funció de densitat $f(x) = 2x$ quan $x \in [0, 1]$ i igual a 0 quan $x \notin [0, 1]$. Trobeu el valor exacte de l'esperança i variància de la variable $T = Y/n$, on $n = 4$. Utilitzant la desigualtat de Chebyshev doneu una fita de la probabilitat $P[\mu - 0.3 < T < \mu + 0.3]$ on μ és l'esperança de T. Feu el mateix però ara considerant que la suma que defineix T és de $n = 50$ variables i no només de 4 com abans. Avalueu la qualitat de l'acotació de Chebyshev en el segon cas, comparant-la amb la donada pel Teorema Central del Límit.

Qüestions de resposta tancada de cursos anteriors

Segueixen unes quantes qüestions amb resposta tancada corresponents a exàmens parcials o finals de cursos anteriors. Cada qüestió té una i una sola resposta correcta.

56.– Si X és una variable aleatòria continua amb funció de densitat de probabilitat $f_X(x)$, aleshores la probabilitat que $X = 0$ és igual a
a) 0 **b)** $f_X(0)$ **c)** cap de les altres dues

57.– Si $f(x)$ és funció de densitat de probabilitat aleshores
a) $f(x) \leq 1$ per tot x
b) $f(x) > 0$ per tot x
c) cap de les altres dues

58.– Una distribució uniforme a $[1, 8]$, és
a) simètrica **b)** té coeficient d'apuntament igual a zero **c)** cap de les altres dues

59.– Si $f(x)$, $F(x)$ són respectivament la funció de densitat de probabilitat i de distribució d'una variable aleatòria contínua X, aleshores necessàriament
a)$F(\infty) = 1$ **b)**$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 1$ **c)**$F(0) = 0$

60.– Si X segueix una distribució amb $\mu = 2, \quad \sigma^2 = 4$, el valor estandarditzat de $X = 4$
a) és igual a 1 **b)** és igual a 0.5 **c)** cap de les altres dues és certa

61.– Si X és una variable amb funció de densitat de probabilitat $f(x) = 2x,\ x \in [0, 1]$ i $f(x) = 0,\ x \notin [0, 1]$, aleshores el percentil 24 de la distribució és
a) $\sqrt{0.24}$ **b)** 0.24^2 **c)** cap de les altres dues

62.– Si $f(x) = kx^4,\ x \in [0, 1]$ i $f(x) = 0,\ x \notin [0, 1]$ aleshores
a) $k = 5$ **b)** per qualsevol valor de k, $f(x)$ no pot ser funció de densitat de probabilitat **c)** cap de les altres dues

63.– Si X segueix una distribució amb $\mu = -1, \quad \sigma^2 = 1$, el valor estandarditzat de $X = 4$
a) és igual a 5 **b)** és igual a 3 **c)** cap de les altres dues és certa

64.– Si $X \sim N(3, 16)$ on 16 és la variància, aleshores **a)** $P[X > 3] = 0.5$ **b)** $P[X > 2] < 0.5$ **c)** cap de les altres dues.

65.– Llencem mil daus i denotem per X la suma dels números de les cares que queden a dalt.
a) X seguirà una distribució exactament normal.
b) La distribució de X serà aproximadament normal.
c) Si els daus són esbiaixats, les dues anteriors són falses.

66.– Si X té distribució de Poisson de paràmetre $\lambda = 50$, aleshores $P[X < 30]$ és aproximadament igual a $P[Y < 30]$ quan
a) $Y \sim N(50, 50)$ **b)** $Y \sim N(50, 50^2)$ **c)** cap de les altres dues

67.– Si X té distribució normal $N[0, 1]$, la variable $Y = X^2 - 1$
a) té distribució normal
b) té variància 2
c) cap de les altres dues

68.– Si X és una variable $N(2, 9)$ aleshores
a) $P[X > 8] < 0.4$ **b)** X^2 té distribució khi-quadrat **c)** cap de les altres dues.

69.– Si $Y = -2X - 1$, aleshores la variància de Y, $V(Y)$, és
a) $-2V(X)$ **b)** $2V(X)$ **c)** cap de les altres dues

70.– Si $f_X(x)$ és la funció de densitat de probabilitat de la variable X, aleshores la funció de densitat de probabilitat $f_Y(y)$ de la variable $Y = e^X$ será igual a
a) $f_X(\ln y)$ **b)** $f_X(\ln y)\frac{1}{y}$ **c)** cap de les altres dues

71.– Per la variable aleatòria contínua bivariant (X,Y) sabem que la distribució marginal de X és exponencial amb paràmetre 1, i que la distribució marginal de Y és exponencial amb paràmetre 1. Suposant que X i Y són independents, la funció de densitat conjunta de $Z=(X,Y)$ és
a) $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ **b)** $f(x,y)=e^{-xy}$ **c)** cap de les altres dues

72.– Si X és una variable aleatòria amb distribució lognormal, aleshores el coeficient d'assimetria és
a) positiu **b)** zero **c)** cap de les altres dues

73.– Si $X_1,\ldots,X_{20}$ són variables independents cada una amb distribució uniforme a $[0,1]$, la variable $Y=\sum_{i=1}^{20} X_i$ té distribució
a) $N(0,1)$ **b)** uniforme **c)** cap de les anteriors

74.– Si X té esperança igual a μ i variància igual a σ^2, aleshores $Y=(X-\mu)/\sigma$ **a)** té distribució normal **b)** té valor esperat igual a zero **c)** cap de les altres dues

75.– La distribució χ^2 de 3 graus de llibertat és una distribució amb variància igual
a) 6 **b)** 3 **c)** cap de les altres dues

76.– La distribució t de Student de 3 graus de llibertat és
a) simètrica **b)** coeficient d'apuntament igual a 3 **c)** cap de les altres dues

77.– Quan el número de graus de llibertat tendeix a ∞, la distribució t tendeix a la
a) distribució $N(0,1)$ **b)** khi-quadrat
c) cap de les anteriors

78.– Si $f(x,y)$ denota la funció de densitat de probabilitat conjunta de la variable $Z=(X,Y)$, aleshores $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ és
a) igual a 1 **b)** la funció de densitat de probabilitat de Y **c)** cap de les altres dues

79.– Si X i Y són variables aleatòries amb $E(XY)=E(X)E(Y)$ aleshores **a)** X, Y són independents **b)** el coeficient de correlació és igual a zero **c)** les dues anteriors són certes a la vegada

80.– Si X i Y són variables aleatories, aleshores sempre **a)** $EX^2=(EX)^2$ **b)** $E[(X-1)^2]=EX^2-2EX+1$ **c)** $E(X-Y)(X+Y)=E(X-Y)E(X+Y)$

81.– Si X té distribució $N(3,9)$ i $\Phi(x)$ és la funció de distribució de $N(0,1)$, aleshores $P[0<X<12]$ és igual a
a) $\Phi(3)-0.5$ **b)** $\Phi(1)-0.5$ **c)** cap de les altres dues

82.– Si $X\sim N(3,4)$ on 4 és la variància, aleshores **a)** $P[X>10]\approx 0.5$ **b)** $P[X>10]\approx 0$ **c)** $P[X>10]\approx 0.3421$

83.– Si X té distribució normal $N[0,1]$, la variable $Y=X^3+1$
a) té distribució normal $N[1,1]$
b) té variància 1
c) cap de les altres dues

84.– Si $Y=-3X+1$, i $V(X)$ és la variància de X, aleshores la variància de Y és
a) $-9V(X)$ **b)** $9V(X)+1$ **c)** cap de les altres dues

85.– Si $X_1,\ldots,X_{20}$ són variables independents cada una amb distribució uniforme a $[0,1]$, la variable $Y=\sum_{i=1}^{20} X_i$ té distribució
a) $N(0,1)$ **b)** amb mitjana igual a 10. **c)** cap de les anteriors.

Exàmens del curs 96-97

Probabilitat. Examen parcial.
Curso 96-97, primer trimestre. 4-11-96

NORMAS:
El examen consta de 20 preguntas test (**4 puntos**) y de 3 ejercicios (**6 puntos**).
Cada pregunta test tiene tres posibles respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Contestada correctamente, una pregunta test se valora con 0.2 puntos. Cada respuesta incorrecta resta 0.1 punto. Las preguntas no contestadas no suman ni restan puntos.
El primer ejercicio tiene una valoración de **3 puntos** (0.5 puntos cada apartado). Los otros dos ejercicios valen **1.5 puntos** cada uno. Los tres apartados del ejercicio 2 valen 0.5 puntos cada uno.
Se puede usar la calculadora, pero no se permite ningún otro material.
DURACIÓN DEL EXAMEN: **2 horas.**

Preguntas test
(4 puntos)

1. Se ha usado el programa MINITAB para generar datos de la distribución de Bernouilli con probabilidad de éxito $p = 0.4$. Se ha repetido esta operación tres veces y se han guardado los datos generados en las columnas `C1`, `C2` y `C3` de longitud 1000 cada una. Se construye después la columna `C4` como suma de las otras tres: `C4 = C1 + C2 + C3`. Los datos que se obtienen en `C4` corresponden a ...

A. ... una variable de Bernouilli con $n = 3$.
B. ... una distribución binomial de $n = 3$ y valor esperado 1.2
C. ... Una distribución binomial de valor esperado $np = 400$.

2. Lanzamos una moneda y un dado. Observamos la cara de la moneda (C o $+$) y el número del dado.

A. El espacio muestral tiene 8 elementos.
B. Los resultados no son equiprobables.
C. La probabilidad de *"cara y número par"* es 0.25.

3. Un conductor borracho va por la autopista y cuando encuentra una salida la toma con probabilidad 0.3. Si la salida que le lleva a casa es la tercera, ¿con qué probabilidad la tomará?

A. $0.7 \times 0.7 \times 0.3$
B. $0.3 + 0.3 + 0.3$
C. 0.3^3

4. Un estudiante ha de elegir 4 asignaturas entre una oferta de 14 para hacer una de ellas en cada uno de los 4 cursos de la carrera. El número de posibilidades que tiene es ...

A. $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4!}$
B. 14^4
C. $\frac{14!}{10!}$

5. Se lanza un dado y si sale par se tiran dos monedas; si el dado sale impar se lanza una moneda. Si se ha obtenido una sola cara, ¿cuál es la probabilidad de que el dado haya salido par?

A. $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
B. No se puede calcular, faltan datos.
C. $1/2$

6. Tenemos tres sucesos A, B y C. Sabemos que A es independiente de B y que B es independiente de C.

A. Se puede asegurar que A y C son independientes.
B. Se puede asegurar que A y C son incompatibles.
C. Ninguna de las anteriores.

7. Si $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ y las X_i son variables estandarizadas,

A. $V(X) = 5$
B. No se puede calcular la varianza de X con esta información.
C. X tiene distribución binomial con $n = 5$.

8. Si X es una variable aleatoria, se tiene siempre que ...

A. $E(V(X)) = 0$ **B.** $E(X) \geq 0$ **C.** $V(E(X)) = 0$

9. Si X es una variable aleatoria discreta con valor esperado positivo ...

A. ... sólo puede tomar valores positivos. **B.** ... ha de tener más probabilidad en los valores positivos que en los negativos. **C.** Ninguna de las anteriores.

10. ¿Cuál es falsa?

A. $V(X) = (E(X))^2 - E(X^2)$
B. $V(X) = E((X - E(X))^2)$
C. $V(X) = E(X^2) - E(X)E(X)$

11. Sabemos que $E(XY) = E(X)E(Y)$. Podemos asegurar que ...

A. $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$ **B.** X e Y son independientes. **C.** Ninguna de las anteriores.

12. Si $V(X) = 0$ ...

A. ... ha de ser $E(X) = 0$. **B.** ... ha de ser $X = 0$. **C.** X puede no tomar ningún valor positivo.

13. La función generatriz de momentos de una variable aleatoria discreta X es $\Psi_X(t) = (2e^{2t} + 1)/3$. Su varianza es

A. 1 **B.** 8/9 **C.** 8/3

14. La variable aleatoria X de la pregunta anterior es de la forma $X = 2Y$, donde Y tiene distribución de Bernouilli de parámetro p. El valor de p es

A. 1/3 **B.** 2/3 **C.** El enunciado es falso.

15. El coeficiente de variación (que se define como $CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$) de una v.a. con distribución $B(n,p)$ ...

A. ... decrece con n. **B.** ... no depende de n. **C.** ... crece con n.

16. La función de distribución acumulada y la función de masa de la $Poisson(\lambda)$ ...

A. ... no coinciden en ningún punto. **B.** ... coinciden en $x = 0$. **C.** ... coinciden en $x = 1$.

17. ¿$Cov(X,Y)$ es siempre mayor que $Corr(X,Y)$?

A. Sí. **B.** No. **C.** Sólo cuando X e Y son independientes.

18. Sea $a = V(X + Y)$ y $b = V(X - Y)$. Se verifica que

A. puede ser que $a < b$. **B.** $a = b$ siempre. **C.** si $a = b$ entonces X e Y son independientes.

19. Sea X una variable aleatoria que puede tomar al menos tres valores. La distribución condicionada de Y dado que X es igual a x, para un valor concreto x, ...

A. ... nunca es igual a la marginal de Y. **B.** ... es igual a la marginal de Y cuando X e Y son independientes, pero no solo en ese caso. **C.** ... es igual a la marginal de Y sólo cuando X e Y son independientes.

20. ¿Es posible encontrar variables aleatorias X e Y tales que $V(X) = V(Y) > 0$ y que $Cov(X,Y) = 2V(X)$?

A. Sí **B.** No **C.** ¡Quién sabe!

Ejercicios

(6 puntos)

1. (3 puntos) La joven malabarista ha descubierto una pequeña plaza en donde sus juegos tienen mucha aceptación: con probabilidad 0.5 cada vecino que toma el sol en la plaza la reconpensa con una moneda de 100 pts. El único problema es que sólo hay 3 vecinos que tomen el sol en la plaza. Llamemos X a la variable aleatoria que cuenta el dinero que recibe por su actuación.

Con la recaudación diaria, la malabarista entra en el bar de la plaza y, si puede, se toma un bocadillo que le cuesta 100 pts. Si le sobra algo de dinero, se juega esas monedas en la maquina tragaperras. Ella sabe que, cuando juega 100 pts., con probabilidad 0.02 le saldrá el premio especial de 5.000 pts. (y con probabilidad 0.98 perderá sus veinte duros). Sea Y el dinero con el que sale del bar.

Se pide:

(a) Función de masa de probabilidad de X.

(b) Distribuciones condicionadas de Y a los posibles valores de X.

(c) Distribución conjunta de (X, Y).

(d) Distribución marginal de Y y $E(Y)$.

(e) Covarianza de X e Y.

(f) ¿Crees que la joven malabarista es una persona amante del riesgo? ¿Por qué?

2. (1.5 puntos) Se lanzan tres dados de colores diferentes (verde, blanco y amarillo) y se consideran los sucesos

$A=$ "No aparece nigún número impar",
$B=$ "Aparecen tres números diferentes",
$C=$ "En el dado amarillo sale un número par".

(a) ¿Son A, B y C incompatibles?

(b) ¿Son A y B independientes? ¿ Lo son A y C? ¿ Lo son B y C?

(c) Calcular $P(C \mid A \cap B)$.

3. (1.5 puntos) Tenemos dos monedas, con probabilidad de *cara* igual a 0.5 y 0.3 respectivamente. Las lanzamos a la vez y obtenemos una *cara* y una *cruz*. ¿Cuál es la probabilidad de que la *cara* sea de la moneda trucada? (NOTA: identifica claramente los sucesos que utilices para resover el problema).

PROBABILITAT (1996/97).
Professors: Pedro Delicado i Frederic Udina

Examen Final

NOM i COGNOMS:
NÚMERO UPF:
GRUP i SUBGRUP:

ABANS DE TOT: poseu les vostres dades (nom, cognom, etc.) en aquesta primer full.

INFORMACIÓ SOBRE LA PRIMERA PART: **(20 punts)**

Aquesta prova consta de xx preguntes test amb tres possibles respostes. Cada una de les preguntes té solament una resposta correcta i sempre n'hi ha una de correcta.

Heu de marcar clarament en el mateix full de preguntes quina de les tres respostes creieu que és la correcta.

Podeu deixar la pregunta en blanc. Si heu de fer rectificacions, aclariu bé quina és la vostra opció final. En cas de dubte es considerarà la pregunta no contestada.

A l'hora de decidir entre respondre la pregunta o deixar-la en blanc (no contestada), tingueu en compte que la puntuació de l'examen s'efectuarà de la forma següent:

Resposta correcta: $+1.0$
Resposta incorrecta: -0.5
Pregunta no contestada: 0.0.

1.–Si X, Y són variables aleatòries continues amb distribució uniforme en el recinte $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$, aleshores

a) $E(Y \mid X = x)$ és creixent quan x creix.
b) $E(Y \mid X = x)$ és decreixent quan x creix.
c) $E(Y \mid X = x)$ és constant respecte x.

2.–La funció de densitat de probabilitat d'una variable aleatoria continua X és $f(x) = ax+b$ per $x \in (0, 2)$ i 0 per $x \notin (0, 2)$. Si f és realment funció de densitat de probabilitat, quina de les tres següents respostes és possible?

a) $a = 0.3, b = 0.2$ **b)** $a = 0.5, b = 0.2$ **c)** $a = 0.4, b = 0.3$

3.–Si per $i = 1 \ldots 100$ les variables aleatòries discretes independents X_i segueixen una distribució binomial de paràmetres 100 i 0.2, calcula A i B de manera que

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - A}{B}$$

tingui una distribució aproximada normal estàndard.

a) $A = 2000, B = 1600$ **b)** $A = 2000, B = 40$ **c)** $A = 4000, B = 80$

4.–Si en Minitab posem a la columna `C1` 100 nombres aleatoris $N(0, 1)$ generats segons la instrucció que segueix, i a la columna `C2` hi posem el quadrat dels nombres de la columna `C1`:

```
RANDOM 100 C1;
NORMAL 0.0 1.0.
LET C2=C1*C1.
DESCRIBE C2.
```

la mitjana aritmètica de `C2` serà aproximadament

a) 1 **b)** 0 **c)** 2

5.–Si A, B, C són tres esdeveniments d'un espai mostral, l'esdeveniment "només es dóna A" s'expressa amb

a) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ **b)** A **c)** $A \backslash (A \cap B) \backslash (A \cap C)$

6.–En l'experiment "*llençar un dau i després tantes monedes com la cara del dau obtinguda*"

a) L'espai mostral té 36 elements
b) La variable "*número de cares obtingudes*" segueix una distribució binomial.
c) Cap de les anteriors.

7.–La variable aleatoria X que pren valors $-100, 100, 10000$ amb probabilitat $1/4$ per cada un dels dos primers,

a) Té variància $1/2 \cdot 10000^2$
b) Té variància $1/2 \cdot 10000 + 1/2 \cdot 10^8 - 5000^2$
c) Cap de les altres dues

8.–Quina és falsa?

a) Si $X \sim N(0, 1)$, $-X$ té la mateixa distribució.
b) Si $X \sim N(0, 1)$, X^2 no pot tenir la mateixa distribució.
c) Si X, Y tenen distribució conjunta normal bivariant i tenen coeficient de correlació igual a zero, no tenen perquè ser independents.

9.–Siguin X, Y variables aleatòries continues amb funció de densitat de probabilitat conjunta $f(x, y)$. Si $E(Y \mid X = x) = x^2$, la llei de l'esperança iterada, $E(E(Y \mid X)) = E(Y)$ s'expressarà:

a) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$ **b)** $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y)\,dy$ **c)** $E(Y) = E(X) \mid X = x^2$

10.–Recorda que un dau té valor esperat 7/2 i variància 35/12. Sigui X la suma de 12 daus. Volem aproximar la probabilitat $P[X < 30]$ amb una normal. Haurem de calcular:

a) $\Phi(\frac{30-6\cdot 7}{\sqrt{7\cdot 5}})$ **b)** $\Phi(\frac{29.5-6\cdot 7}{\sqrt{7\cdot 5}})$ **c)** $1 - \Phi(\frac{30.5-6\cdot 7}{\sqrt{7\cdot 5}})$

11.–A la taverna *"Intergalàctica"* dues terceres parts dels clients són selenites i l'altra tercera part són marcians. El taverner ha determinat que la quantitat de diners (expresada en *DF=Diner fugaç*) que un selenita gasta es distribueix segons $N(\mu = 100, \sigma^2 = 25)$ i la quantitat que gasta un marcià segueix una $N(\mu = 90, \sigma^2 = 25)$.

Indiqueu l'afirmació falsa:
a) La variància de la despesa a la taverna no depén del planeta d'origen del client.
b) La probabilitat que un selenita gasti més de 110 DF és aproximadament 0.025.
c) Qualsevol selenita gasta més que qualsevol marcià.

12.–Continuem a la taverna *"Intergalàctica"*. Siguin S i M les quantitats que gasten un selenita i un marciá, respectivament. Assenyaleu la correcta:
a) $P(S > 95) < P(M < 95)$. **b)** $P(S > 95) > P(M > 95)$. **c)** $P(S > 95) = P(M > 95)$.

13.–Continuem a la taverna *"Intergalàctica"*. La probabilitat que la despesa d'un selenita sigui entre 95 DF i 105 DF és:
a) .5 **b)** .68 **c)** .95

14.–Continuem a la taverna *"Intergalàctica"*. La probabilitat que el proper client (sigui selenita o marcià) faci una despesa superior a 100 DF és:
a) .3471 **b)** .5250 **c)** .1750

15.–Continuem a la taverna *"Intergalàctica"*. Un client enmascarat entra a la taverna i gasta més de 100DF. La probabilitat que sigui selenita...
a) ...és la mateixa que sigui marcià.
b) ...és superior a 0.97.
c) ...és inferior a 0.90.

16.–El coeficient d'assimetria d'una variable aleatoria discreta Binomial ...
a) ...sempre és igual a 0.
b) ...sempre és negatiu.
c) ...Cap de les altres dues.

17.– El coeficient de variació d'una variable aleatoria discreta Geomètrica amb paràmetre p ...
a) ...decreix si p creix.
b) ...augmenta quan p creix.
c) ...no depén de p.

18.– Sigui X una variable aleatoria amb variància 1 i esperança 2. La probabilitat d'observar un valor de X inferior a 0 o superior a 4 és ...
a) ...menor que 0.25 només si X és simètrica.
b) ...menor que .025 només si X és normal.
c) ...menor que 0.25 sigui qui sigui X.

19.– Siguin X i Y variables aleatòries discretes amb correlació igual a 0.
a) X i Y poden ser independents malgrat que no siguin normals.
b) Si $E(X) = E(Y) = 0$, aleshores X i Y són independents.
c) No es pot assegurar que X i Y són independents perque no són variables aleatòries continues.

20.– Siguin X i Y variables aleatòries. La variància de $X + Y$ ...
a) ...és sempre major que $V(X) + V(Y)$.
b) ...és major que $V(X) + V(Y)$ si $Corr(X, Y)$ és diferent de 0.
c) Cap de les altres dues.

Exercici 1.–(20 punts)

(a) Considera la variable $Y = -\log X$ on X és uniforme en $(0,1)$: Digues quina és la seva funció de densitat de probabilitat i la seva funció de distribució de probabilitat. De quin model de probabilitat es tracta? Calcula la seva esperança i variància.

(b) Considera ara les variables $X_1, \ldots X_{30}$ independents i totes amb distribució uniforme en l'interval $[0,1]$. Ens interessa la variable

$$W = -\log(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{30})$$

Calcula el seu valor esperat i la seva variància. Creus que la distribució de la variable es pot aproximar per una distribució normal?

(c) Utilitzant això darrer, calcula aproximadament el valor de b tal que

$$P[X_1 \cdot \ldots \cdot X_{30} > b] = 0.115$$

tenint en compte la taula de la distribució normal que segueix.

Taula de $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ per una Z normal estàndar.

z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.500000	0.539828	0.579260	0.617911	0.655422	0.691462	0.725747	0.758036	0.788145	0.815940
1	0.841345	0.864334	0.884930	0.903199	0.919243	0.933193	0.945201	0.955435	0.964070	0.971284
2	0.977250	0.982136	0.986097	0.989276	0.991802	0.993790	0.995339	0.996533	0.997445	0.998134
3	0.998650	0.999032	0.999313	0.999517	0.999663	0.999767	0.999841	0.999892	0.999928	0.999952

Exercici 2.–(20 punts)

Un estudiant d'Economia va decidir el passat mes de juny dedicar el seu temps lliure a omplir Declaracions de la Renda per altre gent. El número de clients que va atendre per setmana va resultar ser una variable aleatoria amb la següent funció de distribució de probabilitat:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 0.05 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.20 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.55 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad 3 \leq x \end{cases}$$

(a) Calculeu i dibuixeu la funció de massa de probabilitat.

(b) Calculeu la probabilitat que aquest estudiant atengui més de dues persones en una setmana, sabent que al menys n'ha atés una.

Sigui Y el número de declaracions fetes per l'estudiant en una setmana en les que se li ha colat algún error. Les distribucions condicionades de Y donats els diferents valors de X són:

Y/X=1	0	1
	.8	.2

Y/X=2	0	1	2
	.6	.3	.1

Y/X=3	0	1	2
	.4	.4	.2

(c) Calculeu la taula de probabilitats cojuntes.

(d) Calculeu $Cov(X,Y)$.

(e) Calculeu $E(Y)$ de dues maneres diferents.

PROBABILITAT (1996/97).
Professors: Pedro Delicado i Frederic Udina

Examen de Setembre

NOM i COGNOMS:
NÚMERO UPF:
GRUP i SUBGRUP:

ABANS DE TOT: poseu les vostres dades (nom, cognom, etc.) en aquest primer full.

INFORMACIÓ SOBRE LA PRIMERA PART: **(20 punts)**

Aquesta prova consta de 20 preguntes test amb tres possibles respostes. Cada una de les preguntes té solament una resposta correcta i sempre n'hi ha una de correcta.

Heu de marcar clarament en el mateix full de preguntes quina de les tres respostes creieu que és la correcta. També heu de marcar les respostes a la taula d'aquesta primera fulla.

Podeu deixar la pregunta en blanc. Si heu de fer rectificacions, aclariu bé quina és la vostra opció final. En cas de dubte es considerarà la pregunta no contestada.

A l'hora de decidir entre respondre la pregunta o deixar-la en blanc (no contestada), tingueu en compte que la puntuació de l'examen s'efectuarà de la forma següent:

Resposta correcta: +1.0
Resposta incorrecta: −0.5
Pregunta no contestada: 0.0.

Encercleu clarament la resposta escollida

1	a	b	c
2	a	b	c
3	a	b	c
4	a	b	c
5	a	b	c
6	a	b	c
7	a	b	c
8	a	b	c
9	a	b	c
10	a	b	c
11	a	b	c
12	a	b	c
13	a	b	c
14	a	b	c
15	a	b	c
16	a	b	c
17	a	b	c
18	a	b	c
19	a	b	c
20	a	b	c

	Test	Exc 1	Exc 2	Exc 3	Total
Punts					

1.–Si tenim quatre esdeveniments diferents, quantes condicions haurem de comprovar per assegurar que són mútuament independents?
a) 11 **b)** 12 **c)** 10

2.–Quina és la probabilitat de treure cinc cartes del mateix pal en el pòker (agafem la baralla de 52 cartes, barallem i donem les cinc primeres, sense restitució)
a) $4 \cdot \binom{13}{5}/\binom{52}{5}$ **b)** $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$ **c)** Cap de les altres dues.

3.–Si $F_X(x)$ és la funció de distribució de probabilitat de una variable aleatoria continua X sempre positiva, aleshores la funció de distribució de probabilitat de $Y = \sqrt[4]{X}$ és:
a) $F_Y(y) = F_X(\sqrt[4]{y})$ **b)** $F_Y(y) = F_X(y^4)$ **c)** Cap de les altres dues.

4.–Si X és una variable aleatoria continua amb distribució exponencial, i sabem que $P[X > 2] = 0.1$, el valor esperat de X és
a) 0.1 **b)** 1.15 **c)** 2.30

5.–Si A i B són esdeveniments d'un espai mostral, $P(\bar{A} \mid B)$ és igual a
a) $1 - P(A \mid B)$ **b)** $P(A) - P(A \mid B)$ **c)** Cap de les altres dues.

6.–Siguin X, Y variables aleatòries continues amb distribució conjunta uniforme en el rectangle $[0,1] \times [0,2]$ de $I\!R^2$. La $V(Y \mid X = x)$ és
a) $1/12$ **b)** $1/3$ **c)** $x^2/12$

7.– Quina és falsa?
a) Si X i Y són variables aleatòries independents, llavors X^2 i Y^3 són independents.
b) Si $P(A \cap B \mid C) \neq P(A \mid C)P(B \mid C)$, llavors A i B no poden ser esdeveniments independents.
c) Si X, Y són variables aleatòries incorrelades amb distribució conjunta normal bivariant, aleshores són independents.

8.– Llencem un dau defectuós (les probabilitats de cada cara són diferents) i una moneda també esbiaixada de la que sabem que la probabilitat de creu és igual a la probabilitat d'obtenir número parell en el dau. Els esdeveniments "obtenir número parell en el dau" i "obtenir cara en la moneda"
a) no són independents
b) són independents i incompatibles
c) són independents però no incompatibles.

9.– El temps que passa entre dues explosions de petards en la nit de St. Joan segueix una distribució exponencial i té un promig de mig segon. La probabilitat que passi un segon sense sentir-se cap petard és igual a
a) $1 - \int_0^1 e^{-0.5x}\,dx$ **b)** 39.34% **c)** Cap de les altres dues.

10.–Es llença una moneda 1000 vegades, calculeu la probabilitat aproximada que surtin més de 500 cares.
a) $1/2$ **b)** $7/8$ **c)** Cap de les altres dues.

11.–Si posem a l'atzar 3 fitxes en un tauler 3×3, la probabilitat que estiguin en línia és
a) $8/\binom{9}{3}$ **b)** $1/\binom{9}{3}$ **c)** Cap de les altres dues.

12.–Si A, B, C són tres esdeveniments d'un espai mostral, l'esdeveniment "només es dóna un dels tres" s'expressa amb
a) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$
b) $(A \cup B \cup C) \backslash [(A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C)]$
c) Cap de les altres dues.

13.–Sigui X una variable aleatoria amb distribució de Poisson de paràmetre $1/2$.
a) La funció de massa de probabilitat de X és simètrica. **b)** El valor esperat de X és igual a la seva variància **c)** El valor esperat de X és igual a la seva desviació típica.

14.– Si contesto a l'atzar les 20 preguntes d'aquest examen, el número de preguntes encertades seguirà una distribució
a) de Poisson de paràmetre $\lambda = 20 \times (1/3)$ **b)** uniforme discreta amb valors de 0 a 20 **c)** cap de les altres dues.

15.–Siguin X i Y variables aleatòries normals de valor esperat 1.7 i desviacions típiques $\sigma_X < \sigma_Y$. Si $I = [1.68, 1.72]$,
a) $P[Y \in I] < P[X \in I]$ **b)** $P[Y \in I] > P[X \in I]$ **c)** No hi ha prou informació per decidir entre les dues anteriors.

16.–Els 60% dels alumnes de la Facultat són noies. Si triem 100 alumnes a l'atzar i utilitzem una aproximació normal, la probabilitat de trobar entre 50 i 70 noies és
a) aproximadament del 99% **b)** aproximadament del 95% **c)** aproximadament del 50%

17.– La distribució t de Student de 3 graus de llibertat
a) té coeficient d'apuntament igual a 3 **b)** és simètrica **c)** cap de les altres dues

18.–Sigui X una variable aleatoria amb distribució de Poisson amb paràmetre 3 i Y binomial de paràmetres 4 i 1/2. $E(X + 2Y)$ és igual a
a) 3.5 **b)** 7 **c)** Cap de les altres dues.

19.–Si X i Y són variables aleatòries $E(X \mid Y)$
a) és un nombre real **b)** és una variable aleatoria amb esperança igual a $E(Y)$ **c)** és una variable aleatoria amb esperança igual a $E(X)$

20.–Sigui X una variable aleatoria continua qualsevol i Y la variable X estandarditzada. Aleshores la covariància de X i Y és
a) 1 **b)** σ_X **c)** σ_X^2

Exercici 1 **8 punts**

En un joc d'atzar hi ha la probabilitat del 10% de guanyar.

1. Si jugues cinc vegades, quina és la probabilitat de guanyar exactament dues vegades?
2. Quantes vegades seguides cal jugar per tal de tenir una probabilitat superior al 95% de guanyar?

Exercici 2 **6 punts**

En un col·lectiu hi ha estadístics, enginyers i advocats en proporcions $0.2, 0.3, 0.5$ respectivament. Els estadístics s'equivoquen quan sumen el 5% de les vegades, els enginyers el 20% i els advocats el 50%. Es tria una persona a l'atzar i se li demana quan fan 2 més 2 i contesta 5. Quina és la probabilitat que sigui advocat?

Exercici 3 **16 punts**

Dues variables aleatòries tenen la distribució conjunta que es mostra a la taula.

1. Calcula les distribucions marginals de X i de Y
2. Calcula els valors esperats de X i de Y.
3. Calcula les variàncies de X i de Y.
4. Calcula l'esperança del producte XY. Quan val el coeficient de correlació entre X i Y? Són variables independents?
5. Calcula la distribució $X \mid Y = 0$, el seu valor esperat i variància.

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	0.2	0.1	0.3
$Y = 2$	0	0.4	0

Exàmens del curs 97-98

PROBABILITAT (1997/98).
Professors: Anna Bogomolnaia i Pedro Delicado
Examen Parcial

NOM i COGNOMS:

NÚMERO UPF:

GRUP i SUBGRUP:

Tipus A

ABANS DE TOT: poseu les vostres dades (nom, cognom, etc.) en aquesta primer full.

INFORMACIÓ SOBRE LA PRIMERA PART (test): (15 punts)

Aquesta prova consta de 15 preguntes test amb tres possibles respostes. Cada una de les preguntes té solament una resposta correcta i sempre n'hi ha una de correcta.

Heu de marcar clarament en el mateix full de preguntes quina de les tres respostes creieu que és la correcta. També heu de marcar les respostes a la taula d'aquesta primera fulla.

Podeu deixar la pregunta en blanc. Si heu de fer rectificacions, aclariu bé quina és la vostra opció final. En cas de dubte es considerarà la pregunta no contestada.

A l'hora de decidir entre respondre la pregunta o deixar-la en blanc (no contestada), tingueu en compte que la puntuació de l'examen s'efectuarà de la forma següent:

Resposta correcta: +1.0
Resposta incorrecta: −0.5
Pregunta no contestada: 0.0.

Encercleu clarament la resposta escollida

1	a	b	c
2	a	b	c
3	a	b	c
4	a	b	c
5	a	b	c
6	a	b	c
7	a	b	c
8	a	b	c
9	a	b	c
10	a	b	c
11	a	b	c
12	a	b	c
13	a	b	c
14	a	b	c
15	a	b	c

	Test	Ejercicio	Total
Punts			

1.–Un caminante llega a las puertas de una ciudad amurallada y pide permiso para entrar. El vigilante le informa de que no es tan fácil acceder a esa ciudad. Para conseguirlo habrá de lanzar 20 dados y sólo entrará si aparecen exactamente cinco dados con un cinco en su cara superior. Si el caminante no consigue los cinco cincos, tendrá que volver a intentarlo al día siguiente.

La probabilidad de que consiga entrar el primer día es:

a) $(1/6)^5$
b) 0.1294
c) $P(X = 5)$, siendo X una v.a. $B(n, p)$ con $n = 20$, $p = (1/6)^5$.

2.–Seguimos con el problema del caminante. Sea X la variable aleatoria que mide *el número de días que tardará en entrar el caminante en la ciudad.* ¿Cuál es la distribución de X?

a) Aproximadamente Poisson de parámetro $\lambda = 5 \times 0.1294$.
b) Geométrica de parámetro $p = (1/6)^5$.
c) Ninguna de las otras dos.

3.– Seguimos con el problema del caminante. Sea X la variable aleatoria que mide *el número de días que tardará en entrar el caminante en la ciudad.* ¿Cuál es la esperanza de X?

a) 6.47 días. **b)** Más de una semana. **c)** Cinco días con cinco noches.

4.–Seguimos con el problema del caminante. Un día llegan a la ciudad 100 caminantes, ¿cuántos esperas que logren entrar ese día?

a) Ninguno. **b)** $16.\widehat{6}$. **c)** Pocos más de una docena.

5.–Seguimos con el problema del caminante. Un día llegan a la ciudad 100 caminantes. Sea Y la variable aleatoria que mide *el número de caminantes que logra entrar ese día.* La varianza de esta variable es ...

a) 10.2321 **b)** 11.2663 **c)** igual a la esperanza de Y.

6.–Seguimos con el problema del caminante. Un día llegan a la ciudad 100 caminantes. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

a) La probabilidad de que entren al menos 3 de ellos y no más de 23 es menor que 8/9.
b) La probabilidad de que entren al menos 7 de ellos y no más de 19 es mayor que 3/4.
c) Ninguna de las otras dos.

7.–En Minitab se generan números aleatorios y se guardan en las columnas `C1` y `C2` según las instrucciones que se muestran a continuación. Depués se transforman estos datos para obtener la columna `C3`.

```
RANDOM 100 C1;
   BERNOULLI .4.
RANDOM 100 C2;
   POISSON 3.
LET C3=.1*(C2 + 5*C1).
```

La media aritmética de la columna `C3` será aproximadamente.

a) 0.5 **b)** 20.3 **c)** 5.5

8.–Considera los sucesos A, B y C. ¿Cómo expresarías el suceso "*ocurren exactamente dos de ellos*"?

a) $((A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)) - (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
b) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
c) $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) - (A \cap B \cap C)$

9.–Sea X una variable aleatoria discreta que no toma valores negativos. Indica qué afirmación es falsa.

a) $E(X)$ es un número mayor o igual que 0.
b) $E(X)$ es una variable aleatoria que toma valores no negativos y tiene varianza no nula.
c) $E(X)$ es una variable aleatoria que toma valores no negativos y tiene varianza menor o igual que $V(X)$.

10.–Se sabe que $E(X) = E(Y) = 2$ y que $E(XY) = 4$. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

a) X e Y son independientes.
b) X e Y tienen la misma distribución de probabilidad.
c) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

11.– Sea la variable aleatoria X con distribución uniforme discreta desde $a = -4$ a $b = 5$. Sean Q_1, Q_2 y Q_3 sus cuartiles. Se tiene que ...

a) $Q_1 = -2$; $Q_2 = 1$; $Q_3 = 3$
b) $Q_1 = -3$; $Q_2 = 1$; $Q_3 = 2$
c) $Q_1 = -2$; $Q_2 = 1$; $Q_3 = 2$

12.– En una panadería se preparan 10 kilos de masa de pan. En la masa se ponen 200 pasas y se mezcla bien todo. Con esta masa se hacen 100 barras de 100 gramos cada una. La probabilidad de encontrar al menos una pasa en la primera barra de pan que se venda esa día es ...
a) 1 - 0.1339 **b)** 1 - 0.1353 **c)** 1 - 0.1326

13.– Seguimos en la panadería. La probabilidad de encontrar exactamente 3 pasas en la última barra que se venda ese día es ...
a) exactamente $P(X = 3)$, siendo $X \sim$ Poisson($\lambda = 2$).
b) exactamente $P(X = 3)$, siendo $X \sim$ B($n = 100, p = 0.02$).
c) aproximadamente $P(X = 3)$, siendo $X \sim$ Poisson($\lambda = 2$).

14.– Seguimos en la panadería. Sean las variables aleatorias $X = \{$*número de pasas en la primera barra vendida*$\}$ e $Y = \{$*número de pasas en la última barra vendida*$\}$. Indica qué afirmación es falsa.
a) X e Y son independientes.
b) X e Y tienen la misma distribución de probabilidad.
c) $E(X) = 2$.

15.– La función de distribución acumulada y la función de masa de una variable aleatoria $B(n, p)$
a) no coinciden en ningún punto.
b) coinciden en $x = 0$.
c) coinciden en $x = 1$.

SEGUNDA PARTE. **Ejercicio.** (15 puntos)

Un estudiante viene diariamente a la UPF en bicicleta. Para llegar, puede tomar la calle Sardenya o bien Marina. Por cualquiera de las dos rutas se encuentra con tres semáforos, cada uno de los cuales está en verde con probabilidad 0.5 (si baja por Sardenya) o 0.6 (si baja por Marina). Se supone que los semáforos funcionan de forma independiente unos de otros.

Si el día es soleado prefiere bajar por Sardenya porque la sombra de los árboles le resulta agradable. Por contra, cuando está nublado baja por Marina. En la información metereológica que escucha diariamente antes de salir de casa, el estudiante ha oído esta mañana que con probabilidad 0.7 el día será soleado.

Sea la variable aleatoria $X = \{$*número de semáforos que encuentra en verde*$\}$. Se pide:

(a) Función de masa de X condicionada a que el día es soleado.

(b) Función de masa de X condicionada a que el día no es soleado.

(c) ¿Qué tipo de distribución tiene X condicionada a que el día es soleado? ¿Qué tipo de distribución tiene X condicionada a que el día no es soleado?

(d) Sea Y la variable aleatoria que vale 1 cuando el día es soleado y 0 si no lo es. Calcula la distribución conjunta de las variable (X, Y). (NOTA: recordar que la probabilidad conjunta es el producto de la probabilidad condicionada por la marginal de la variable que condiciona, es decir, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i \mid Y = y_j)P(Y = y_j)$)

(e) ¿Tiene la variable X una distribución binomial? ¿Con qué parámetros?

(f) Número esperado de semáforos en rojo, dado que el día es soleado.

PROBABILITAT (1997/98).

Professors: Anna Bogomolnaia i Pedro Delicado

Examen Final

NOM i COGNOMS:
NÚMERO UPF:
GRUP i SUBGRUP:

ABANS DE TOT: poseu les vostres dades (nom, cognom, etc.) en aquesta primer full.

INFORMACIÓ SOBRE LA PRIMERA PART (test): (20 punts)

Aquesta prova consta de 20 preguntes test amb tres possibles respostes. Cada una de les preguntes té solament una resposta correcta i sempre n'hi ha una de correcta.

Heu de marcar clarament en el mateix full de preguntes quina de les tres respostes creieu que és la correcta. També heu de marcar les respostes a la taula d'aquesta primera fulla.

Podeu deixar la pregunta en blanc. Si heu de fer rectificacions, aclariu bé quina és la vostra opció final. En cas de dubte es considerarà la pregunta no contestada.

A l'hora de decidir entre respondre la pregunta o deixar-la en blanc (no contestada), tingueu en compte que la puntuació de l'examen s'efectuarà de la forma següent:

Resposta correcta: +1.0
Resposta incorrecta: −0.5
Pregunta no contestada: 0.0.

Encercleu clarament la resposta escollida

1	a	b	c
2	a	b	c
3	a	b	c
4	a	b	c
5	a	b	c
6	a	b	c
7	a	b	c
8	a	b	c
9	a	b	c
10	a	b	c
11	a	b	c
12	a	b	c
13	a	b	c
14	a	b	c
15	a	b	c
16	a	b	c
17	a	b	c
18	a	b	c
19	a	b	c
20	a	b	c

	Test	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Total
Punts					

1.–Una embotelladora de cava usa tapones de corcho que aguantan (sin descorcharse) una presión de 12 atmósferas. Se sabe que la presión que llega a ejercer el cava embotellado sigue una distribución normal de media 10 atmósferas y desviación típica 1 atmósfera. ¿Cual es la probabilidad de que una botella se descorche por efecto de la alta presión interna?

a) .05
b) Menos de .025
c) 1 - 0.68

2.–Se dispone de una baraja de 40 cartas. Se toman 12 cartas y se colocan una tras otra sobre la mesa. Sea X="*número de cartas del palo de* OROS" que aparecen entre las 12 seleccionadas.

a) X tiene distribución binomial.
b) X tiene distribución simétrica.
c) El valor esperado de X es 3.

3.–Se elige una carta al azar de una baraja de 40 cartas. Sean los sucesos A="*Sale una carta del palo de* COPAS" y B="*Sale una figura*" (por figura entendemos "sota", "caballo" y "rey").

a) A y B son independientes.
b) A y B son incompatibles.
c) A y B son equiprobables.

4.–Sea la variable aleatoria X con $E(X^2) = 100$. ¿Cuál es cierta?

a) $E(X) = 20$
b) $E(X) = 8$
c) $E(X) = -12$

5.–Sea la variable aleatoria X que toma los valores -4, -1, 1, 4.

a) La distribución de X es siempre simétrica.
b) La distribución de X no tiene por qué ser simétrica.
c) El valor esperado de X nunca puede ser 3.

6.–Sea una variable aleatoria X con función generatriz de momentos $\Psi(t) = .2e^{-t} + .4 + .4e^{3t}$.

a)$E(X) = 0$.
b)$V(X) = 3.8$.
c)$E(X) = 1$.

7.–Se utilizó MINITAB para generar 100 números aleatorios de una distribución $U([0, 1])$. Estos datos se guardaron en la columna `C1`. Se transformó esta columna de la siguiente manera

```
LET C2 = 4 * C1 * C1
```

y se guardaron los datos en `C2`. Indica qué afirmación es falsa.

a)`C2` contiene observaciones de una variable aleatoria absolutamente continua.
b)`C2` contiene observaciones de una variable aleatoria cuya función de distribución vale $F(x) = 4x^2$ para $x \in [0, 1/2]$.
c)`C2` contiene observaciones de una variable aleatoria cuya función de distribución vale $F(x) = .5\sqrt{x}$ para $x \in [0, 4]$.

8.–Sean X e Y dos variables aleatorias, $X \sim B(n = 10, p = .1)$ e $Y \sim B(n = 10, p = .9)$.

a)$P(X \geq 7) = P(Y \leq 3)$
b)$P(X \leq 5) = P(Y \leq 5)$
c)$P(X \leq 7) = 1 - P(Y \leq 3)$

9.–Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribuciones $X \sim B(n = 10, p_1)$ e $Y \sim B(n = 10, p_2)$, con $p_1 > p_2$.

a)$P(X = Y = 4) = (P(X = 4) + P(Y = 4))/2$
b)$P(X = Y = 4) < P(X = 4)$
c)$P(X \leq Y) = 1$

10.–En una empresa de trabajo temporal, el tiempo que transcurre entre que se consiguen dos colocaciones consecutivas es una variable aleatoria exponencial con valor esperado de un día y medio.

a)La probabilidad de que no coloquen a nadie durante 3 días es $1 - e^{-4.5}$.
b)Si en promedio llega un trabajador cada dos días buscando empleo a esta agencia, a largo plazo el número de trabajadores que no han encontrado trabajo tenderá a infinito.
c)El número medio trabajadores que encuentran empleo mediante esta agencia es de 20 por cada 30 días laborables.

11.–Sea una variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = 2(x+1)/3$, si $x \in [0,1]$ y $f(x) = 0$ en otro caso. Su función de distribución,
a)vale $F(x) = x^2/3 + 2/3$ si $x \in [0,1]$.
b)vale $5/12$ en $x = 1/2$.
c)vale $8/9$ en $x = 1/3$.

12.–Sea una variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = 2(x+1)/3$, si $x \in [0,1]$ y $f(x) = 0$ en otro caso.
a)$E(X) = 1/2$
b)Mediana$(X) = 1/2$
c)$E(X) = 5/9$

13.–Sean X e Y dos variables aleatorias normales incorreladas, con $Var(X) > Var(Y) > 0$.
a)$(2X - Y)$ es normal
b)$(X+Y)$ e Y son independientes.
c)$(X+Y)$ y $(X-Y)$ son incorreladas.

14.–Un agente de seguros tiene cita con un cliente importante a las 10 de la mañana. El agente sabe que su cliente llega a las citas con un retraso medio de 5 minutos y que su tiempo de llegada puede considerarse una variable aleatoria normal con $\sigma = 2$ minutos. El agente quiere llegar antes que su cliente con una probabilidad del 90%. ¿En qué momento debe llegar el agente?
a)A las 10 en punto.
b)A las 10 y 1.7 minutos.
c)A las 10 y 2.4 minutos.

15.–Sea la variable aleatoria continua bivariante $W = (X,Y)$ distribuida en el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ y con función de densidad $f(x,y) = ke^{x+y}$, si (x,y) está en ese rectángulo.
a)La constante k vale $(e-1)^2$.
b)La constante k vale $1/(e-1)^2$.
c)La constante k vale 1.

16.–Sea la variable aleatoria continua bivariante $W = (X,Y)$ distribuida en el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ y con función de densidad $f(x,y) = ke^{x+y}$, si (x,y) está en ese rectángulo.
a)X e Y son independientes y tienen la misma distribución.
b)X e Y son independientes pero no tienen la misma distribución.
c)X e Y no son independientes y tienen la misma distribución.

17.–Sea la variable aleatoria continua bivariante $W = (X,Y)$ distribuida en el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ y con función de densidad $f(x,y) = ke^{x+y}$, si (x,y) está en ese rectángulo.
a)$E(X) = e - 1$.
b)$E(X) = 1/(e-1)$.
c)$E(X) = .5$.

18.–Sea la variable aleatoria continua bivariante $W = (X,Y)$ distribuida uniformemente en un triángulo equilátero.
a)Las distribuciones marginales son uniformes.
b)Las distribuciones condicionadas son uniformes.
c)Ninguna de las otras dos.

19.–Sea (X,Y) variable aleatoria normal bivariante con vector de medias $(\mu_X = 3, \mu_Y)$. Se sabe que $E(X+Y \mid X = x) = 3x + 1$. Indica qué afirmación es falsa.
a)$\mu_Y = 7$.
b)X e Y no son independientes.
c)$E(Y - X) = 2$.

20.–Si $X_1, \ldots, X_{25}$ son variables aleatorias independientes con distribución $Exp(\lambda = 2)$. Sea $Y = \sum_{i=1}^{25} X_i$. Y tiene distribución
a)exactamente normal.
b)aproximadamente $N(\mu = 12.5, \sigma^2 = (5/2)^2)$.
c)aproximadamente $N(\mu = 1/2, \sigma^2 = 1/20)$.

Problema 1. (8 puntos)

Las variables aleatorias discreta X e Y tienen distribución conjunta y marginales dadas por la siguiente tabla:

X Y	0	1	3	5	p_i
0	.1	.2	?	.1	.6
1	?	.1	.1	.1	?
	?	?	?	?	

(a) Escribe la tabla completa.

(b) Calcula las distribuciones condicionadas de Y a valores de X y de X a valores de Y.

(c) Calcula todas las esperanzas condicionadas.

(d) Calcula $Cov(X, Y)$ y $Corr(X, Y)$.

Problema 2. (7 puntos)

En las titulaciones de *Economía* y *Dirección y Administración de Empresas* de la UPF, el 56% de los estudiantes son chicas (datos del curso 96-97). Se considera una clase de estas titulaciones en la que hay 80 alumnos.

(a) Probabilidad aproximada de que en esa clase haya más de 55 chicas.

(b) Probabilidad aproximada de que haya el mismo número de chicos y chicas en esa clase.

(c) Encontrar el tercer cuartil de la distribución normal que aproxima el número de chicas en clase.

Tabla de $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ para una Z normal estándar.

z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.500000	0.539828	0.579260	0.617911	0.655422	0.691462	0.725747	0.758036	0.788145	0.815940
1	0.841345	0.864334	0.884930	0.903199	0.919243	0.933193	0.945201	0.955435	0.964070	0.971284
2	0.977250	0.982136	0.986097	0.989276	0.991802	0.993790	0.995339	0.996533	0.997445	0.998134
3	0.998650	0.999032	0.999313	0.999517	0.999663	0.999767	0.999841	0.999892	0.999928	0.999952

Problema 3. (15 puntos)

El pasado mes de noviembre se celebró el "sorteo de la mili". Este año fueron unos 160.000 los jóvenes que entraban en ese proceso de asignación de destinos. Un buen número de ellos tuvo la suerte de "librarse" del servicio militar al ser clasificado como "excedente de cupo" en un sorteo que se realizó el día anterior. El sorteo de los excedentes de cupo levantó una airada polémica: parece que no todos los jóvenes incluidos en ese sorteo tenían la misma probabilidad de salir elegidos como excedentes de cupo. Vamos a intentar aclarar si esa polémica fue o no justificada.

Supondremos que el número de jóvenes que participaron en el sorteo fue de 160.000 y que 10.000 de ellos serían escogidos como excedentes de cupo. El sorteo que se llevo a cabo fue, con alguna modificación, de la siguiente forma:

> Cada joven tenía asignado un número entre 1 y 160.000. Se elegiría al azar una de las 16 decenas de millar que van del 1 al 160.000 y todos los muchachos cuyo número estuviera en esa decena de millar serían declarados excedentes de cupo. Para ello se extraería al azar un número K del 0 al 15, y la decena de millar correspondiente sería la que va desde el número $10.000 \times K + 1$ hasta el $10.000 \times (K + 1)$. Así, por ejemplo, si el número K valía 0, los jóvenes numerados del 1 al 10.000 serían los afortunados; si salía el número 3, los agraciados serían los números del 30.001 al 40.000; si salía el número 14, los jóvenes con números entre el 140.001 y el 150.000 no tendrían que hacer la mili.
>
> Para elegir el número K entre 0 y 15, se disponía de dos bombos. El primero tenía dos bolas: una con un 0 y otra con un 1. El segundo tenía diez bolas con los dígitos 0, 1, 2, ..., 8, 9. Se extraería una bola de cada urna y el número elegido sería el que tuviese por primer dígito el de la bola de la primera urna y como segundo dígito el de la bola de la segunda urna.
>
> Si el número así formado era superior a 15 se extraería otra bola de la segunda urna, y esto se repetiría hasta obtener un número entre 0 y 15.

Contesta a las siguientes preguntas:

(a) Sea la variable aletoria $X =$ "*número entre 0 y 15 elegido mediante este sorteo*". ¿Cuál es la función de masa de X?

(b) ¿Tenían todos los jóvenes la misma probabilidad de ser excedentes de cupo? ¿Qué jóvenes tenían mayor probabilidad?

(c) Aplica el teorema de Bayes para calcular la probabilidad de que el joven *Oriol Fernández* tuviese un número del 1 al 100.000, sabiendo que ha sido declarado excedente de cupo.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que en ese sorteo hubiera que repetir la extracción de la segunda bola al menos una vez?

(e) Propón una modificación de ese sorteo (en la que se usen también dos bombos y las mismas bolas que antes) que sí garantice que todos los jóvenes tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

En el sorteo realizado en noviembre, la primera bola fue un 1 y la segunda un 8, con lo que el número elegido, el 18, no era válido y se debió sacar una segunda bola de la segunda urna. Apareció un 4, así que los jóvenes con números desde el 140.001 hasta el 150.000 fueron los excedentes de cupo de este año.

Dadas las irregularidades que se han puesto de manifiesto en los apartados anteriores, muchos jóvenes no afortunados y algún partido político pidió que se repitiera el sorteo de los excedentes de cupo. El gobierno no accedió a ello alegando la siguiente razón: la asignación de los números del 1 al 160.000 a cada joven se había hecho de forma totalmente aleatoria a través de un ordenador (es decir, todos los jóvenes habían tenido la misma probabilidad de estar situados en cualquiera de las 16 decenas de millar que van del 1 al 160.000).

(f) ¿Te parece justificada la postura del gobierno de no repetir ese sorteo? (Es decir, antes de conocer qué número se les había asignado, ¿todos los muchachos tenían las mismas probabilidades de ser excedentes de cupo este año?)

(g) ¿Te parecería justo haber declarado excedentes de cupo a los 10.000 primeros, sin haber hecho el sorteo de los dos bombos y las bolitas?

PROBABILITAT (1997/98).
Professors: Anna Bogomolnaia i Pedro Delicado

Examen setembre

NOM i COGNOMS:
NÚMERO UPF:
GRUP i SUBGRUP:

ABANS DE TOT: poseu les vostres dades (nom, cognom, etc.) en aquesta primer full.

INFORMACIÓ SOBRE LA PRIMERA PART (test): (15 punts)

Aquesta prova consta de 15 preguntes test amb tres possibles respostes. Cada una de les preguntes té solament una resposta correcta i sempre n'hi ha una de correcta.

Heu de marcar clarament en el mateix full de preguntes quina de les tres respostes creieu que és la correcta. També heu de marcar les respostes a la taula d'aquesta primera fulla.

Podeu deixar la pregunta en blanc. Si heu de fer rectificacions, aclariu bé quina és la vostra opció final. En cas de dubte es considerarà la pregunta no contestada.

A l'hora de decidir entre respondre la pregunta o deixar-la en blanc (no contestada), tingueu en compte que la puntuació de l'examen s'efectuarà de la forma següent:

Resposta correcta: +1.0
Resposta incorrecta: −0.5
Pregunta no contestada: 0.0.

Encercleu clarament la resposta escollida

1	a	b	c
2	a	b	c
3	a	b	c
4	a	b	c
5	a	b	c
6	a	b	c
7	a	b	c
8	a	b	c
9	a	b	c
10	a	b	c
11	a	b	c
12	a	b	c
13	a	b	c
14	a	b	c
15	a	b	c

	Test	Prob. 1	Prob. 2	Total
Punts				

1.–El procentaje de alumnos que contestan al azar esta pregunta es del 10%. Si alguien no contesta al azar la probabilidad de que dé una respuesta correcta es 0.8. ? Cuál es la probabilidad de que un alumno haya contestado al azar esta pregunta sabiendo que la ha contestado mal?

a) 0.1
b) 0.21
c) 0.66

2.–Si $Var(X+Y) = Var(X-Y)$ entonces ...

a) X e Y son independientes.
b) X e Y son normales.
c) X e Y son incorreladas.

3.–Se sabe que el suceso A se verifica si y sólo si se verifica el suceso B. Entonces ...

a) A y B son independientes.
b) A y B son incompatibles.
c) A y B son equiprobables.

4.–Se lanzan 12 dados simultáneamente. Sea Y la suma de las caras obtenidas. Entonces ...

a) Y tiene distribución binomial con parámetro $n = 12$.
b) $Var(Y) = 35$.
c) $E(Y) = 30$

5.–Sea una variable aleatoria X con función generatriz de momentos $\Psi(t) = .2e^{-2t} + .4 + .4e^{2t}$.

a)$E(X) = 0$.
b)$V(X) = 2$.
c)$E(X) = .4$.

6.–Sean X e Y dos variables aleatorias, $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(2,1)$.

a)$P(X \geq 1) = P(Y \leq 1)$
b)$P(X \leq 2) = P(Y \leq 0)$
c)$P(X \leq -1) = 1 - P(Y \leq 1)$

7.–Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribuciones $X \sim N(10, \sigma_1)$ e $Y \sim N(10, \sigma_2)$, con $\sigma_1 < \sigma_2$.

a)$P(X \leq 9) \geq P(Y \geq 11)$
b)$P(X \leq 8) \leq 1 - P(Y \geq 8)$
c)$P(X \leq Y) = 1$

8.–El número X de clientes que en una hora entran en una farmacia es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 5$. Se recogen datos en 100 farmacias de Barcelona sobre los clientes que entraron hoy en ellas entre las 5 y las 6 de la tarde: $X_1, \ldots, X_{100}$. La media muestral $\bar{X}_{100}$ es

a)aproximadamente normal con media 5 y varianza 5.
b)aproximadamente normal con media 5 y varianza 0.5.
c)aproximadamente normal con media 5 y varianza 0.05.

9.–Sea una variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = 2e^{-2x}$, si $x \geq 0$ y $f(x) = 0$ en otro caso. Su función de distribución es $F(x)$. Entonces,

a)$F(x) = f(x)$ para todo x.
b)$F(x) \leq f(x)$ para todo $x \leq 0.5$.
c)$Var(4X) = 1$.

10.–Sea una variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = 2(x+1)/3$, si $x \in [0,1]$ y $f(x) = 0$ en otro caso. ¿Cuál es falsa?

a)El coeficiente de assimetría de X es positivo.
b)La esperanza de X es menor que su mediana.
c)La mediana de X es menor que la moda de X.

11.–Sea la variable aleatoria continua bivariante $W = (X,Y)$ distribuida en el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$, con función de densidad $f(x,y)$, si (x,y) está en ese rectángulo. Se sabe que para todo $x_0 \in [0,1]$ la función $f(x_0,y)$ (función de y) es constante en $y \in [0,1]$. Entonces ...

a)la variable aleatoria W es uniforme en $[0,1] \times [0,1]$.
b)la esperanza de X condicionada a que $Y = y$ es constante en y.
c)X e Y no son independientes.

12.–Se sacan dos cartas de una baraja de 40 cartas (4 palos: oros, copas, espadas y bastos; en cada palo hay 7 cartas numeradas del 1 al 7 y tres cartas con figuras: sota, caballo y rey). El suceso más probable de los tres siguientes es ...

a) *Las dos cartas son del palo de copas.*
b) *Las dos cartas son figuras.*
c) *Al menos una de las dos cartas es del palo de copas y no es figura.*

13.–Un ladrón de coches tiene una llave maestra que abre uno de cada 7 coches. Ha decidido probar suerte en el apracamiento que hay enfrente del Camp Nou un día de partido. ¿Cuál es la probabilidad de que no consiga abrir ninguno de los 10 priemros coches con los que prueba suerte?

a) $(6/7)^{10}$
b) $(1/7)^{10}$
c) $(1/7)(6/7)^9$

14.–Sean X, Y y Z tres variables aleatorias independientes con varianzas finitas σ_X^2, σ_Y^2 y σ_Z^2, respectivamente. La varianza de $3X + 2Y - (Z/\sigma_Z)$ es ...

a) $9\sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2 - 1$.
b) $9\sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2 + \sigma_Z$.
c) Ninguna de las otras dos.

15.–Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

a) Si σ crece, entonces el rango intercuartílico de X crece.
b) Si σ crece, entonces el primer cuartil de X crece.
c) Si μ crece, entonces el rango intercuartílico de X crece.

Problema 1. (7 puntos)

Las variables aleatorias discretas X e Y tienen distribución conjunta y marginales dadas por la siguiente tabla:

X Y	0	1	5	p_i
0	.05	?	.1	.3
1	?	.2	?	.5
2	.1	?	?	?
	?	.4	.2	?

(a) Escribe la tabla completa.

(b) Calcula las distribuciones condicionadas de Y a valores de X y de X a valores de Y.

(c) Calcula la esperanza condicionada de Y dado que X vale 2.

(d) Calcula la varianza condicionada de Y dado que X vale 2.

(e) Calcula $Cov(X, Y)$ y $Corr(X, Y)$.

Problema 2. (8 puntos)
Una empresa consultora planifica su trabajo por meses. Sea X el número de proyectos que le pueden surgir cada mes. X es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Se sabe que Y, el número de horas de trabajo por semana que el consultor jefe dedica a cada proyecto, sigue una distribución normal. Además, la ditribución de Y depende del número de proyectos que hayan surgido este mes de tal forma que

$$E(Y|X = x) = 10 + \frac{20}{x}$$

y $Var(Y|X = x) = 5^2$. El tiempo que el consultor jefe dedica a un proyecto es independiente del tiempo que dedica a otros.

(a) Sea T= *"número total de horas semanales de trabajo del consultor jefe"*. ¿Cuál es la distribución de T dado que $X = x$?

(b) ¿Cuál es la esperanza de T?

(c) En el contrato del consultor jefe se especifica que sólo se le pagará como horas extra el tiempo de trabajo que supere las 55 horas semanales. ¿Cuál es la probabilidad de que cobre horas extra si en este mes hay tres proyectos en marcha?

(d) Supongamos ahora que este mes hay dos proyectos en la empresa y que son dos proyectos muy relacionados, hasta el punto de que el consultor jefe cree que los tiempos que habrá de dedicar a cada proyecto (Y_1, Y_2) están correlados con coeficiente de correlación $\rho = 0.17$. Calcular la probabilidad de que este mes el consultor jefe cobre horas extra.

Tabla de $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ para una Z normal estándar.

z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.500000	0.539828	0.579260	0.617911	0.655422	0.691462	0.725747	0.758036	0.788145	0.815940
1	0.841345	0.864334	0.884930	0.903199	0.919243	0.933193	0.945201	0.955435	0.964070	0.971284
2	0.977250	0.982136	0.986097	0.989276	0.991802	0.993790	0.995339	0.996533	0.997445	0.998134
3	0.998650	0.999032	0.999313	0.999517	0.999663	0.999767	0.999841	0.999892	0.999928	0.999952

Exàmens del curs 98-99

PROBABILITAT (1998/99).
Professors: Margarida Corominas i Pedro Delicado
Examen final

NOM i COGNOMS:
NÚMERO UPF:
GRUP i SUBGRUP:

ABANS DE TOT: poseu les vostres dades (nom, cognom, etc.) en aquesta primer full.

INFORMACIÓ SOBRE LA PRIMERA PART (test): (20 punts)

Aquesta prova consta de 20 preguntes test amb tres possibles respostes. Cada una de les preguntes té solament una resposta correcta i sempre n'hi ha una de correcta.

Heu de marcar clarament en el mateix full de preguntes quina de les tres respostes creieu que és la correcta. També heu de marcar les respostes a la taula d'aquesta primera fulla.

Podeu deixar la pregunta en blanc. Si heu de fer rectificacions, aclariu bé quina és la vostra opció final. En cas de dubte es considerarà la pregunta no contestada.

A l'hora de decidir entre respondre la pregunta o deixar-la en blanc (no contestada), tingueu en compte que la puntuació de l'examen s'efectuarà de la forma següent:

Resposta correcta: $+1.0$
Resposta incorrecta: -0.5
Pregunta no contestada: 0.0.

Encercleu clarament la resposta escollida

1	a	b	c
2	a	b	c
3	a	b	c
4	a	b	c
5	a	b	c
6	a	b	c
7	a	b	c
8	a	b	c
9	a	b	c
10	a	b	c
11	a	b	c
12	a	b	c
13	a	b	c
14	a	b	c
15	a	b	c
16	a	b	c
17	a	b	c
18	a	b	c
19	a	b	c
20	a	b	c

	Test	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Total
Punts						

1.–Si $P(A)=P(B)=P(C)=0.4$, $P(A\cap B)=P(A\cap C)=0.2$ i sabem que B i C són independents, llavors la probabilitat $P(A\cup B\cup C)$ és igual a:
a)0.64
b)$0.64+P(A\cap B\cap C)$
c)no hi ha prou dades per determinar-la

2.–Tirem dos daus de colors diferents. Definim els esdeveniments A="el primer dau surt un número parell", B="no surt cap dau amb número senar", C="la suma dels dos daus dóna 7". Llavors:
a)Els esdeveniments A i B són independents.
b)B i C no són disjunts.
c)Es compleix que $A\cap B=B$.

3.–Una urna (U1) té un 70% de boles blanques i un 30% de boles negres, mentre que una altra urna (U2) té un 30% de boles blanques i un 70% de boles negres. Seleccionem una d'aquestes dues urnes a l'atzar i agafem tres boles una darrera l'altra amb reposició. De les tres boles, dues són blanques. Quina és la probabilitat que provinguin de la urna U1 ?
a)0.7
b)més petita que 0.5
c)0.8

4.–La desigualtat de Txebitxev ens permet saber que:
a)Entre l'esperança i 4 desviacions típiques hi ha al menys el 93,75 % de la probabilitat.
b)Lluny de l'esperança la probabilitat és gran.
c)$P(-k\sigma\le X-\mu\le k\sigma)\le\frac{1}{k^2}$

5.–Si una variable aleatòria discreta X té funció generatriu de moments $\Psi_X(t)=0.2e^{1t}+0.8e^{2t}$
a)llavors els seus possibles valors són 0.2 i 0.8
b)llavors té esperança $E(X)=1.8$ i variància $V(X)=3.4$
c)llavors té esperança $E(X)=1.8$ i $E(X^2)=3.4$

6.–Si X és una variable aleatòria amb funció de densitat $f(x)$ i funció de distribució de probabilitat $F(x)$, es pot assegurar que:
a)per tot x, $0\le f(x)\le 1$
b)per tot x, $F(x)$ és continua
c)per tot x, $f(x)$ és contínua.

7.–X i Y són variables aleatorias amb $V(X)=V(Y)=4$. La $Cov(2X,0.5Y)$ és igual a
a)$Cov(X,Y)$
b)A la correlació entre X i Y
c)Si X i Y són independents, és igual a 1.

8.–El telèfon de la Renfe comunica quan truco amb probabilitat 1/3. El nombre de trucades necessari per aconseguir saber els horaris de tren segueix una distribució:
a)Binomial amb paràmetres n, 1/3
b)Geomètrica amb paràmetre 1/3
c)Geomètrica amb paràmetre 2/3

9.–Una variable aleatòria continua té funció de distribució de probabilitat donada per $F(x)=x^2$ per $x\in[0,1]$, $F(x)=0$ per $x<0$ i $F(x)=1$ per $x>1$. El seu valor esperat és:
a)0
b)2/3
c)1

10.–El número de cotxes que passen per un peatge per hora segueix una distribució de Poisson. Denotem X la variable aleatòria que ens dóna el temps que passa entre l'arribada de dos cotxes. Llavors,
a)$P(X>10\ /\ X>5)=P(X>10)$
b)$P(X>10\ /\ X>5)=P(X>5)$
c)cap de les anteriors

11.–Si X és una variable aleatòria continua amb distribució lognormal, aleshores el coeficient d'assimetria de la variable $Y=\ln X$ és igual a:
a)0
b)més gran que zero
c)més petit que zero

12.–Si $X \sim N(2, \sigma^2 = 4)$ llavors la variable $Y = 2X + 1$
a)està distribuida com una $N(5, \sigma^2 = 8)$
b)la varible Y no té perquè ser normal
c)la variable Y estandarditzada és $\frac{Y-5}{4}$

13.–Si X és una variable aleatòria continua amb funció de densitat $f(x) = 2x$ per $x \in [0,1]$ i $f(x) = 0$ per $x \notin [0,1]$, aleshores el percentil 35 de la distibució és:
a)$\sqrt{0.35}$
b)0.35
c)0.35^2

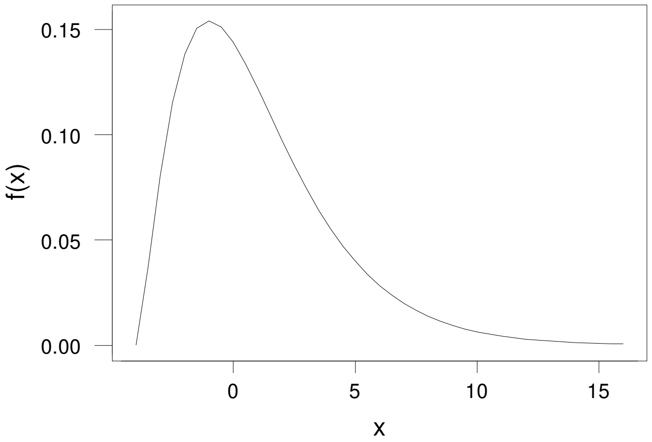
14.–La empresa de treball temporal ETT garanteix que quan proposa un candidat per ocupar una feina la probabilitat de que aquest sigui adequat és del 50%. El restaurant *Que-rico* demana un cuiner a ETT i aquesta envia 8 candidats a fer una prova. Sigui X el número de candidats que passen amb èxit la prova del restaurant (és a dir, aquells que són adequats). Pel seu compte, el restaurant *Que-bueno* necessita una encarregada i demana candidates a ETT. En aquest cas ETT decideix enviar les possibles encarregades una darera l'altra fins que el restaurant trobi adequada a una d'elles. Sigui Y el número d'entrevistes necessàries fins a trobar l'encarregada ideal. Aleshores ...
a)$V(X) < V(Y)$
b)$V(X) = V(Y)$
c)$V(X) > V(Y)$

15.–Sigui (X, Y) la variable aleatoria bivariant amb distribució uniforme a la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi 1: $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Quina és l'afirmació falsa?
a)X i Y són incorrelades.
b)X i Y són independents.
c)$E(Y/X)$ és constant.

16.–Sigui X una variable aleatoria uniforme contínua en $[0,1]$ i Y una variable aleatoria amb distribució uniforme discreta en $\{0, 1\}$. Es suposa que X i Y són independents. Sigui $Z = X + Y$. Aleshores ...
a)Z és una variable aleatoria discreta.
b)Z és una variable aleatoria que no és ni discreta ni contínua.
c)Z és una variable aleatoria contínua $U([0, 2])$.

17.–L'Eduard agafa cada dia el metro per venir a l'UPF. La probabilitat de que trobi un seient lliure al vagó és 0.2. Sigui X el número de dies que troba seient al llarg de dos trimestres (100 dies). La probabilitat de que X sigui més gran o igual que 25 és, aproximadament, ...
a)0.1357
b)0.1841
c)0.2420

18.–Sigui X una variable aleatoria amb funció de densitat $f(x)$ representada al següent gràfic.



La variable aleatoria X podra ser
a)una normal.
b)una χ^2.
c)la suma de dues variables aleatorias.

19.–Volem generar dades aleatòries d'una variable aleatoria $N(0,1)$ amb un ordinador. Només tenim quatre programes disponibles: P1, P2, P3, P4. Les feines que fan cadas cun d'aquest programes són les següents:

P1: Genera dades d'una variable aleatoria exponencial amb paràmetre $\lambda = 1$.

P2: Calcula la funció de distribució de la $N(0,1)$.

P3: Calcula la inversa de la funció de distribució de la $N(0,1)$.

P4: Calcula la funció $1 - e^{-x}$.

Aleshores, la seqüèencia de programes que hauriem de fer servir és ...
a)P1 - P4 - P3
b)P1 - P4 - P2
c)P1 - P2 - P4

20.–Sigui (X,Y) una variable aleatòria normal bivariant amb vector de mitjanes $(0,0)$ i matriu de variàncies-covariàncies

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siguin $T = aX + bY$, i $S = cX + dY$, amb $a, b, c, d \in I\!R$. Aleshores ...
a)T i S són independents per qualsevols valors a, b, c, d.
b)T i S són normals només si són independents.
c)$T + S$ és sempre normal.

Problema 1. (18 punts)
La Maria sempre es queda a dinar al bar de la Pompeu. Tot sovint menja calent, però com que li empipa fer cua al restaurant, a vegades s'estima més comprar un entrepà i menjar-se'l a fora del bar. La cua del restaurant és molt regular: a vegades cal esperar exactament 2 minuts (amb probabilitat 0.2), a vegades cal esperar-ne 5 (amb probabilitat 0.3), i la resta de vegades cal esperar 10 minuts. Si la cua dura 2 minuts, la Maria es menja un entrepà amb probabilitat 0.2, si en dura 5, menja un entrepà amb probabilitat 0.4, i si en dura 10 menja un entrepà amb probabilitat 0.8. En cas de menjar calent, la Maria també és molt metòdica per decidir si menja un plat o si en menja dos. Llança una moneda per decidir-se, si surt cara menja un plat i si surt creu, se'n menja dos.

Els preus al bar són els seguents: entrepà = 200pts, 1 plat = 400pts, 2 plats = 600pts.

Anomenem Y a la variable aleatòria "minuts que cal esperar a la cua del restaurant", i X a la variable aleatòria "diners que es gasta la Maria per dinar".

(a) Digues quina és la distribució marginal de Y i quina és la seva esperança.

(b) Digues quina és la distribució de X condicionada als diferents valors de Y.

(c) Calcula la taula de la distribució conjunta de (X, Y)

(d) Calcula la distribució marginal de X. Calcula també $E(X)$.

(e) Calcula la $Cov(X, Y)$. Com interpretes el seu signe?

(f) Calcula $E(X)$ fent servir la llei de l'esperança iterada.

Problema 2. (12 puntos)
Un edifici té 5 plantes (planta baixa i quatre pisos) i dos ascensors (A i B). Quan un ascensor està aturat, la probabilitat que estigui a la planta baixa és 0.5 i la de que es trobi a un dels altres pisos és proporcional a l'alçada del pis (és a dir, la probabilitat que l'ascensor sigui a la planta i és ki). Els dos ascensors funcionen independentment.

Suposa que sabem que els dos ascensors estan aturats. Resol (a), (b) i (c).

(a) Sigui X_A la variable aleatoria que indica en quin pis es troba l'ascensor A. Escriu la seva funció de massa.

(b) Quina probabilitat té un veí del tercer pis de tenir almenys un ascensor al seu replà?

(c) Amb quina probabilitat els dos ascensors són al mateix pis?

Suposem ara que només hi ha un ascensor (l'A) i que està aturat. També sabem que és tant probable que un veí vingui des del carrer cap a casa seva com que vulgui sortir de casa seva cap al carrer. A més a més ens han dit que a cada pis hi ha el mateix número de veïns.

(d) Sabem que el president de la comunitat de veïns no ha hagut d'esperar l'ascensor l'última vegada que l'ha volgut fer servir. Quina probabilitat té l'esdeveniment *"el president ha agafat l'ascensor a la planta baixa"*?

Problema 3. (5 puntos)
Sigui X la variable aleatoria amb funció de densitat $f(x) = ke^{-|x|}$, $x \in I\!R$.

(a) Calcula el valor de k, l'esperança i la mediana de X.

(b) Calcula la funció de distribució i el rang interquartílic de X.

Problema 4. (5 puntos)
Considerem la variable aleatoria contínua bivariant $W = (X, Y)$ amb funció de densitat

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)} & si \quad 0 \leq x, 0 \leq y \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

(c) Calcula el valor de k.

(d) Són X i Y independents? Per què?

Taula de $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ per a una Z normal estàndar.

z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.5000	0.5399	0.5793	0.6179	0.6554	0.6915	0.7257	0.7580	0.7881	0.8159
1	0.8413	0.8643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554	0.9641	0.9713
2	0.9772	0.9822	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974	0.9981
3	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999

PROBABILITAT (1998/99).
Professors: Margarida Corominas i Pedro Delicado

Examen de setembre

NOM i COGNOMS:
NÚMERO UPF:
GRUP i SUBGRUP:

ABANS DE TOT: poseu les vostres dades (nom, cognom, etc.) en aquesta primer full.

INFORMACIÓ SOBRE LA PRIMERA PART (test): (20 punts)

Aquesta prova consta de 20 preguntes test amb tres possibles respostes. Cada una de les preguntes té solament una resposta correcta i sempre n'hi ha una de correcta.

Heu de marcar clarament en el mateix full de preguntes quina de les tres respostes creieu que és la correcta. També heu de marcar les respostes a la taula d'aquesta primera fulla.

Podeu deixar la pregunta en blanc. Si heu de fer rectificacions, aclariu bé quina és la vostra opció final. En cas de dubte es considerarà la pregunta no contestada.

A l'hora de decidir entre respondre la pregunta o deixar-la en blanc (no contestada), tingueu en compte que la puntuació de l'examen s'efectuarà de la forma següent:

Resposta correcta: $+1.0$
Resposta incorrecta: -0.5
Pregunta no contestada: 0.0.

Encercleu clarament la resposta escollida

1	a	b	c
2	a	b	c
3	a	b	c
4	a	b	c
5	a	b	c
6	a	b	c
7	a	b	c
8	a	b	c
9	a	b	c
10	a	b	c
11	a	b	c
12	a	b	c
13	a	b	c
14	a	b	c
15	a	b	c
16	a	b	c
17	a	b	c
18	a	b	c
19	a	b	c
20	a	b	c

	Test	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Total
Punts						
	20	9	9	9	9	56

1.–Tenim una urna amb boles blanques o negres, totes numerades, de la següent manera:

1b, 2b, 3n, 1n, 2b, 3b

Considera els esdeveniments $A =$ "bola té número parell" i $B =$ "bola és negra". Llavors:
a)$P(A \cap B) = \frac{4}{6}$.
b)A i B són incompatibles.
c)A i B són independents.

2.–Considera dues urnes diferents, amb boles blanques i negres, amb la següent composició:

U1: 40%b, 60%n,   U2: 70%b, 30%n

Primer tirem dues monedes. Si el resultat és "creu, creu", agafem una bola de la U1, si el resultat és "cara, creu" o "creu, cara", agafem una bola de la U2, i si no, no agafem cap bola. Si juguem a aquest joc, i sabem que ens ha sortit una bola negra,
a)és més probable que l'hàgim tret de la U1 que de la U2.
b)és més probable que l'hàgim tret de la U2 que de la U1.
c)és igual de probable que l'hàgim tret de la U2 que de la U1.

3.–Tenim tres esdeveniments A, B i C tals que $A \subseteq B$. Quina de les següents afirmacions és correcta?
a)$P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(A \cap C/B)$
b)$P(\bar{B}/A) = 1$
c)$P(A \cap C/B) = P(A/B) \cdot P(C/B)$

4.–La variable aleatòria X que té com a funció generatriu de moments la funció:

$$\Psi_X(t) = \frac{1}{4} + \frac{e^t}{4} + \frac{e^{2t}}{2}$$

a)Compleix $E(X^2) = \frac{5}{4}$.
b)pren com a possibles valors el 0, el 1 i el 2.
c)té $E(X) = \frac{1}{4}$.

5.–Si tenim una variable aleatoria X amb distribució binomial, $B(n,p)$, llavors
a)$X + 2$ és binomial $B(n + 2, p)$.
b)$P(2X = 3) = 0$.
c)$2X$ és binomial $B(2n, p)$.

6.–Una estadística ha comptat el nombre de cotxes que passen per un determinat semàfor cada minut. La mitjana aritmètica de les dades recollides és de 1.97 cotxes per minut. Llavors:
a)Podem aproximar les dades per una Poisson amb $\lambda = 2$.
b)Podem aproximar les dades per una Geomètrica amb $p = 0,13$.
c)Podem aproximar les dades per una uniforme $[0, 1.97]$.

7.–Les trucades al 010 segueixen una Poisson. Les estadístiques diuen que cada dia (és a dir, cada 24 hores) truquen una mitjana de 480 persones. Llavors,
a)el número de trucades per hora és una Poisson amb $\lambda = 2$.
b)la probabilitat que no truqui ningú en una hora és igual a e^{-2}.
c)la probabilitat que truqui algú durant tot el dia és igual a $1 - e^{-480}$.

8.–Tenim una variable aleatòria X amb $E(X) = 2$ i $\sigma = \sqrt{V(X)} = 4$. Llavors podem assegurar que:
a)$P(|X - 2| \geq 8) \leq \frac{1}{4}$.
b)$P(|X - 2| \geq 8) \leq \frac{1}{8}$.
c)$P(|X - 2|) < 8) \geq \frac{4}{5}$.

9.–Si X i Y són variables aleatorias independents,
a)podem assegurar que $V(XY) = V(X)V(Y)$.
b)$X - a$ i bY, on a i b són dos números qualsevols, també són independents.
c)no sempre es compleix $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

10.–La funció de distribució

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,36 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,84 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

correspon a una variable aleatòria ...
a)uniforme, $U[0,2]$.
b)binomial, $B(2,0.4)$.
c)binomial, $B(2,0.6)$.

11.–X és una variable aleatoria $N(\mu,\sigma^2)$. ¿Quina de les següents afirmacions és falsa?
a)El coeficient de apuntament de X és 3 nomès en el cas que $\mu = 0$ i $\sigma = 1$.
b)El coeficient d'assimetria de X és sempre 3.
c)Ninguna de las otras dos.

12.–Indica quina de les següents funcions és una funció de distribució.
a)$F(x) = x$ si $x \in [0,1]$, $F(x) = 0$ en altre cas.
b)$F(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0,1]$, $F(x) = 0$ si $x < 0$ i $F(x) = 1$ si $x > 1$.
c)$F(x) = x(3-2x)$ si $x \in [0,1]$, $F(x) = 0$ si $x < 0$ i $F(x) = 1$ si $x > 1$.

13.–Indica quina de les següents funcions no és una funció de densitat.
a)$f(x) = 2x$ si $x \in [0,1]$, i $f(x) = 0$ en altre cas.
b)$f(x) = 1/\sqrt{2x}$ si $x \in [0,1/2]$, i $f(x) = 0$ en altre cas.
c)$f(x) = 4x(1-x)$ si $x \in [0,1]$, i $f(x) = 0$ en altre cas.

14.–Si X és una variable aleatoria $Exp(\lambda = 4)$, aleshores
a)$E(X) = V(X) = 1/4$.
b)$E(X) = \sqrt{V(X)} = 1/4$.
c)$E(X) = 1/V(X) = 4$.

15.–Si X és una variable aleatoria $Exp(\lambda = 1)$, aleshores
a)$P(X > 2/X > 3) = P(X > 1)$.
b)$P(X > 3/X > 2) = P(X > 3)$.
c)Ninguna de las otras dos.

16.–Si X és una variable aleatoria $N(\mu = 5, \sigma^2)$ i sabem que $P(X \in [-5,15]) \approx 0.68$, aleshores
a)$\sigma = 2\mu$.
b)$\sigma = \mu$.
c)$\sigma = \mu/2$.

17.–Si $X \sim Exp(\lambda = 1)$, aleshores la variable aleatoria $Y = 1 - e^X$
a)té distribució exponencial.
b)té distribució uniforme.
c)Ninguna de las otras dos.

18.–Rebem un premi d'un milió de pesetes i decidim invertir-lo en fons d'inversió. Al mercat hi ha 48 fons diferents, tots amb la mateixa rentabilitat mitjana del 0.5 % mensual, que podem suposar que funcionen de forma independent. El primer mes invertim el nostre milió en un d'aquests fons. El segon mes treiem el milió més els interessos i els invertim en un altre fons, i així successivament fins completar els 48 fons durant els propers quatre anys.
a)Els guanys al final dels 4 anys és una variable aleatoria amb distribució aproximadament normal.
b)Els guanys al final dels 4 anys és una variable aleatoria amb distribució aproximadament lognormal.
c)El logaritme dels guanys al final dels 4 anys és una variable aleatoria amb distribució aproximadament lognormal.

19.–Si la variable aleatoria bidimensional (X,Y) té distribució uniforme en el rectangle de vèrtexs $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ i $(0,-1)$, aleshores
a)$P(X > Y) = 1/2$.
b)X i Y són variables aleatorias amb distribució uniforme.
c)$E(X) = E(Y) = 1/2$.

20.–La variable aleatoria normal bivarariant

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

verifica que
a)la correlació entre X i Y es igual a 1.
b)$P(X > 0) < P(Y < 0)$.
c)Ninguna de las otras dos.

Taula de $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ per a una Z normal estàndar.

z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.5000	0.5399	0.5793	0.6179	0.6554	0.6915	0.7257	0.7580	0.7881	0.8159
1	0.8413	0.8643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554	0.9641	0.9713
2	0.9772	0.9822	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974	0.9981
3	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999

Problema 1. (9 punts)
En Pep es dedica parcialment a ser venedor d'enciclopèdies. Cada dia es dirigeix cap a un edifici on hi han 3 pisos. Va prement un per un els timbres dels porters automàtics de cadascun dels 3 pisos esperant que algú l'obri. De fet, tothom és a casa i sent el timbre, però cada inquilí només l'obre amb una probabilitat de $\frac{1}{2}$. Si aconsegueix entrar a l'edifici, truca a cada porta, explica les meravelles del seu producte, i com que és bon venedor, amb una probabilitat de $\frac{1}{3}$ ven una enciclopèdia a l'inquilí. Si després de trucar a cada pis ningú l'ha obert, se'n va i aquell dia no ven res.

(a) Amb quina probabilitat aconsegueix entrar a l'edifici? Escriu la distribució de probabilitat de la variable "número de timbres que li cal trucar a en Pep". Quina és la probabilitat que li calgui trucar a 2 o més pisos?

(b) Defineix la variable aleatòria X = "número d'enciclopèdies venudes en un dia". Escriu la seva distribució de probabilitat i calcula la seva esperança. Aquesta variable segueix una distribució binomial? I si condicionem la variable X per l'esdeveniment "haver aconseguit entrar a l'edifici"?

(c) El sou d'en Pep depèn del número d'enciclopèdies venudes. Exactament, cada dia cobra 10000 pessetes per cada enciclopèdia venuda. Si l'amo està de bon humor (això passa amb probabilitat $\frac{1}{2}$, independentment de les enciclopèdies que hagi venut), cobra un plus de 1000 pessetes més. Calcula l'esperança i la variància del seu sou diari.

Problema 2. (9 punts)
Tenim dues variables aleatòries discretes, X i Y, que tenen distribució conjunta i marginal donada per la taula següent:

$X\backslash Y$	1	3	5	
0	0,05	?	0,1	0,2
1	?	0,1	?	0,4
2	0,2	?	?	?
	?	0,3	0,2	

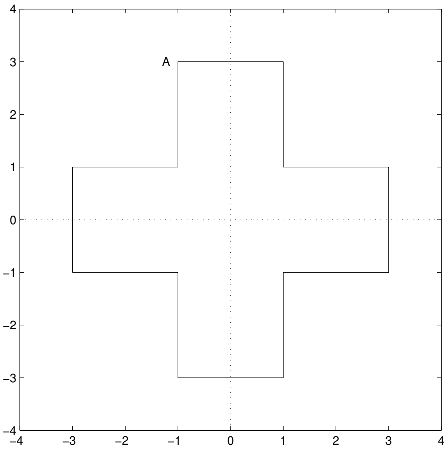
(a) Completa la taula i calcula la esperança i variància de les marginals de X i Y.

(b) Calcula les distribucions condicionades de Y a valors de X i les seves esperances.

(c) Troba la $E(Y)$ fent servir la llei de l'esperança iterada.

Problema 3. (9 punts)
La variable bidimensional (X, Y) té distribució uniforme en una regió A amb forma de creu: $(X, Y) \sim U(A)$,

$$A = \{(x, y) : |x| \leq 3, |y| \leq 3, \min\{|x|, |y|\} \leq 1\}$$



Contesta a les següents preguntes: (**Consell:** per fer aquest exercici no cal fer cap integral doble).

(a) Calcula el valor de la funció de densitat conjunta de (X, Y) en un punt (x, y) cualsevol de la regió A.

(b) Calcula la funció de densitat marginal de X i de Y.

(c) Calcula la funció de densitat de X condicionada a que $Y = -2$. Calcula la funció de densitat de X condicionada a que $Y = 0$. Calcula la funció de densitat de X condicionada a que $Y = 2$.

Problema 4. (9 punts)
Un peregrí realitza el camí de Santiago des de Roncesvalles fins a Santiago de Compostela. Es programa les jornades per poder fer-lo en 40 dies. La probabilitat que un dia a l'atzar plogui és de 0.3. Si un dia plou, el peregrí es pren una sopa de sobre que porta a la motxila. Es considera que l'esdeveniment de que hi hagi pluja un dia és independent de que n'hi hagi un altre. Contesteu a les següents preguntes.

(a) Quin és el número esperat de dies de pluja?

(b) Calcula aproximadament la probabilitat que com a molt plogui 8 dies.

(c) Si el peregrí vol tenir sobres de sopa suficients per tot el camí amb una probabilitat de 0.9, quants sobres hauria de posar a la seva motxila?