# Programació Lineal i Entera

## Tema 1: Introducció a la PL





# Introducció a la programació lineal

- **Objectius tema 1.**
- **Teoria: conceptes bàsics (setmana 1).**
  - **Definició de problema de programació lineal.**
  - **Resolució gràfica de problemes de PL.**
  - **Forma estàndard de problemes de PL.**
  - **Solucions bàsiques factibles.**
- **Laboratori: formulació i resolució computacional de probmes PL (setmana 2).**

# Objectius específics del tema 1

| | |
|---|---|
| 1.1 | Saber les característiques dels problemes de PL com a problemes d'optimització. |
| 1.2 | Trobar la solució òptima d'un problema de programació lineal de dues variables mitjançant la seva representació gràfica. |
| 1.3 | Classificar un problema de programació lineal de dues variables (problema amb solució única o amb òptims alternatius, problema il·limitat o problema infactible) |
| 1.4 | Saber expressar un problema de PL en la forma estàndard. |
| 1.5 | Donat un problema de PL de dues variables, calcular totes les solucions bàsiques i bàsiques factibles. |
| 1.6 | Ser capaç de resoldre computacionalment problemes senzills de PL amb l'ajut d'un llenguatge de modelització matemàtica. |





# Recordem la forma general d'un problema d'optimització

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \min\limits_{x\in\Re^n} & f(x) & \textbf{Funcio Objectivu} \\ \text{subjecte a (s.a.):} & h(x)=\mathbf{0} & \textbf{Constriccions d'igualtat} \\ & g(x)\le \mathbf{0} & \textbf{Constriccions de desigualtat} \\ & x\in X & \textbf{Domini de definicio} \end{cases}$$

on $x\in\Re^n$ són les **variables de decisió**, o senzillament, **variables**, I

$$f:\Re^n\to\Re \qquad h:\Re^n\to\Re^m \qquad g:\Re^n\to\Re^l \qquad X\subseteq\Re^n$$

Amb : $f, h, g \in C^2$

# Forma general d'un problema de Programació Lineal (PL)

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{s.a.:} & \\
& \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_j \qquad j=1,2,\ldots,m \\
& l_i \le x_i \le u_i \qquad i=1,2,\ldots,n
\end{cases}
\rightarrow
(\mathrm{P})\begin{cases}
\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & c'x \qquad c\in\mathbb{R}^n \\
\text{s.a.:} & \\
& Ax \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b \qquad A\in\mathbb{R}^{m\times n},\ b\in\mathbb{R}^m \\
& l \le x \le u \qquad l,u\in\mathbb{R}^n
\end{cases}
$$

on ***c, l, u*** i ***A*** són els **paràmetres del problema**, que són les dades conegudes del problema.





# Un exemple de problema de PL

L'empresa "*Blue Ridge Hot Tubs*" fabrica dos tipus de banyeres d'hidromassatge amb les següents característiques

| | **Aqua-Spa** | **Hydro-Lux** |
|---|---|---|
| **Bombes** | 1 | 1 |
| **Mà obra** | 9 hores | 6 hores |
| **Canonades** | 12 feet | 16 feet |
| **Benefici unit.** | 350 € | 300 € |

N'hi ha 200 bombes, 1566 hores de mà d'obra, i 2880 ft de canonada disponibles.

# Formulació com a problema de PL del problema "Blue Ridge Hot Tubs"

$$
\begin{aligned}
\text{max: } & 350x_1 + 300x_2 \\
\text{s.a.: } & 1x_1 + 1x_2 \leq 200 \\
& 9x_1 + 6x_2 \leq 1566 \\
& 12x_1 + 16x_2 \leq 2880 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ens plantegem ara **resoldre gràficament** aquest problema

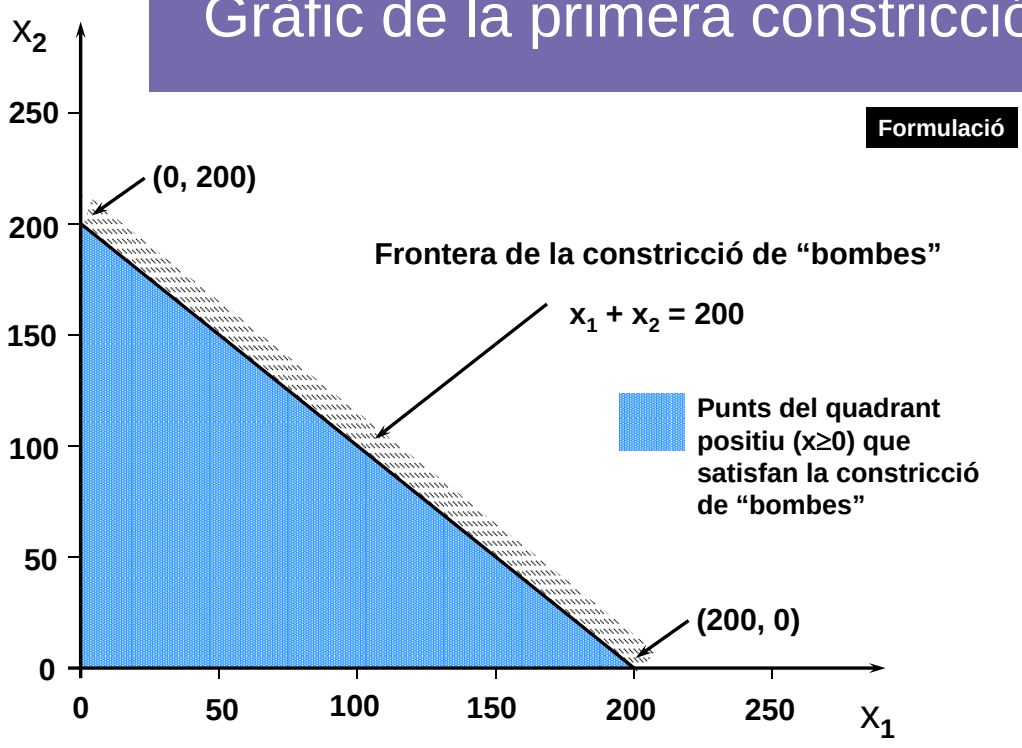






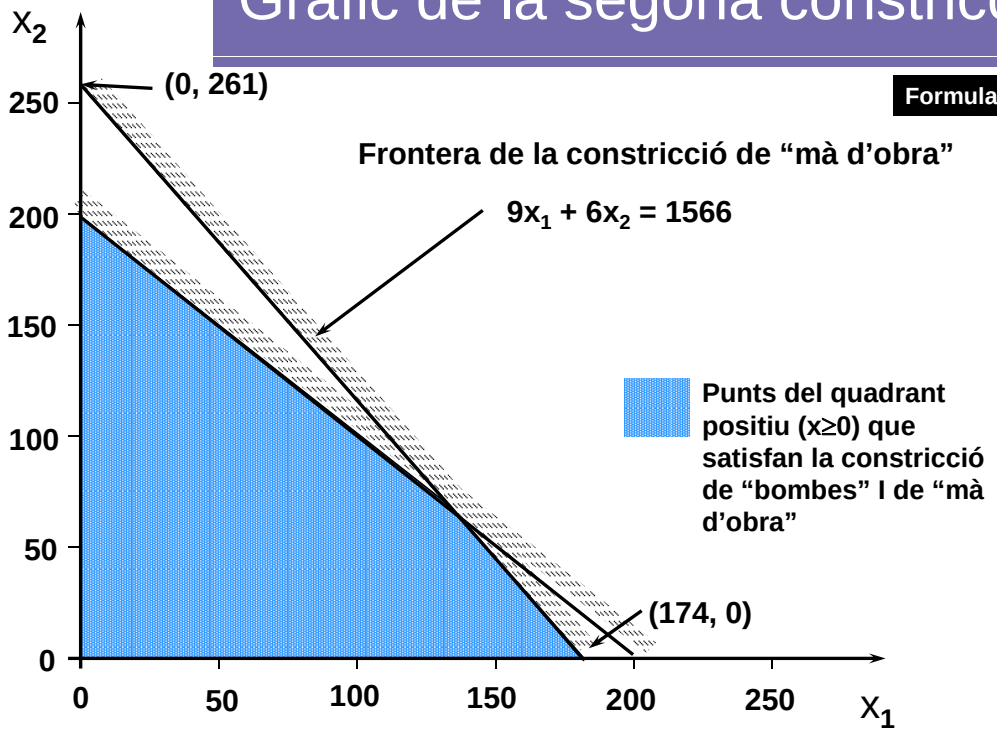
# Gràfic de la primera constricció

Formulació



# Gràfic de la segona constricció

Formulació

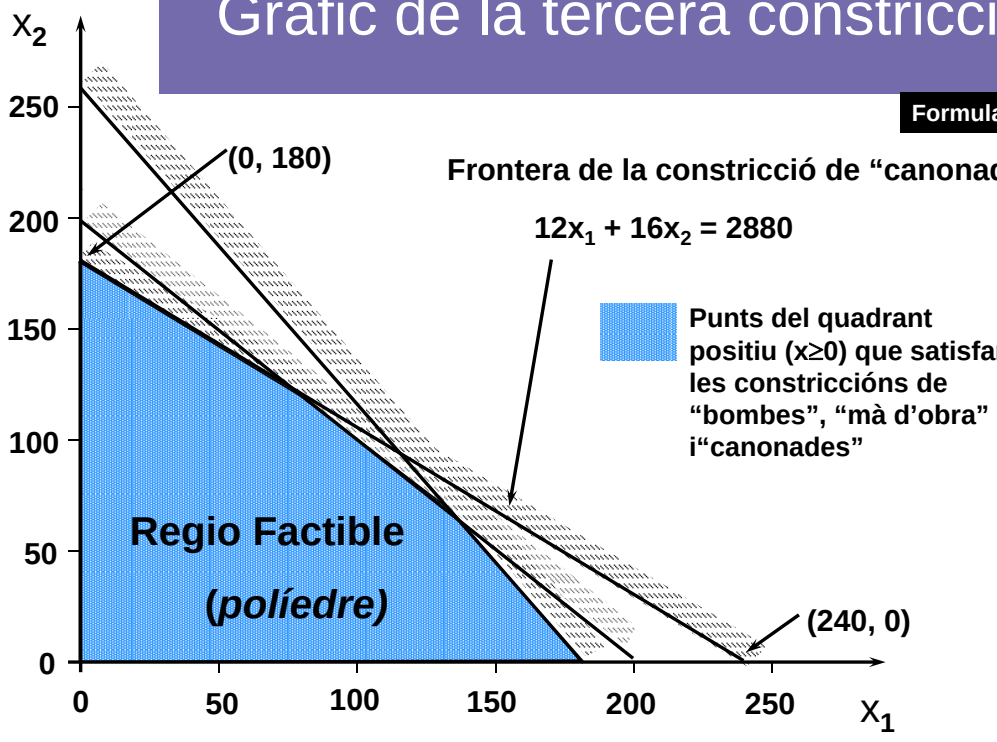




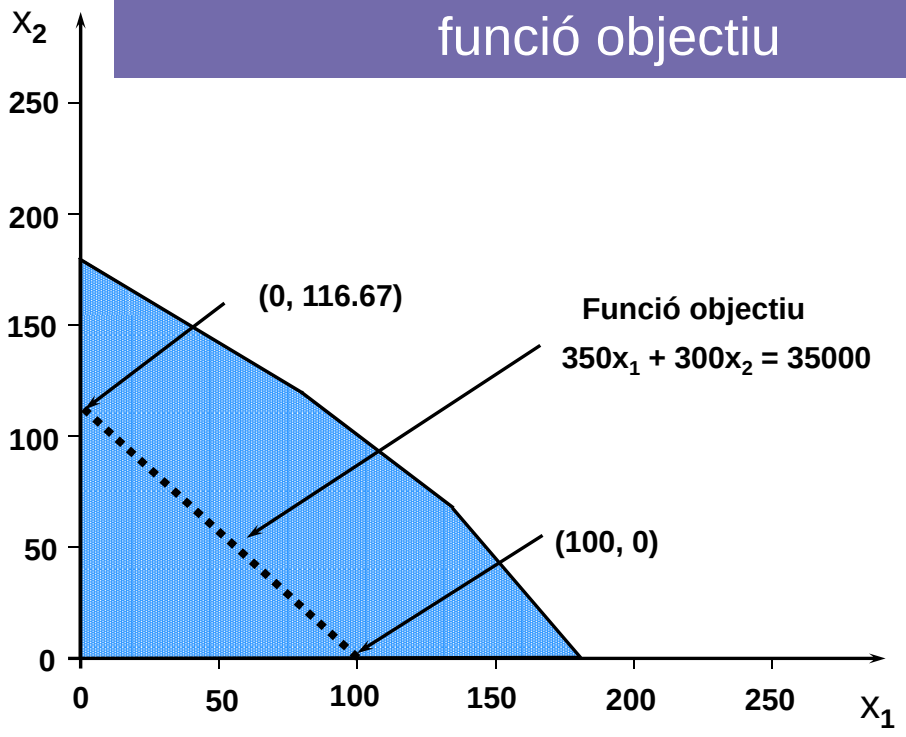



# Gràfic de la tercera constricció

Formulació



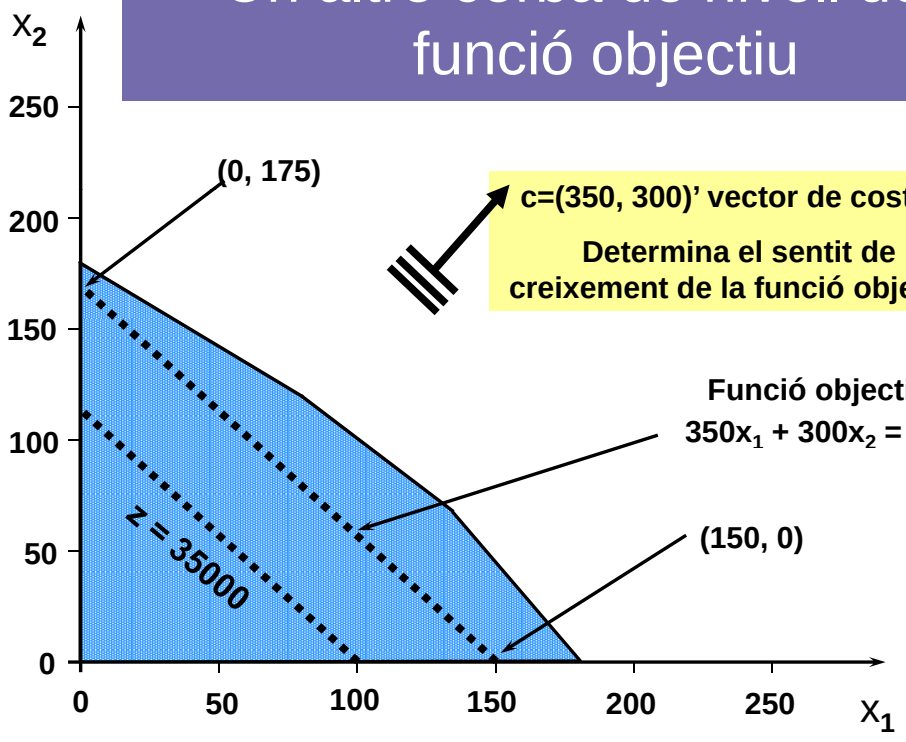
# Gràfic d'una corba de nivell de la funció objectiu



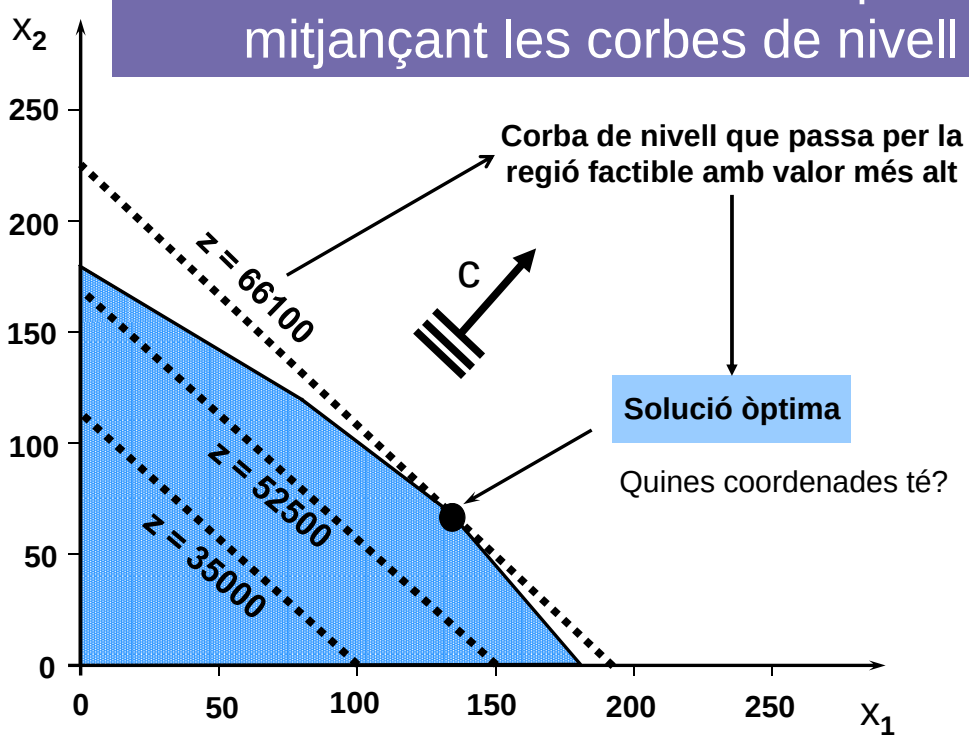





# Un altre corba de nivell de la funció objectiu



# Identificació de la solució òptima mitjançant les corbes de nivell

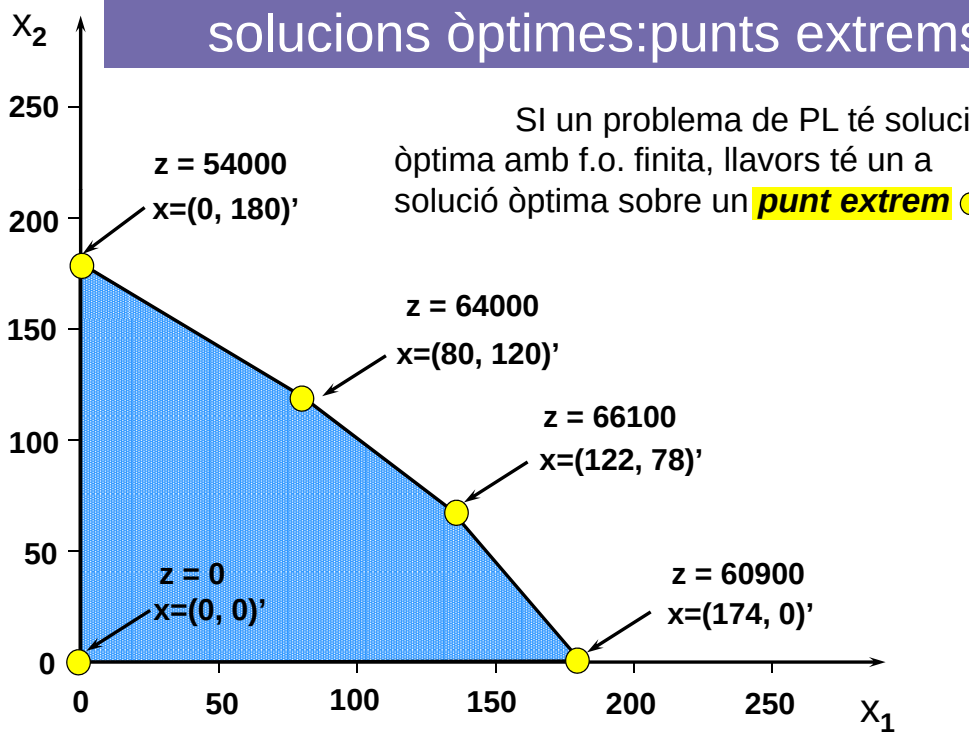







# Punts factibles candidats a ser solucions òptimes:punts extrems

SI un problema de PL té solució òptima amb f.o. finita, llavors té un a solució òptima sobre un ***punt extrem***



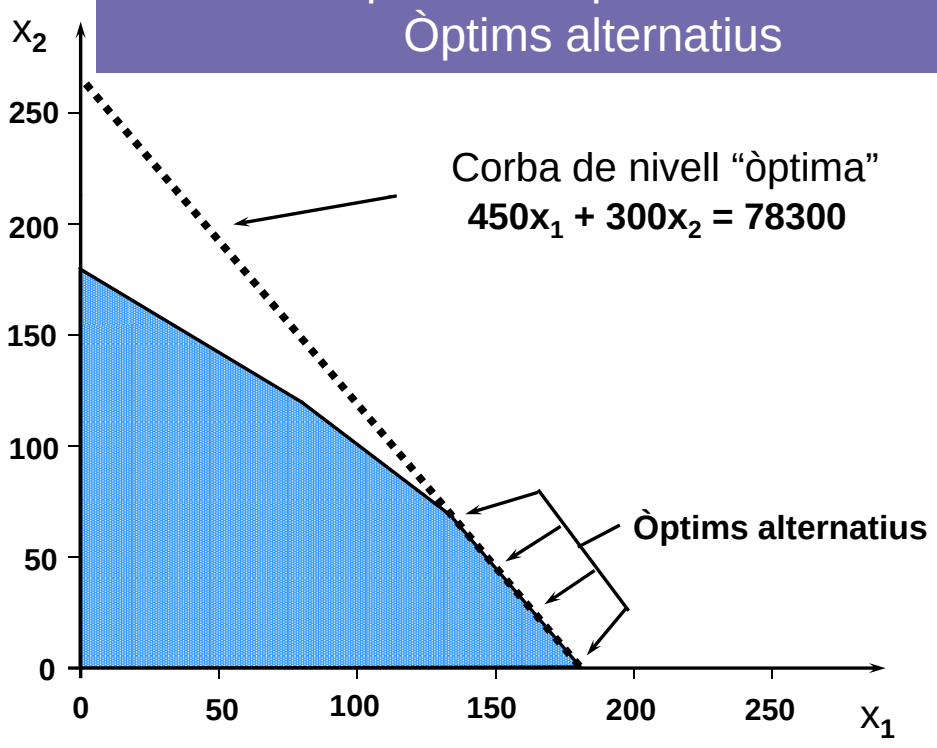
# Resum del mètode gràfic de resolució de problemes de PL

1. **Dibuixar la recta associada a cada constricció.**
2. **Identificar la regió factible.**
3. **Representar el vector de costos *c*.**
4. **Identificar el punt extrem òptim.**
5. **Calcular la solució òptima.**

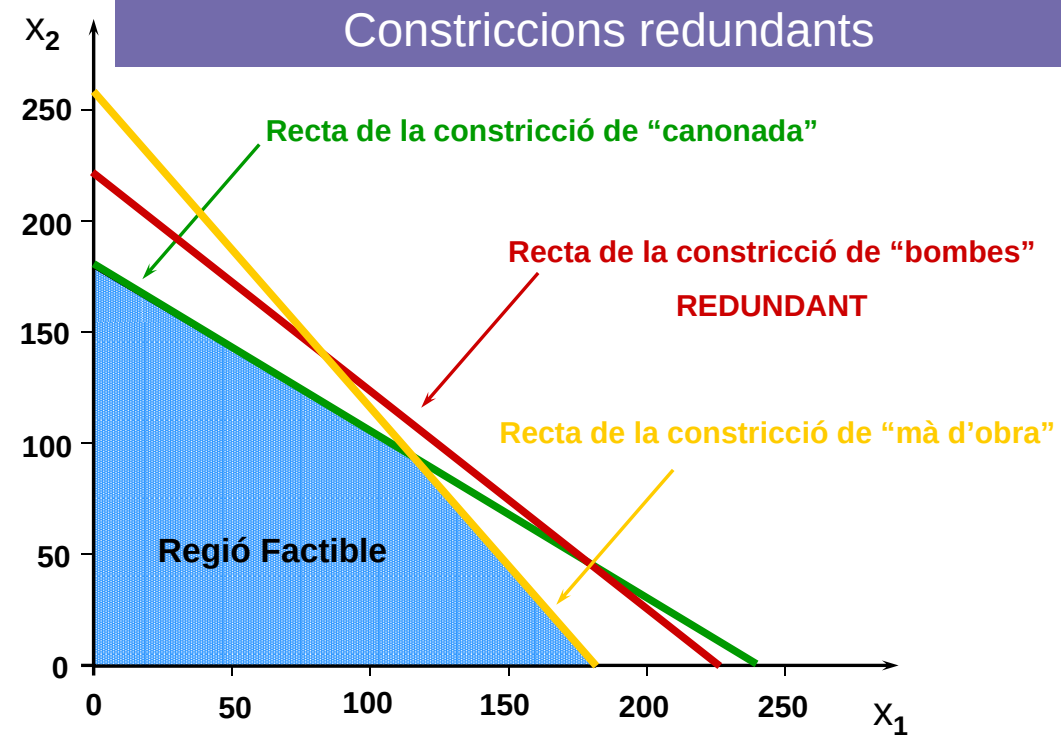




# Casos especials de problemes de PL (I): Òptims alternatius



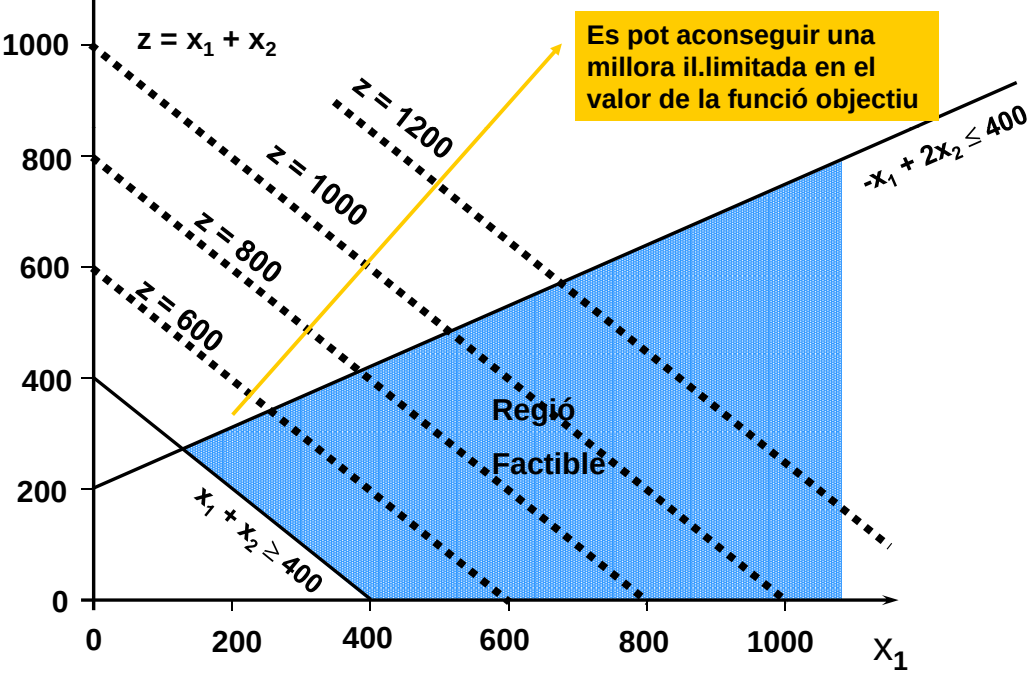
# Casos especials de prob. de PL (II): Constriccions redundants



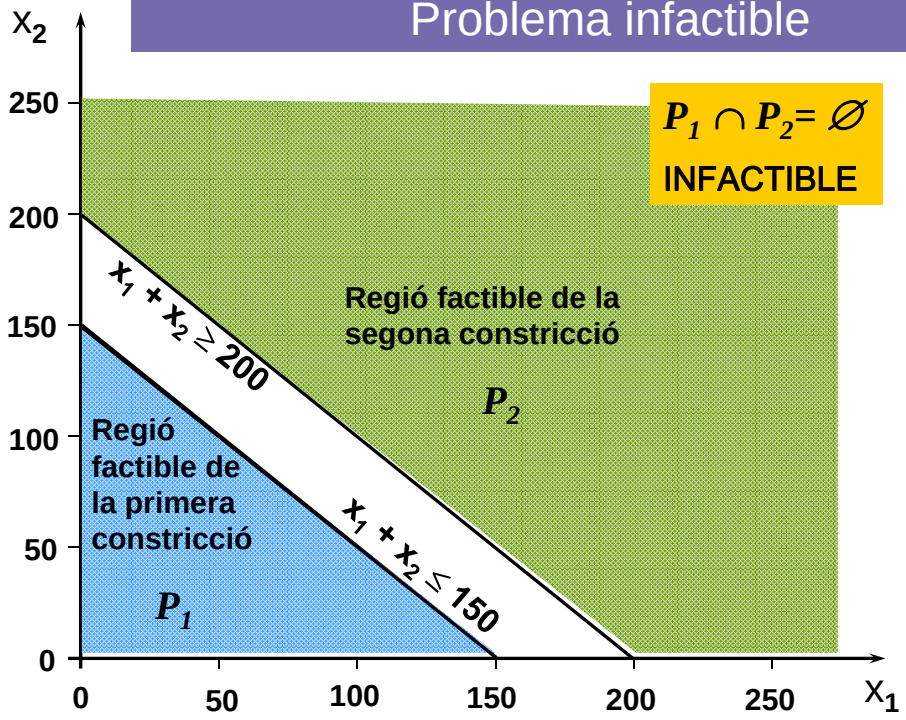





# Casos especials de prob. de PL (III): Problema il.limitat



# Casos especials de prob. de PL (IV): Problema infactible








# Exemple (problema 1)

$a)$
$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$b)$
$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$c)$
$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$d)$
$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure} \end{aligned}$$

# Forma estàndar d'un problema PL

- Forma estàndar d'un problema de PL:

$$(PL)\begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a.:} & Ax = b\,,\ b \geq [0] \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- $max\ c'x \longrightarrow min\ (-c)'x$
- $a^j x \leq b_j \longrightarrow a^j x + x_k = b_j\,,\ x_k \geq 0$

  $x_k$ : variable de folga ("holgura", "slack")
- $a^j x \geq b_j \longrightarrow a^j x - x_l = b_j\,,\ x_l \geq 0$

  $x_l$ : variable d'escreix ("exceso", "surplus")
- $x_i \leq 0 \longrightarrow y_i = -x_i\,,\ y_i \geq 0$
- $x_i$ *lliure* $\longrightarrow x_i = u_i - v_i\,,\ u_i, v_i \geq 0$





# Exemple de pas a la forma estàndar

## *"Blue Ridge Hot Tubs"*

$$\begin{array}{lll} \min z = -350x_1 - 300x_2 & & \} \text{ benefici} \\ \text{s.a.:}\quad x_1 + x_2 + x_3 & = 200 & \} \text{ bombes} \\ \quad 9x_1 + 6x_2 + x_4 & = 1566 & \} \text{ mà obra} \\ \quad 12x_1 + 16x_2 + x_5 & = 2880 & \} \text{ canonades} \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & \} \text{ no negativitat} \end{array}$$

# Exemple (problema 6)

$a)$
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1+2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rcl} 2x_1 \quad +x_2 & \geq & 4 \\ 3x_1 & \geq & 6 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 & & \end{array} \end{array}$$

$b)$
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1-2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rcl} 2 \leq 2x_1 \quad +3x_2 & \leq & 4 \\ 5 \leq 4x_1 \quad +6x_2 & \leq & 6 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 4 & & \end{array} \end{array}$$

$c)$
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1+2x_2-x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & \dfrac{2x_1+x_2-2x_3}{x_3} \geq 10 \\ & 3x_1+3x_3=6 \\ & x_1+x_4 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \text{ lliure} \end{array}$$

$d)$
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1-2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & \begin{array}{rcl} 3x_1 \quad +2x_2 & \leq & 5 \\ 2x_1 \quad -x_2 & \geq & 10 \\ -5 \leq x_1 \leq 5 & & \\ -10 \leq x_2 \leq 10 & & \end{array} \end{array}$$





# Solucions Bàsiques Factibles (SBF)

- Considereu el problema PL en la forma estàndar:

$$(\text{PL}) \begin{cases} \min & c'x \\ \text{s.a.:} & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

- **Solució Bàsica**: solució del sistema $Ax=b$ ($A \in \Re^{n \times m}$, $n \geq m$, $A$ de rang complet), que s'obté fixant $n$-$m$ variables a zero (***variables no bàsiques, $x_N$***) i resolent per a les restants $m$ variables (***variables bàsiques, $x_B$***)

$$Ax = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \;;\; Bx_B + Nx_N = b$$

$$\left.\begin{array}{l} Bx_B = b - Nx_N \\ x_N = [0] \end{array}\right\} \; Bx_B = b \rightarrow \text{si } B \text{ no singular}: \quad x_B = B^{-1}b$$

- **Solució Bàsica Factible**: solució bàsica que és factible ( $x \geq 0$).

# Exemple : càlcul d'una solució bàsica

Min z = $-350x_1 - 300x_2$

s.a.:

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 + x_3 &= 200 \\
9x_1 + 6x_2 + x_4 &= 1566 \\
12x_1 + 16x_2 + x_5 &= 2880 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Calculem la s.b. associada a $x_B = [\, x_1, x_2, x_3]'$:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 12 & 16 & 0 \end{bmatrix} ; \det(B) = 72 \Rightarrow \text{no singular}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left.\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 200 \\ 9x_1 & +6x_2 & & = & 1566 \\ 12x_1 & +16x_2 & & = & 2880 \end{array}\right\} \rightarrow x_B = \begin{bmatrix} 108 \\ 99 \\ \boxed{-7} \end{bmatrix}$$

No és factible



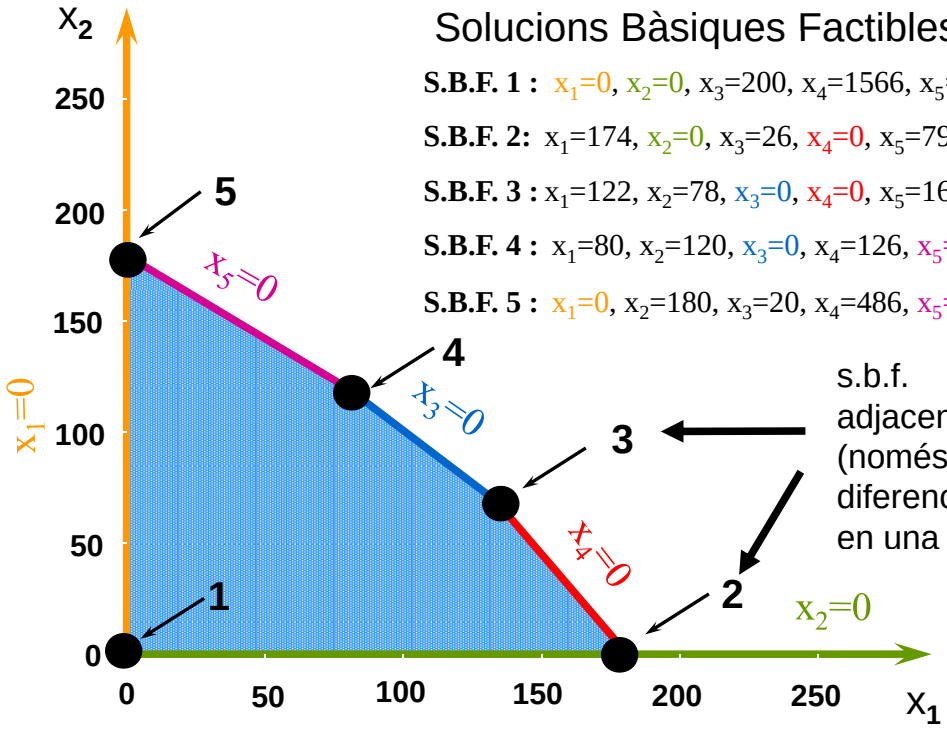


# Solucions Bàsiques i Bàsiques Factibles

| | $x_B$ | $x_N$ | $x$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_3, x_4, x_5$ | $x_1, x_2$ | $x_1=0, x_2=0, x_3=200, x_4=1566, x_5=2880$ | 0 |
| 2 | $x_1, x_3, x_5$ | $x_2, x_4$ | $x_1=174, x_2=0, x_3=26, x_4=0, x_5=792$ | 60900 |
| 3 | $x_1, x_2, x_5$ | $x_3, x_4$ | $x_1=122, x_2=78, x_3=0, x_4=0, x_5=168$ | 66100 |
| 4 | $x_1, x_2, x_4$ | $x_3, x_5$ | $x_1=80, x_2=120, x_3=0, x_4=126, x_5=0$ | 64000 |
| 5 | $x_2, x_3, x_4$ | $x_1, x_5$ | $x_1=0, x_2=180, x_3=20, x_4=486, x_5=0$ | 54000 |
| 6 | $x_1, x_2, x_3$ | $x_4, x_5$ | $x_1=108, x_2=99, x_3= -7, x_4=0, x_5=0$ | 67500 |
| 7 | $x_1, x_3, x_4$ | $x_2, x_5$ | $x_1=240, x_2=0, x_3= -40, x_4= -594, x_5=0$ | 84000 |
| 8 | $x_1, x_4, x_5$ | $x_2, x_3$ | $x_1=200, x2=0, x_3=0, x_4= -234, x_5=480$ | 70000 |
| 9 | $x_2, x_4, x_5$ | $x_1, x_3$ | $x_1=0, x_2=200, x_3=0, x_4=366, x_5= -320$ | 60000 |
| 10 | $x_2, x_3, x_5$ | $x_1, x_4$ | $x_1=0, x_2=261, x_3= -61, x_4=0, x_5= -1296$ | 78300 |

| Solucións bàsiques factibles | solució bàsica factible òptima | solucions bàsiques infactibles |
|---|---|---|

# Solucions Bàsiques Factibles i punts extrems




## Solucions Bàsiques Factibles

**S.B.F. 1 :** $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=200$, $x_4=1566$, $x_5=2880$

**S.B.F. 2:** $x_1=174$, $x_2=0$, $x_3=26$, $x_4=0$, $x_5=792$

**S.B.F. 3 :** $x_1=122$, $x_2=78$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=168$

**S.B.F. 4 :** $x_1=80$, $x_2=120$, $x_3=0$, $x_4=126$, $x_5=0$

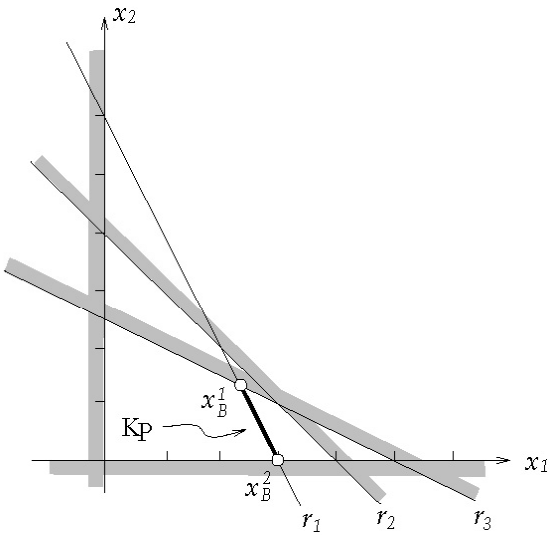
**S.B.F. 5 :** $x_1=0$, $x_2=180$, $x_3=20$, $x_4=486$, $x_5=0$

s.b.f. adjacents (només es diferencien en una v.b.)





# Exemple (problema 14)

a)

$$
(\mathbf{PL})\left\{
\begin{array}{ll}
\min & z = 5x_1 - x_2 \\
\text{s.a.:} & \\
& 2x_1 + x_2 = 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x \geq 0
\end{array}
\right.
$$