Col·lecció de problemes resolts de Programació Lineal Entera

(v.11.00)

Jordi Castro Pérez, F. Javier Heredia Cervera

Group on Numerical Optimization and Modeling

(GNOM, http://gnom.upc.edu)

Dept. d'Estadística i Investigació Operativa

Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

Es presenta en aquest llibre una col·lecció de problemes de Programació Lineal i Entera. El nivell dels problemes presentats fa que la col·lecció sigui especialment adequada per a assignatures introductòries d'Investigació Operativa en cursos de diferents Enginyeries Superiors i Tècniques, així com Graus d'Estadística i Matematiques.

Els problemes s'han dividit en quatre apartats: problemes de modelització, problemes de programació lineal, problemes de programació lineal entera. Els exercicis de la part de modelització inclouen tant problemes provinents del camp de les enginyeries com problemes clàssics de la Investigació Operativa que tot futur titulat he de conixer. Pel que fa a les tres unitats de programació lineal, programació lineal entera i programació no lineal, els problemes presentats tenen l'objectiu de fixar i reforçar les nocions que els alumnes reben a les classes de teoria. La major part dels problemes d'aquestes unitats són de caràcter pràctic, tot i que també hi ha alguns teòrics de dificultat mitjana.

La col·lecció es troba constituïda per problemes inèdits, problemes clàssics d'Optimització, i variants de casos extrets de l'extensa bibliografia existent sobre la matèria. La col·lecció és fruit del treball dels autors durant els seus anys de docència a diferents assignatures de la UPC i de la Universitat Rovira i Virgili (URV) en les Enginyeries Informàtica i Química, Diplomatura d'Estadística, Llicenciatures de Matemàtiques i de CC. i TT. Estadístiques i en el Master Oficial d'Estadística i Ivestigació. Operativa.

Els professors Jordi Castro i F. Javier Heredia són professors titulars del departament d'Estadística i Investigació Operativa de la UPC i membres del grup de recerca en optimització numèrica i modelització de la UPC (GNOM, `http://gnom.upc.edu`).

Barcelona, febrer de 2011.

Índex

1 Problemes de programació lineal. 1
1.1. Resolució gràfica. 1
1.2. Transformació a la forma estàndar. 3
1.3. Solucions bàsiques. 6
1.4. Algorisme del símplex primal. 6
1.5. Dualitat. 10
1.6. Anàlisi post-òptima. 14

2 Problemes de programació lineal entera. 23

1 Problemes de programació lineal.

1.1 Resolució gràfica.

1. Solució de problemes pel mètode gràfic †

Determinar de forma gràfica la solució dels següents problemes de programació lineal:

$a)$
$$\begin{array}{l} \min \quad -3x_1 - 4x_2 \\ \text{subj. a} \\ \quad 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ \quad 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$b)$
$$\begin{array}{l} \min \quad -3x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} \\ \quad 4x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ \quad 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$c)$
$$\begin{array}{l} \min \quad -x_1 - x_2 \\ \text{subj. a} \\ \quad x_1 + x_2 \leq 3 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ \quad 3x_1 + x_2 = 3 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$d)$
$$\begin{array}{l} \min \quad 3x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \\ \quad 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure} \end{array}$$

$e)$
$$\begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \\ \quad 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \text{ lliure} \end{array}$$

$f)$
$$\begin{array}{l} \min \quad x_1 + x_2 \\ \text{subj. a} \\ \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad 0 \leq x_1 \leq 3/2 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal **(PL)**:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min & z = c'x \\ \text{s.a.:} & \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu gràficament la solució de **(PL)** per $c' = [\,-3 \quad 1\,]$. Classifiqueu el problema.
b) Trobeu gràficament la solució de **(PL)** per $c' = [\,-2 \quad 1\,]$. Classifiqueu el problema.
c) Trobeu el valor del terme independent de la segona constricció a partir del qual **(PL)** seria infactible.

3. Resolució gràfica de problemes (PL)*

Considereu el següent problema de programació lineal **(PL)**:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min & z = c_1x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & \\ & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Trobeu gràficament la solució del problema **(PL)** per als diferentes valors possibles de c_1.

4. El coeficient de la funció objectiu *

Determineu per a quin rang de valors del coeficient p té un únic punt òptim, té òptims alternatius, o es il·limitat el següent problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & px_1 - x_2 \\ \text{subj. a} \quad & \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Feu el mateix estudi que abans considerant ara la funció objectiu $px_1 + x_2$.

5. Minimització d'una folga *

Solucioneu de forma gràfica el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{ll} \max & x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., 4 \end{array}$$

I si la funció objectiu fos $\max x_4$?

1.2 Transformació a la forma estàndar.

6. Més problemes de transformació a la forma estàndard

Transformeu a la forma estàndard els següents problema de programació lineal (i si és possible, intenteu-los simplificar eliminant variables i/o restriccions).

a)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1 + 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 2x_1 \quad +x_2 \quad \geq \quad 4 \\ & 3x_1 \qquad\quad \geq \quad 6 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 2 \quad \leq \quad 2x_1 \quad +3x_2 \quad \leq \quad 4 \\ & 5 \quad \leq \quad 4x_1 \quad +6x_2 \quad \leq \quad 6 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 4 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{subj. a} & \\ & \dfrac{2x_1 + x_2 - 2x_3}{x_3} \geq 10 \\ & 3x_1 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + x_4 \geq 10 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \text{ lliure} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2} & x_1 - 2x_2 \\ \text{subj. a} & \\ & 3x_1 \quad +2x_2 \quad \leq \quad 5 \\ & 2x_1 \quad - \ x_2 \quad \geq \quad 10 \\ & -5 \leq x_1 \leq 5 \\ & -10 \leq x_2 \leq 10 \end{array}$$

7. Transformació a la forma estàndar*.

Transformeu el següent problema lineal a la forma estàndar:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \max & z = 6x_1 - 5x_2 + 3x_4 \\ \text{s.a.:} & \\ & x_1 - 3x_2 = -5 \\ & 6 \leq x_1 + x_2 - 5x_4 \leq 7 \\ & \dfrac{3x_1 + 7x_2}{3x_3} \geq 4 \\ & x_1 \text{ lliure}\,,\ x_2 \geq 0\,,\ x_3 \leq 0\,,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

8. Transformació a la forma estàndard *

Transformeu a la forma estàndard el següent problema de programació lineal:

$$\begin{array}{l} \max\limits_{x_1,x_2,x_3} \quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{subj. a} \\ \qquad \begin{array}{ccccccc} 4 & \leq & 2x_1 & +x_2 & +\ x_3 & \leq & 20 \\ & & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq & 6 \end{array} \\ \qquad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 3 \quad x_3 \text{ lliure} \end{array}$$

9. Un problema de programació lineal "disfressat" *

Formular com a problema de programació lineal (i simplificar-lo tot el possible):

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} \quad \ln x_1 \\ \text{subj. a} \\ \qquad x_1x_2x_3 \geq e^5 \\ \qquad \dfrac{x_1}{x_2} = x_3 \\ \qquad 0 < x_1 \leq e^2 \quad x_2 \geq e^4 \quad x_3 > 0 \end{array}$$

Per què creus que els límits de les variables x_1 i x_3 s'han definit com $x_1 > 0$ i $x_3 > 0$, en comptes de $x_1 \geq 0$ i $x_3 \geq 0$?

10. Valor absolut a les restriccions *

Escriure com a problema de programació lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1+3x_2+2x_3 \\
\text{subj. a} & \\
& \begin{array}{rrrcl} x_1 & +4x_2 & +x_3 & \geq & 5 \\ |3x_1 & -2x_2| & & \leq & 3 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & & \end{array}
\end{array}
$$

Podríem tranformar-lo en un problema de programació lineal si la segona restricció fos $|3x_1 + 2x_2| \geq 3$?

11. Valor absolut a la funció objectiu*

Formular com a problema de programació lineal

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} & c^T|x| \\
\text{subj. a} & Ax = b
\end{array}
$$

sabent que totes les components c_i del vector de costos c verifiquen $c_i \geq 0$. (Nota: aquest problema és d'una certa dificultat).

12. Funció objectiu igual al màxim d'una sèrie de valors *

Una companyia vol minimitzar els costos de producció en una determinada planta. Té perfectament determinades les restriccions del problema, i sap que la funció objectiu és lineal. Ha encarregat a tres enginyers de la planta que determinin el vector de costos de la funció objectiu, i ha observat que tots ells han proporcionat tres vectors c_A, c_B i c_C semblants, però no iguals. Per curar-se en salut, la companyia decideix optimitzar el següent problema:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \max\{c_A^T x, c_B^T x, c_C^T x\} \\
\text{subj. a} & \\
& Ax = b \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

D'aquesta forma, donat un punt x qualsevol, el seu valor de funció objectiu serà el que té un cost més elevat segons les estimacions del vector de costos dels tres enginyers.

La companyia, però, només disposa d'eines informàtiques per solucionar problemes de programació lineal. Aleshores, pot solucionar el problema anterior amb els paquets de programació lineal que té? Com hauria de transformar el problema?

13. Transformació en restriccions de desigualtat *

Sovint interessa considerar la regió factible d'un problema de programació lineal com el conjunt de punt formats per la intersecció d'un nombre finit de semiespais tancats, és a dir, com el conjunt de punts definit per $\{a_1^T x \leq b_1, \ldots, a_m^T x \leq b_m\}$. No sempre, però, trobem la nostra regió factible expressada de la forma anterior, ja que podem tenir restriccions d'igualtat

i de $\geq$. Penseu com es pot transformar el problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subj. a} \quad & \\ & a_1^T x = b_1 \\ & a_2^T x \geq b_2 \\ & a_3^T x \leq b_3 \end{aligned}$$

en un d'equivalent de forma que totes les restriccions siguin de $\leq$. Feu-ho sense afegir variables artificials.

1.3 Solucions bàsiques.

14. Solucions bàsiques*

Trobeu totes les solucions bàsiques factibles dels següents problemes:

a)

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a.:} \\ \qquad 2x_1 + x_2 = 6 \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = -4x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} \\ \qquad 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ \qquad -x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

15. Solucions bàsiques*

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$\textbf{(PL)} \begin{cases} \min \quad z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a.:} \\ \qquad x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ \qquad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu totes les soluciones bàsiques factibles de **(PL)**.
b) Trobeu totes les solucions bàsiques no factibles de **(PL)**.

1.4 Algorisme del símplex primal.

16. Fase I*

Considereu un cert problema d'optimització amb una regió factible definida per les constric-