

Avances recientes en la solución del problema  
de flujos multiartículo

Jordi Castro  
Statistics and Operations Research Department  
Universitat Politècnica de Catalunya  
Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona (Spain)  
[jcastro@eio.upc.es](mailto:jcastro@eio.upc.es)  
DR 2000-23  
December 2000

Report available from <http://www-eio.upc.es/~jcastro>



# Avances recientes en la solución del problema de flujos multiartículo<sup>\*</sup>

Jordi Castro

Departamento de Estadística e Investigación Operativa  
Universitat Politècnica de Catalunya  
Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona  
jcastro@eio.upc.es

## Resumen

Los flujos multiartículo han mostrado ser una potente herramienta de modelización, y han sido aplicados con éxito en un gran número de campos, entre ellos la planificación de operaciones militares y las telecomunicaciones. En este trabajo se discuten las posibles extensiones de un reciente algoritmo especializado de punto interior a problemas de flujos multiartículo no-orientados y de flujos multiartículo cuadráticos, convexos y separables. Se presentan resultados computacionales preliminares donde se compara el algoritmo de punto interior especializado con CPLEX 6.5 en la solución de problemas multiartículo cuadráticos de hasta medio millón de variables.

**Palabras clave:** Métodos de punto interior, flujos multiartículo, optimización de gran escala, métodos de punto interior.

## 1. Introducción

Los problemas de optimización de flujos multiartículo son una generalización del problema clásico de flujos en redes. En el problema multiartículo deben enviarse  $k$  productos (los artículos) desde los nodos productores a los nodos consumidores, de forma que se garantice la capacidad conjunta de los arcos para todos los artículos.

Entre los campos donde los modelos de flujos multiartículo han sido aplicados con éxito hallamos el de la planificación de operaciones y las telecomunicaciones. Dentro del primer tipo destacan los denominados problemas PDS (*Patient Distribution System*)[2]. Estos problemas fueron desarrollados durante los años 80, y consisten en un modelo logístico para la evacuación de pacientes de una zona con un conflicto militar. Las instancias multiartículo proporcionadas por estos problemas no han podido ser solucionadas de forma eficiente y precisa hasta la actualidad.

Los problemas de redes provinientes del campo de las telecomunicaciones son inherentemente multiartículo. En estos problemas cada artículo representa el conjunto de mensajes (datos o voz) que deben ser enviados entre cada par de nodos emisor/receptor; el número de artículos acostumbra a ser, por tanto, muy elevado (en el caso extremo, igual al número de nodos de la red al cuadrado). En estos modelos a menudo hay que considerar la extensión denominada de flujos multiartículo no-orientados, donde los arcos no tienen orientación y permiten el flujo de datos en ambos sentidos.

---

<sup>\*</sup> Este trabajo ha sido subvencionado por el proyecto CICYT TAP99-1075-C02-02.

En los últimos años se han producido avances computacionales significativos en la solución de problemas multiartículo. Las nuevas estrategias de resolución propuestas pueden agruparse en cuatro tipos de métodos: métodos basados en el símplex, métodos de descomposición, métodos de aproximación y métodos de punto interior. En [4] se comentan y dan referencias sobre algunos de estos nuevos métodos. Para el caso de problemas de flujos multiartículo no-orientados en [6] se describen diversas estrategias de resolución.

En este trabajo se considera un método especializado de punto interior para problemas multiartículo. Este método fue introducido en [3] y puede ser considerado una estrategia eficiente de resolución para problemas multiartículo difíciles y de gran dimensión. Se mostrará como dicho algoritmo especializado puede ser directamente extendido al caso de problemas de flujos no-orientados, y cuadráticos convexos y separables.

La estructura del documento es como sigue. En la sección 2 se presentan las formulaciones del problema de flujos multiartículo, de flujos multiartículo cuadrático convexo y separable, y de flujos multiartículo no-orientado. En la sección 3 se resume el algoritmo especializado de punto interior y se muestra su extensión a problemas cuadráticos y no-orientados. Finalmente en la sección 4 se presentan algunos resultados computacionales preliminares en la solución de problemas cuadráticos de gran dimensión.

## 2. Formulación del problema multiartículo y extensiones

Considerando una red de  $m$  nodos,  $n$  arcos y  $k$  artículos, el problema de flujos multiartículo puede formularse como el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^k (c^i)^T x^i \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^k \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^k \\ u \end{bmatrix} \\ & 0 \leq x^i \leq u^i \quad i = 1 \dots k \\ & 0 \leq x^0 \leq u. \end{aligned} \tag{1}$$

Los vectores  $x^i \in \mathbb{R}^n$  representan los flujos para cada artículo, mientras que  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  son las holguras de las restricciones de capacidad mutua.  $N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de incidencias nodos-arcos del grafo dirigido que representa la red, y  $\mathbf{1}$  denota la matriz identidad de dimensión  $n \times n$ . Podemos considerar que  $N$  tiene rango completo (siempre podemos garantizarlo eliminando una de las ecuaciones de balance redundantes).  $c^i \in \mathbb{R}^n$  y  $u^i \in \mathbb{R}^n$  son respectivamente el vector de costes y las capacidades individuales para cada artículo de los arcos, mientras que  $u \in \mathbb{R}^m$  es el vector de capacidades mutuas. Finalmente  $b^i \in \mathbb{R}^m$

es el vector de inyecciones/extracciones para cada artículo en los nodos de la red.

Para el caso cuadrático nos ceñiremos a problemas convexos con Hessiana diagonal. En este caso se tiene una función objetivo cuadrática, convexa y separable

$$\min \sum_{i=1}^k ((c^i)^T x^i + \frac{1}{2} (x^i)^T Q^i x^i), \quad (2)$$

donde  $Q^i = \text{diag}(q_j^i, j = 1, \dots, n), q_j^i \geq 0$ . Esta función objetivo podría ser usada, por ejemplo, en las siguientes situaciones:

- Modelos donde se desee penalizar la ocupación excesiva de una línea respecto su capacidad máxima (por ejemplo, para garantizar una capacidad de reserva en el caso de tener que redistribuir el flujo de datos por fallos de algunas líneas). En este caso  $Q = \mathbf{I}$ .
- Modelos donde se desee obtener una distribución de flujos  $x$  similar a una ya existente  $\tilde{x}$  para acomodarse a un cambio en las inyecciones de los nodos. En este caso el término cuadrático sería  $(x - \tilde{x})^T (x - \tilde{x})$ .
- Resolución de los subproblemas que aparecen al abordar el problema de *diseño de redes* mediante un esquema de relajación por Lagrangianos aumentados [7, 8]

En el caso de flujos no-orientados debemos considerar dos variables por línea, donde cada una de ellas representará el flujo que circula en cada sentido. Si denotamos con  $x^{i+}$  y  $x^{i-}$  los flujos que circulan respectivamente en sentido directo e inverso, por cada artículo, podemos formular el problema de flujos multiartículo no-orientados como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^k ((c^{i+})^T x^{i+} + (c^{i-})^T x^{i-}) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} N & -N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & -N & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N & -N & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{1+} \\ x^{1-} \\ x^{2+} \\ x^{2-} \\ \vdots \\ x^{k+} \\ x^{k-} \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^k \\ u \end{bmatrix} \\ & 0 \leq x^{i+} \leq u^{i+} \quad i = 1 \dots k \\ & 0 \leq x^{i-} \leq u^{i-} \quad i = 1 \dots k \\ & 0 \leq x^0 \leq u. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. Algoritmo especializado de punto interior

Las formulaciones presentadas en el apartado anterior corresponden a problemas lineales y cuadráticos que pueden ser escritos en forma primal como

$$\min \left\{ c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x : Ax = b, x + s = u, x, s \geq 0 \right\}, \quad (4)$$

donde  $x, s, u \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$  y  $b \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ . El dual de (4) es

$$\max \left\{ b^T y - \frac{1}{2} x^T Q x - w u : A^T y - Q x + z - w = c, z, w \geq 0 \right\}, \quad (5)$$

donde  $y \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$  y  $z, w \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ .

Tanto para el problema multiartículo lineal y cuadrático como para el no-orientado se tiene que el número de restricciones es  $\tilde{m} = km + n$ , mientras que el número de variables es de  $\tilde{n} = (k + 1)n$  para los problemas de flujos multiartículo lineal y cuadrático, y de  $\tilde{n} = (2k + 1)n$  para el problema de flujos no-orientado. En el problema de flujos multiartículo cuadrático la matriz  $Q$  consta de  $k + 1$  bloques diagonales,  $k$  de ellos asociados con los costes cuadráticos de cada artículo  $Q^i, i = 1 \dots k$ , y el último  $Q^0$  relativo a los costes cuadráticos de las holguras de las restricciones de capacidad mutua.  $Q^0$  en principio sería nula, aunque no habría inconveniente en considerar una matriz diagonal no-negativa. Para los problemas lineales basta con considerar  $Q = 0$ .

La solución de los problemas (4) y (5) aplicando un método de punto interior se obtiene planteando el sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{aligned} r_{xz} &\equiv \mu e - XZe = 0 \\ r_{sw} &\equiv \mu e - SWe = 0 \\ r_b &\equiv b - Ax = 0 \\ r_c &\equiv c - (A^T y - Qx + z - w) = 0 \\ &(x, s, z, w) \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $e$  es un vector de 1's de dimensión apropiada, y cada matriz en mayúsculas es una matriz diagonal cuyas componentes corresponden a las del vector en minúsculas asociado. El conjunto de soluciones únicas para cada valor de  $\mu$  en (6) dan lugar al denominado camino central, el cual, cuando  $\mu \rightarrow 0$ , tiende hacia los puntos solución de (4) y (5). La solución de (6) se obtiene aplicando un método de Newton truncado, disminuyendo el valor de  $\mu$  a cada iteración. Dicho procedimiento se denomina *algoritmo de seguimiento del camino central* (ver [11] para una descripción detallada). La Figura 1 detalla los pasos del algoritmo de seguimiento de camino central.

El algoritmo especializado introducido en [3] para problemas de flujos multiartículo lineales se basa en la solución del sistema  $(A\Theta A^T)\Delta y = \bar{b}$  (el paso más costoso del algoritmo) aprovechando la estructura de la matriz  $A$  y combinando un procedimiento de resolución directo (Cholesky) con otro iterativo (gradiente conjugado preconditionado, GCP). Dicha estrategia también puede ser aplicada al problema de flujos multiartículo cuadrático y al de flujos no-orientados. Para el problema cuadrático, y considerando un particionamiento adecuado de la matriz diagonal  $\Theta$  definida en el paso 3 del algoritmo de la Figura 1, se tiene:

Figura 1: Algoritmo de seguimiento del camino central.

**Algoritmo** *SeguimientoCaminoCentral*( $A, Q, b, c, u$ ):

- 1 Inicializar  $x > 0, s > 0, y, z > 0, w > 0$ ;
- 2 **mientras**  $(x, s, y, z, w)$  no es solución **hacer**
- 3      $\Theta = (X^{-1}Z + S^{-1}W + Q)^{-1}$ ;
- 4      $r = S^{-1}r_{sw} + r_c - X^{-1}r_{xz}$ ;
- 5      $(A\Theta A^T)\Delta y = r_b + A\Theta r$ ;
- 6      $\Delta x = \Theta(A^T \Delta y - r)$ ;
- 7      $\Delta w = S^{-1}(r_{sw} + W\Delta x)$ ;
- 8      $\Delta z = r_c + \Delta w + Q\Delta x - A^T \Delta y$ ;
- 9     Calcular  $\alpha_P \in (0, 1], \alpha_D \in (0, 1]$ ;
- 10     $x \leftarrow x + \alpha_P \Delta x$ ;
- 11     $(y, z, w) \leftarrow (y, z, w) + \alpha_D(\Delta y, \Delta z, \Delta w)$ ;
- 12 **fin\_mientras**

**Fin\_algoritmo**

$$A\Theta A^T = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{B}{C^T} & \frac{C}{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} N\Theta^1 N^T & \dots & 0 & N\Theta^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & N\Theta^k N^T & N\Theta^k \\ \hline \Theta^1 N^T & \dots & \Theta^k N^T & \Theta^0 + \sum_{i=1}^k \Theta^i \end{array} \right], \quad (7)$$

donde  $\Theta^i = ((X^i)^{-1}Z^i + (S^i)^{-1}W^i + Q^i)^{-1}$ ,  $i = 0, 1 \dots k$ . Como  $Q^i$  es una matriz diagonal,  $\Theta^i$  es directamente calculable.

Para el problema de flujos no-orientados la estructura de  $A\Theta A^T$  es

$$\begin{aligned} A\Theta A^T &= \left[ \begin{array}{c|c} \frac{B}{C^T} & \frac{C}{D} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} N(\Theta^{1+} + \Theta^{1-})N^T & \dots & 0 & N(\Theta^{1+} + \Theta^{1-}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & N(\Theta^{k+} + \Theta^{k-})N^T & N(\Theta^{k+} + \Theta^{k-}) \\ \hline (\Theta^{1+} + \Theta^{1-})N^T & \dots & (\Theta^{k+} + \Theta^{k-})N^T & \Theta^0 + \sum_{i=1}^k (\Theta^{i+} + \Theta^{i-}) \end{array} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

El algoritmo especializado de [3] reduce el cálculo de  $(A\Theta A^T)\Delta y = \bar{b}$  (paso 5 de la Figura 1) a la solución de  $k$  sistemas mediante una factorización de Cholesky de los  $k$  bloques diagonales de  $B$  en (7) o (8), y la solución de un sistema con la matriz  $H = D - C^T B C$ , calculado mediante el método iterativo del GCP. Para garantizar la eficiencia del GCP, en [3] se presenta un preconditionador específico para problemas de flujos multiartículo. Los requisitos para poder aplicar este preconditionador son:

- la matriz  $D$  debe ser definida positiva, y

- la matriz  $D + C^T BC$  debe ser definida positiva.

De (7) y (8) se tiene que las dos condiciones anteriores se garantizan para los problemas de flujos multiartículo cuadráticos y no-orientados, por lo que el preconditionador desarrollado en [3] puede ser aplicado también en estos casos. El preconditionador se obtiene truncando en un determinado término la siguiente serie infinita que proporciona el cálculo de la inversa de  $H$ :

$$H^{-1} = \left( \sum_{i=0}^{\infty} (D^{-1}(C^T BC))^i \right) D^{-1}. \quad (9)$$

La efectividad del preconditionador viene regida por el radio espectral de  $D^{-1}(C^T BC)$ , que siempre pertenece al intervalo  $[0, 1)$ . Valores cercanos a 1 proporcionan una menor efectividad del preconditionador (ver [3] para una descripción detallada). Puede comprobarse como la adición de un término cuadrático a la función objetivo aleja el radio espectral anterior del valor 1, por lo que el algoritmo especializado presenta un mejor comportamiento para problemas cuadráticos que para problemas lineales. Este resultado se observará en los resultados computacionales de la siguiente sección.

## 4. Resultados computacionales

Se han utilizado dos conjuntos de instancias multiartículo para evaluar el algoritmo especializado para problemas cuadráticos (no se presentan resultados para el problema de flujos no-orientados). Las instancias multiartículo cuadráticas se han generado mediante un metagenerador que a partir de un problema multiartículo lineal añade un término cuadrático

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n q_j^i (x_j^i)^2$$

a la función objetivo, siendo los coeficientes  $q_j^i$  valores obtenidos aleatoriamente de una distribución uniforme  $U[0, C]$ , donde

$$C = \sqrt{\left| \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n c_j^i}{kn} \right|},$$

en un intento por garantizar que el término cuadrático sea del mismo orden que el lineal. Para obtener una copia del metagenerador desarrollado puede contactarse con el autor.

El primer grupo de instancias se ha obtenido aplicando el metagenerador a 18 problemas multiartículo lineales obtenidos con el generador Mnetgen [1]. La Tabla 1 presenta las dimensiones de estas instancias. Las columnas “ $m$ ”, “ $n$ ”, y “ $k$ ” muestran el número de nodos, arcos y artículos. Las columnas “ $\tilde{n}$ ” indican el número de variables y restricciones del problemas resultante.

El segundo conjunto de instancias está formado por diez de los problemas PDS (*Patient Distribution System*)[2]. Cada instancia depende de un parámetro  $t$  que denota el horizonte de tiempo considerado en el estudio (en número de días). El tamaño de la red aumenta con  $t$ , mientras que el número de artículo es



Tabla 1: Dimensiones de los problemas cuadráticos Mnetgen

Problema	$m$	$n$	$k$	$\tilde{n}$	$\tilde{m}$
M <sub>64-4</sub>	64	524	4	2620	780
M <sub>64-8</sub>	64	532	8	4788	1044
M <sub>64-16</sub>	64	497	16	8449	1521
M <sub>64-32</sub>	64	509	32	16797	2557
M <sub>64-64</sub>	64	511	64	33215	4607
M <sub>128-4</sub>	128	997	4	4985	1509
M <sub>128-8</sub>	128	1089	8	9801	2113
M <sub>128-16</sub>	128	1114	16	18938	3162
M <sub>128-32</sub>	128	1141	32	37653	5237
M <sub>128-64</sub>	128	1171	64	76115	9363
M <sub>128-128</sub>	128	1204	128	155316	17588
M <sub>256-4</sub>	256	2023	4	10115	3047
M <sub>256-8</sub>	256	2165	8	19485	4213
M <sub>256-16</sub>	256	2308	16	39236	6404
M <sub>256-32</sub>	256	2314	32	76362	10506
M <sub>256-64</sub>	256	2320	64	150800	18704
M <sub>256-128</sub>	256	2358	128	304182	35126
M <sub>256-256</sub>	256	2204	256	566428	67740

Tabla 2: Dimensiones de los problemas cuadráticos PDS

Problema	$m$	$n$	$k$	$\tilde{n}$	$\tilde{m}$
PDS1	126	372	11	4464	1758
PDS10	1399	4792	11	57504	20181
PDS20	2857	10858	11	130296	42285
PDS30	4223	16148	11	193776	62601
PDS40	5652	22059	11	264708	84231
PDS50	7031	27668	11	332016	105009
PDS60	8423	33388	11	400656	126041
PDS70	9750	38396	11	460752	145646
PDS80	10989	42472	11	509664	163351
PDS90	12186	46161	11	553932	180207

Tabla 3: Resultados para los problemas cuadráticos Mnetgen

Problema	CPLEX 6.5		IPM		$\frac{f_{CPLEX}^* - f_{IPM}^*}{1 + f_{CPLEX}^*}$
	CPU	n.it.	CPU	n.it	
M <sub>64-4</sub>	0.72	12	0.3	18	-2.0e-6
M <sub>64-8</sub>	3.1	12	0.8	20	5.6e-7
M <sub>64-16</sub>	10.7	15	1.6	21	-1.6e-6
M <sub>64-32</sub>	20.8	16	4.3	25	1.9e-6
M <sub>64-64</sub>	46.8	14	10.7	31	-1.1e-6
M <sub>128-4</sub>	2.8	11	0.8	17	1.2e-7
M <sub>128-8</sub>	12.6	11	2.1	21	2.5e-6
M <sub>128-16</sub>	80.5	13	5.9	28	6.9e-6
M <sub>128-32</sub>	153.6	14	15.7	35	2.8e-6
M <sub>128-64</sub>	305.5	14	35.3	36	-1.4e-6
M <sub>128-128</sub>	741.9	15	98.8	48	-5.7e-7
M <sub>256-4</sub>	13.1	13	2.7	20	-7.9e-6
M <sub>256-8</sub>	73.8	14	6.7	22	2.4e-5
M <sub>256-16</sub>	634.1	15	22.5	34	2.3e-5
M <sub>256-32</sub>	1105.2	16	49.9	36	2.4e-6
M <sub>256-64</sub>	2102.2	16	140.0	53	4.9e-7
M <sub>256-128</sub>	4507.3	17	327.6	62	5.0e-6
M <sub>256-256</sub>	11761.3	24	835.3	85	7.0e-6

siempre 11. Las instancias obtenidas con este generador se denotan como PDS $t$ , siendo  $t$  el número de días del estudio. Las dimensiones de estos problemas pueden hallarse en la Tabla 2. El significado de las columnas es el mismo que en la Tabla 1. Tanto el generador PDS como el generador Mnetgen pueden obtenerse de

<http://www.di.unipi.it/di/groups/optimize/Data/MMCF.html>.

Los dos conjuntos de instancias han sido solucionados con el algoritmo especializado de las secciones precedentes, cuya implementación se denomina IPM [3], y con CPLEX 6.5 [9], uno de los mejores sistemas de optimización de la actualidad. A diferencia del caso lineal, donde también se dispone de un algoritmo especializado de flujos en redes basado en el simplex (y que, en general, resulta ser la mejor opción), para problemas cuadráticos el sistema CPLEX 6.5 únicamente cuenta con un algoritmo de punto interior.

Las Tablas 3 y 4 muestran los resultados obtenidos con CPLEX 6.5 e IPM en la solución de los problemas cuadráticos Mnetgen y PDS, respectivamente. Para cada problema se indica el tiempo de CPU requerido por CPLEX 6.5 e IPM (columnas “CPU”), el número de iteraciones requerido por CPLEX 6.5 e IPM (columnas “n.it.”), y el error relativo  $\frac{f_{CPLEX}^* - f_{IPM}^*}{1 + f_{CPLEX}^*}$  de la solución proporcionada por IPM (se considera que CPLEX 6.5 proporciona el óptimo exacto). Los tiempos de CPU se han obtenido en una estación de trabajo Sun Ultra2 2200 de 200MHz, 1Gb de memoria central,  $\approx 68$  Mflops Linpack, 14.7 Specfp95 y 7.8 Specint95. Las Figuras 2-5 resumen la información de las tablas anteriores. Las Figuras 2 y 4 muestran los cocientes de los tiempos de CPU de CPLEX 6.5 e

Tabla 4: Resultados para los problemas cuadráticos PDS

Problema	CPLEX 6.5		IPM		$\frac{f_{CPLEX}^* - f_{IPM}^*}{1 + f_{CPLEX}^*}$
	CPU	n.it.	CPU	n.it.	
PDS1	1.6	23	1.3	29	$-2.7e-7$
PDS10	234.8	43	78.6	62	$-6.6e-7$
PDS20	1425.6	55	271.0	69	$1.9e-6$
PDS30	5309.8	76	938.3	96	$-6.0e-6$
PDS40	10712.3	79	1965.2	105	$-4.1e-6$
PDS50	14049.7	80	3163.3	114	$-4.1e-7$
PDS60	17133.4	71	3644.2	95	$3.6e-6$
PDS70	25158.3	74	5548.7	101	$-1.9e-7$
PDS80	26232.1	74	7029.9	100	$-1.3e-6$
PDS90	32412.9	77	9786.7	109	$-1.2e-6$

IPM según el número de variables de la instancia, para los problemas Mnetgen y PDS respectivamente. Las Figuras 3 y 5 muestran el número de iteraciones realizadas por CPLEX 6.5 e IPM para cada instancia, de nuevo para los problemas Mnetgen y PDS respectivamente.

En primer lugar hay que notar que IPM proporciona soluciones muy cercanas a las obtenidas con CPLEX 6.5. En las Tablas 3 y 4 se observa como los errores relativos en los valores óptimos de las funciones objetivo son del orden de  $1.0e-6$ .

En lo referente a la eficiencia de cada código, de las Figuras 2 y 4 podemos concluir que IPM fue siempre más eficiente que CPLEX 6.5. Para los problemas PDS, IPM fue en promedio 4.1 veces más rápido que CPLEX 6.5, mientras que esta eficiencia media fue de 9.94 para los problemas Mnetgen. Esta diferencia puede explicarse por el hecho que los  $k$  sistemas a solucionar con las submatrices diagonales de la matriz  $B$  definida en (7) son de mayor dimensión para los problemas PDS que para los Mnetgen (nótese que la dimensión de cada bloque diagonal de  $B$  es el número de nodos del problema, el cual es muy superior para los problemas PDS que para los Mnetgen). Este argumento también serviría para explicar la disminución de la eficiencia de IPM respecto CPLEX 6.5 para los problemas PDS de mayor dimensión, tal y como se observa en la Figura 4. En relación con este hecho, cabe indicar, sin embargo, que IPM utiliza rutinas estándar de resolución de sistemas simétricos y dispersos de gran dimensión (en particular, las rutinas de E. Ng y B. Peyton [10]). Por su parte el sistema profesional CPLEX 6.5 incluye en sus algoritmos los últimos avances en cuanto a álgebra lineal numérica se refiere.

En lo referente al número de iteraciones de cada algoritmo, observamos en las Figuras 3 y 5 como CPLEX 6.5 realiza muchas menos iteraciones que IPM. Esto se debe a que el algoritmo de punto interior de CPLEX 6.5, a diferencia de IPM, utiliza un método predictor-corrector [11] para el cálculo de las direcciones de movimiento. En [3] se observó como el uso de un método predictor-corrector en IPM, a pesar de disminuir el número de iteraciones, aumentaba el tiempo total de resolución. Esto se debía al hecho de tener que solucionar dos sistemas del tipo  $A\Theta A^T$  por iteración. En el algoritmo especializado de IPM esto significaba tener que aplicar dos veces por iteración el GCP, lo cual era muy costoso. Sin embargo, y dado el buen funcionamiento observado del preconditionador para

Figura 2: Relación de tiempos de CPU entre CPLEX 6.5 e IPM para los problemas cuadráticos Mnetgen.

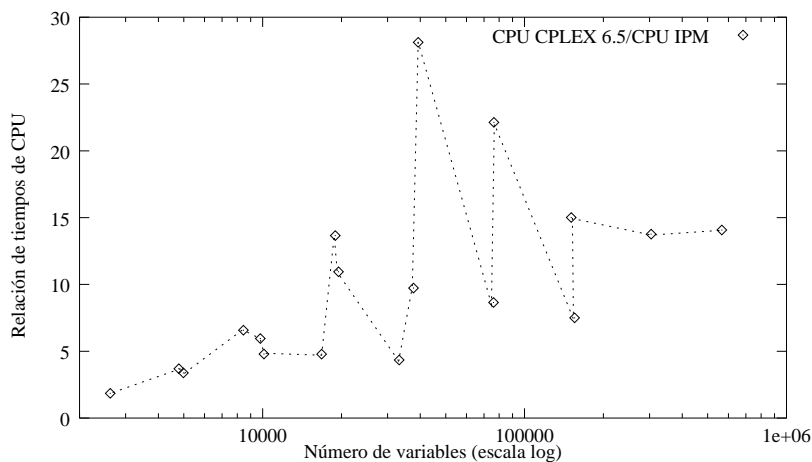


Tabla 5: Resultados para los problemas cuadráticos PDS de pequeña dimensión

Problema	$m$	$n$	$k$	$\tilde{n}$	$\tilde{m}$	CPU		
						CPLEX	IPM	PPRN
PDS1	126	372	11	4464	1758	1.6	1.3	75.5
PDS2	252	746	11	8952	3518	5.2	7.9	293.3
PDS3	390	1218	11	14616	5508	10.2	10.5	903.4
PDS4	541	1790	11	21480	7741	22.4	33.9	1702.8
PDS5	686	2325	11	27900	9871	53.2	44.7	2631.3

problemas cuadráticos, debería comprobarse si el método predictor-corrector puede ser ahora aplicado con éxito. Esto forma parte de las tareas futuras a realizar.

Finalmente, se han comparado los sistemas CPLEX 6.5 e IPM con PPRN [5], un código especializado para la solución de problemas no-lineales de flujos multiartículo. PPRN puede considerarse como un buen representante de los códigos no basados en métodos de punto interior para problemas (multiartículo) cuadráticos. Los tiempos de ejecución para cada código se presentan en la Tabla 5 (columnas “CPU”). El resto de columnas tienen el mismo significado que en las Tablas 1 y 2. Únicamente se han considerado los 5 problemas PDS de menor dimensión, dado el excesivo tiempo de resolución requerido por PPRN. A la vista de los resultados obtenidos, puede concluirse que, para problemas cuadráticos y separables de flujos multiartículo, el algoritmo implementado en IPM resulta ser actualmente una de las mejores estrategias de resolución.

Figura 3: Número de iteraciones realizadas por CPLEX 6.5 e IPM para los problemas cuadráticos Mnetgen

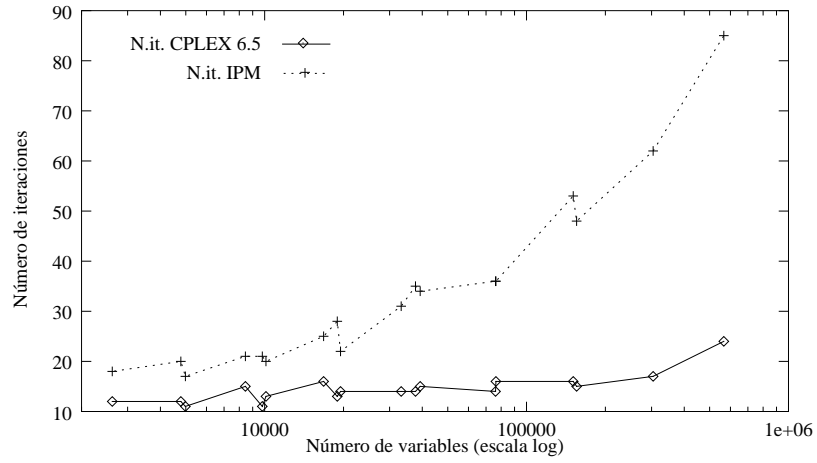


Figura 4: Relación de tiempos de CPU entre CPLEX 6.5 e IPM para los problemas cuadráticos PDS.

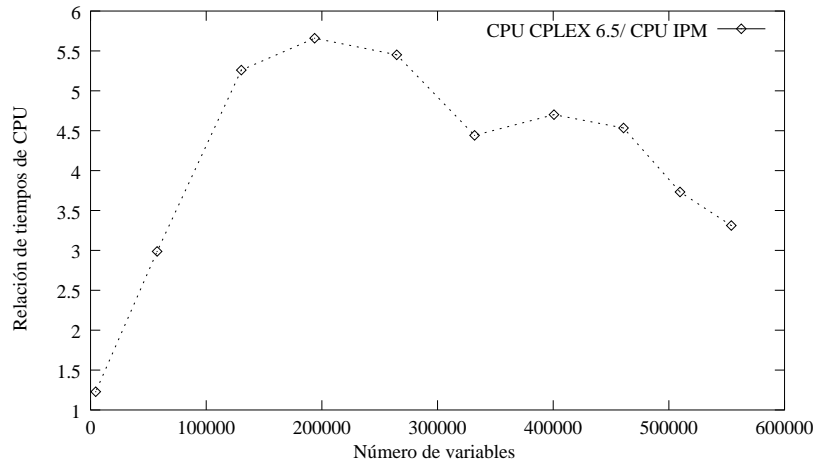
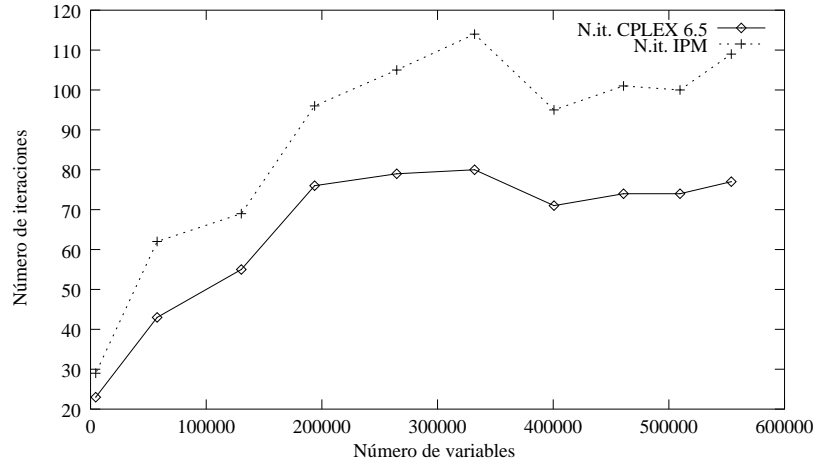


Figura 5: Número de iteraciones realizadas por CPLEX 6.5 e IPM para los problemas cuadráticos PDS



## 5. Conclusiones

El algoritmo especializado presentado en [3] ha mostrado tener una mayor eficiencia en la solución de problemas cuadráticos que lineales. Esto se debe en parte al mejor comportamiento del preconditionador usado por el GCP a cada iteración del algoritmo. Entre las tareas futuras por realizar destacamos:

- Realizar un estudio más detallado sobre cómo afecta el término cuadrático de la función objetivo al preconditionador usado.
- Estudiar si para el caso cuadrático el método predictor-corrector puede proporcionar mejores resultados que los actuales.
- Realizar un estudio computacional del algoritmo más amplio, incluyendo problemas de mayor dimensión, y códigos de programación cuadrática y no-lineal adicionales que no implementen un algoritmo de punto interior.
- Usar IPM dentro de un algoritmo de diseño óptimo de redes [7] para la solución de los subproblemas multiartículo cuadráticos resultantes.

## Referencias

- [1] A. Ali and J.L. Kennington, Mnetgen program documentation, Technical Report 77003, Dept. of Ind. Eng. and Operations Research, Southern Methodist University, Dallas, 1977.
- [2] W.J. Carolan, J.E. Hill, J.L. Kennington, S. Niemi and S.J. Wichmann, An empirical evaluation of the KORBX algorithms for military airlift applications, *Operations Research* 38 (1990), 240–248.
- [3] J. Castro, A specialized interior-point algorithm for multicommodity network flows, *SIAM J. on Optimization* 10(3) (2000), 852–877.

- [4] J. Castro, Solving difficult multicommodity problems through a specialized interior-point algorithm, DR 2000-14, Statistics and Operations Research Dept., Universitat Politècnica de Catalunya, 2000. Sometido a *Annals of Operational Research*.
- [5] J. Castro and N. Nabona, An implementation of linear and nonlinear multicommodity network flows, *European Journal of Operational Research*, 82 (1996), 37-53.
- [6] P. Chardaire and A. Lisser, Simplex and interior point specialized algorithms for solving non-oriented multicommodity flow problems, 1999 (a aparecer en *Operations Research*).
- [7] A. Frangioni, Comunicación personal, 2000.
- [8] B. Gendron, T.G. Crainic, A. Frangioni Multicommodity Capacitated Network Design, *Telecommunications Network Planning*, B. Sansó and P. Soriano (Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1–19, 1999.
- [9] ILOG CPLEX, *ILOG CPLEX 6.5 Reference Manual Library*, ILOG, 1999.
- [10] E. Ng, and B.W. Peyton, Block sparse Cholesky algorithms on advanced uniprocessor computers, *SIAM J. Sci. Comput.*, 14 (1993), 1034–1056.
- [11] Wright, S.J., *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, Philadelphia, PA (1997).